Lehrbuch

der

Anwendung der Mechanik

auf

Maschinen.

Von

J. V. Poncelet,

Ingenieurbataillonschef, Mitglied des französischen Nationalinstituts, Professor der technischen Mechanik an der Facultät der Wissenschaften zu Paris, Mitglied der königl. Academie zu Metz, der Academie der Wissenschaften zu Berlin rc. rc.

Deutsch herausgegeben

von

Dr. C. H. Schnuse.

Zweiter Band.

Mit drei lithographirten Tafeln.

Darmstadt,

Druck und Verlag von C. W. Leske.

1848.

Inhaltsverzeichniß.

Sechster Abschnitt.

Ueber die permanente oder constante Bewegung und Ausströmung der Flüssigkeiten.

Ueber die Schützöffnungen, Gerinne und Kanäle oder Gräben.

Siebenter Abschnitt.

Von den vorzüglichsten Motoren und Receptoren.

Allgemeine Theorie der hydraulischen Receptoren durch das Princip der lebendigen Kräfte.

Verticale Räder mit geraden Schaufeln.

Verticale Räder mit gekrümmten Schaufeln.

§§

Von den Windmühlen.

Von der Anwendung des Wasserdampfes als bewegende Kraft.

Elfter Abschnitt.

Zwölfter Abschnitt.

Dreizehnter Abschnitt.

Vierzehnter Abschnitt.

Fünfzehnter Abschnitt.

Sechster Abschnitt.

Ueber die permanente oder constante Bewegung und Ausströmung der Flüssigkeiten.

Von den kleinen Ausflußöffnungen und Leitungsröhren, welche dazu dienen, das Wasser und die Luft aus den Behältern und Gasometern entströmen zu lassen.

Historische Bemerkung.

§. 1. Die genauen und vollständigen Differenzialgleichungen für die Bewegung der nicht zusammendrückbaren Flüssigkeiten sind schon seit längerer Zeit unter der Voraussetzung eines vollkommen flüssigen Zustandes bekannt, und Navier hat dieselben sogar auf den Fall ausgedehnt, wo die Flüssigkeit zäh und klebrig und von der Adhäsion der sie umgebenden Gefäßwände afficirt ist *); jedoch finden jene allgemeinen Gleichungen auf die gewöhnlichen in der Praxis vorkommenden Fälle wegen der Schwierigkeit, die ihre Integration darbietet, wenig Anwendung. Diesem Uebelstande haben die Geometer durch verschiedene Hypothesen abzuhelfen gesucht, mit Hülfe deren man in gewissen Fällen zu Resultaten gelangt, welche mit denen der Erfahrung übereinstimmen.

Daniel Bernouilli ist der erste, welcher Huyghens' Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte bei der Untersuchung der Ausströmungsgesetze der Flüssigkeiten **) angewandt hat; aber er bestimmte den Verlust an lebendiger Kraft, welcher bei den plötzlichen Aenderungen der Geschwindigkeit stattfindet, unrichtig. — D'Alembert stellte mit Hülfe seines allgemeinen Principes der Dynamik und unter der Annahme der Hypothese von den parallelen Schichten eine genauere und strengere Theorie auf, welche allgemein angenommen wurde. Später zeigte Borda ***), indem er das Prin-

*) Mémoire lu à l'Académie Royale des sciences, le 22 Mars 1822.
**) *Daniel Bernouilli:* Hydrodynamique.
***) *Borda*: Mémoire sur l'écoulement des fluides, Mémoires de l'Académie des sciences, années 1766 et 1768.

cip der lebendigen Kräfte auf die Hypothese anwandte, daß die Bewegung der Flüssigkeit in gesonderten Fäden vor sich gehe, worin die Mängel der Auflösungen Bernouilli's bestanden, und berichtigte dieselben, indem er auf den Verlust an lebendiger Kraft, welcher in den plötzlichen Einengungen der Gefäße stattfindet, gehörig Rücksicht nahm; er bestätigte diese Theorie für gewisse Fälle auch durch sinnreiche und directe Versuche.

Zur Vervollständigung der verschiedenen Anwendungen blieb jedoch der Einfluß des Widerstandes noch in Betracht zu ziehen, welchen die Gefäßwände der Bewegung der Flüssigkeiten unter gewissen Umständen, z. B. in Canälen und langen Röhrenleitungen, entgegensetzen, wo dieser Einfluß sehr merklich wird und bedeutende Effecte hervorbringt. Dies versuchte Girard, indem er annahm, daß der Widerstand bei der geradlinigen Bewegung dem Quadrate der Geschwindigkeit und dem Umfange der Wände proportional sei; und nachdem Coulomb aus einigen speciellen und feinen Versuchen den Schluß gezogen hatte, daß jener Widerstand durch zwei Glieder dargestellt werden müsse, von denen das eine der ersten Potenz und das andere dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sei, ging Prony *) von diesem Gesichtspuncte aus und stellte die Gesetze für die Bewegung des Wassers in Canälen und langen Röhrenleitungen auf. Hierdurch gelang es ihm, die Resultate der zahlreichen Versuche von Couplet, Bossut **), Dubuat ***) mit einem sehr befriedigenden Grade von Annäherung darzustellen. Später zeigte Navier in seinen Noten zu der neuen Ausgabe der *Architecture hydraulique* von *Bélidor*, und besonders in seinen *Leçons de Mécanique appliquée à l'Ecole des ponts et chaussées*, wie das Princip der lebendigen Kräfte, wenn es passend angewandt wird, zur unmittelbaren Auflösung der verschiedenen auf die Bewegung der Flüssigkeiten bezüglichen Aufgaben dienen kann. Eytelwein nahm die Auflösungen Prony's in Beziehung auf Canäle und Röhrenleitungen weiter auf, indem er sich dabei auf das Ergebniß einer noch größeren Anzahl von Versuchen, welche in Holland, Deutschland und Italien über Canäle und Flüsse gemacht waren, stützte. Er führte in die auf Röhrenleitungen sich beziehende Gleichung noch ein Glied ein, welches die im Verbindungspuncte der Röhren mit dem Wasserbehälter sich äußernden Effecte mit in Rechnung brachte, ein Glied, dessen Einfluß auf die Resultate bei langen Röhren übrigens sehr gering ist, und welches außerdem die Gleichung für die Bewegung auf diejenige zurückführt, welche man erhält, wenn man das Princip der lebendigen Kräfte, wie wir weiter unten sehen werden, direct auf die vorliegende Aufgabe anwendet.

Was die Theorie der Bewegung der luftförmigen Flüssigkeiten betrifft, so ist dieselbe in der letzteren Zeit durch Girard †), d'Au-

---

*) *Prony:* Mémoire sur l'écoulement des fluides et le jaugeage des eaux courantes.

**) *Bossut:* Hydrodynamique, 2e partie.

***) Principes d'Hydraulique.

†) Annales des mines, Tome V, 1821 — 1822, des mémoires de l'académie des sciences, Institut.

buisson *) und Navier **) bedeutend vervollkommnet, wodurch sie mit der der Hydrodynamik in gleichen Rang gestellt ist. Der erste dieser gelehrten Ingenieure stützte sich auf das Resultat seiner eigenen Versuche und auf die Gesetze der geradlinigen Bewegung und wurde zu der Annahme geführt: daß der Widerstand der Röhren blos dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sei, woraus derselbe eine Formel ableitete, welche mit einem ziemlichen Grade von Genauigkeit die Resultate in Betreff der Ausflußmenge aus sehr langen Röhren darstellt, welche mit dem einen Ende in die freie Luft münden und an dem andern aus einem großen Gasometer unter constantem Drucke gespeist werden. Der zweite gelangte durch eine Reihe schöner Versuche und indem er sich bloß auf das Princip von Torricelli stützte, welches sich auf unpreßbare Flüssigkeiten bezieht, zu sehr einfachen practischen Formeln, mit Hülfe deren man die Ausflußmenge eines Gases, welche durch Oeffnungen und Ansatzröhren von verschiedenen Formen und durch sehr lange Röhrenleitungen stattfindet, ferner die constanten Coefficienten, welche in jenen Formeln vorkommen, die Beziehung zwischen den Spannungen in den verschiedenen Puncten u. s. w. finden kann. Bis dahin waren die Auflösungen auf die Fälle beschränkt, wo die geringe Veränderung der Dichtigkeit der Flüssigkeit erlaubt, letztere als unpreßbar zu betrachten; Navier hat jedoch das Verdienst, durch eine Reihe schöner Beispiele gezeigt zu haben, wie man unter Berücksichtigung des Einflusses der Expansion der Gase alle Fragen dieser Art auf das oben erwähnte, von Bernouilli, d'Alembert und Borda aufgestellte Princip zurückführen kann, wenn man nach der auch schon von Girard und d'Aubuisson gemachten Bemerkung das Glied des Widerstandes, welches die erste Potenz der Geschwindigkeit enthält, gegen das, welches das Quadrat derselben enthält, vernachlässigt, da das letztere Glied im Verhältnisse zu dem ersteren bei den großen Geschwindigkeiten, welche die Gase selbst unter sehr schwachen Druckkräften annehmen, fast unendlich groß ist.

Grundbegriffe.

Verschiedene Arten von Flüssigkeiten.

§. 2. Man muß die gasförmigen Flüssigkeiten, wie die Luft, die Dämpfe ꝛc. wohl von den eigentlichen oder tropfbaren Flüssigkeiten, wie das Wasser ꝛc., unterscheiden. Die ersteren sind sehr veränderlich in ihrem Volumen, sehr zusammendrückbar und ausdehnsam durch die Einwirkung äußerer Kräfte und der Wärme; die letzteren dagegen sind fast unpreßbar und wenn sie in überall begrenzte Räume eingeschlossen werden, so verhalten sie sich fast eben so, wie feste Körper. Wenn sich jedoch der Druck und mithin auch die Dichtigkeit der Gase nur sehr wenig ändert, so kann man dieselben wie

*) Annales des mines, Tome X, années 1824 et 1825. Id. Tome XIII, 1826, id. 2e série, Tome III, 1828.

**) Mémoire lu à l'académie Royale des sciences de l'institut, le 1er Juin 1829.

nichtzusammendrückbare Flüssigkeiten betrachten und darauf eben dieselben Schlüsse, wie auf die tropfbaren Flüssigkeiten, anwenden.

Eine wesentliche Unterscheidung ist ferner zwischen der permanenten oder constanten und der veränderlichen Bewegung der Flüssigkeiten zu machen. Die erstere setzt voraus, daß die Geschwindigkeit in jedem bestimmten Puncte sowohl der Größe, wie der Richtung nach für alle Augenblicke, worin man die Flüssigkeit betrachtet, dieselbe bleibe. Diese Bewegung ist es, welche wir im Folgenden vorzugsweise zu untersuchen haben, da sie fast allen practischen Anwendungen entspricht, und in Beziehung auf die Theorie der veränderlichen Bewegung verweisen wir auf die Lehrbücher der Mechanik von Poisson und Prony, wo man die Gesetze dieser Bewegung gehörig entwickelt findet. Wir begnügen uns hier mit der Bemerkung, daß die Ausflußgeschwindigkeit der Flüssigkeiten nur in den ersten Augenblicken der Oeffnung großer Behälter merklich variirt, und daß nach einigen Secunden oder Minuten die Geschwindigkeit und der Zustand der Flüssigkeit überhaupt gewöhnlich constant bleibt, ein Umstand, welchen man in der Praxis immer an sichern Zeichen erkennt, nämlich daran, daß die der freien Luft ausgesetzten Oberflächen der Flüssigkeit eine unveränderliche Form behalten, oder daß ihre Höhe oder ihr Druck in gewissen Puncten dieselben bleiben.

Hypothese der parallelen Schichten.

§. 3. Um das d'Alembert'sche Princip und das der lebendigen Kräfte auf die Ausströmung der Flüssigkeiten mit Vortheil anwenden zu können, ist man genöthigt, anzunehmen, daß für gewisse ebene Durchschnitte, welche quer durch ihre Masse gelegt sind, alle Molecüle eine parallele und auf diesen Querschnitten senkrechte gemeinschaftliche Bewegung haben, d. h. daß ihre Geschwindigkeiten für alle Puncte ein und desselben Querschnittes gleich und parallel sind. Diese Voraussetzung ist unter dem Namen der Hypothese der parallelen Schichten bekannt; dieselbe genügt aber nicht, um danach die Aufgaben über die Bewegung der Flüssigkeiten zu lösen, und man muß dabei noch annehmen, daß der Druck in der Richtung der Bewegung für jedes Element der Oberfläche einer Schicht gleich groß sei, eine Bedingung, welche eine nothwendige Folge aus der Gleichheit und dem Parallelismus der Geschwindigkeiten zu sein scheint. In der Wirklichkeit werden diese verschiedenen Voraussetzungen selten genau bestätigt, indem der Widerstand, welchen die Wände der Behälter oder Gefäße der Bewegung entgegensetzen, und verschiedene andere Ursachen eine Verzögerung der Geschwindigkeit herbeiführen, die eine strenge Anwendung jener Hypothese verhindert. Betrachtet man aber das Verfahren näher, welches in der Folge auf mehrere Beispiele angewandt werden wird und in der Anwendung des Principes der lebendigen Kräfte auf eine zwischen zwei parallelen Durchschnitten enthaltene flüssige Masse besteht, so wird man leicht finden, daß die Hypothese der parallelen Schichten in vielen Fällen hinreichend genaue Resultate liefern muß; wie z. B. in dem Falle eines Canales oder einer Röhre von bedeutender Länge, deren Axen stetige Curven mit sehr sanften

Biegungen sind und deren Querschnitte nur sehr wenig variiren. Dasselbe findet auch noch in anderen Fällen der Praxis, aber zwischen gewissen Gränzen, statt, welche daher gleich im Voraus etwas näher erörtert werden mögen.

Bemerkung über die Fälle, worin man die in Rede stehende Hypothese anwenden darf.

§. 4. Um hiervon einen Begriff zu geben, betrachten wir ein cylindrisches oder prismatisches Gefäß, welches sich durch eine Oeffnung an seinem unteren Theile ausleert. Man weiß, daß der ausfließende Strahl in Folge der starken Convergenz der Fäden der Flüssigkeit, welche von allen Seiten gegen die Oeffnung strömen, statt mit dieser Oeffnung gleichen Querschnitt zu haben, sich bis auf eine gewisse Entfernung von dem Gefäße zusammenzieht; diese Erscheinung, mit der wir uns später noch specieller beschäftigen werden, und von der wir hier nur die Existenz anführen, bildet die sogenannte Zusammenziehung des flüssigen Strahles. Da sich diese Convergenz und Divergenz der Fäden der Flüssigkeit bis auf eine gewisse Entfernung innerhalb und außerhalb des Gefäßes erstreckt, so leuchtet ein, daß man zwischen diesen Grenzen die Hypothese der parallelen Schichten nicht anwenden kann. Diesseit und jenseit jener Grenzen hört die Convergenz aber auf, wie dies bei kreisförmigen Oeffnungen stattfindet, und die Bewegung erfolgt nahezu in parallelen Fäden. Da ferner die Geschwindigkeit in Folge der gegenseitigen Adhäsion der Massentheilchen sich in der ganzen Ausdehnung des zu dem mittleren Faden normalen Durchschnittes auszugleichen strebt; so wird man zu der Annahme geführt, daß die Bewegung in Schichten vor sich gehe, ein Umstand, der alsdann eine Anwendung des Principes der lebenden Kräfte für den ganzen zwischen jenen Schichten enthaltenen Raum gestattet. Wir werden in der Folge mehrmals Gelegenheit haben, solche Fälle näher zu bezeichnen, wo es nicht erlaubt sein würde, auf dieselbe Weise wie oben zu schließen.

Continuität der Flüssigkeiten.

§. 5. Ein anderes Gesetz, welches mit der Beobachtung in allen Fällen der Praxis übereinzustimmen scheint, ist das sogenannte Gesetz der Continuität oder Stetigkeit, nach welchem die verschiedenen Massentheilchen sich stets einander berühren und ein Ganzes ohne Zwischenräume bilden; sobald es sich nun um tropfbare Flüssigkeiten oder auch um Gase handelt, welche nur unmerklichen Aenderungen in der Spannung oder dem Drucke unterworfen sind, kann man annehmen, daß die Masse äußerlich dasselbe Volumen behält, welches auch die Veränderung sei, die ihre Gestalt erleidet. Hieraus und aus der Gleichförmigkeit der Bewegung folgt, daß in einer gegebenen Zeit durch alle Querschnitte eines Gefäßes dasselbe Volumen Flüssigkeit geht.

Hinsichtlich der Gase bemerkt man, daß, da die Beständigkeit der Bewegung ein Gleichbleiben der Dichtigkeit und des Druckes in denselben Puncten bedingt, durch alle Querschnitte des Gefäßes in gleichen Zeiten gleiche Massen von Flüssigkeit strömen müssen.

Constante Bewegung einer Flüssigkeit, welche sich aus einem beständig voll erhaltenen Gefäße ergießt.

§. 6. Nachdem diese allgemeinen Sätze vorausgeschickt sind, wollen wir das Princip der lebendigen Kräfte auf die Untersuchung der constanten Bewegung der Flüssigkeiten anzuwenden suchen. Betrachten wir zu dem Ende eine flüssige Masse, welche sich in einem Gefäße von beliebiger Form, dessen Querschnitte sich aber nur allmählig ändern, bewegt, und nehmen wir an, dieses Gefäß werde durch seine obere Fläche AB (Fig. 1.) dergestalt gespeist, daß sein Niveau constant bleibt. $ABCD$ sei die zwischen den beiden Querschnitten AB und CD liegende, in Bewegung begriffene Masse, für welche der Parallelismus der Schichten zulässig ist. Wenn nun angenommen wird, daß der Ausfluß durch eine im unteren Theile des Gefäßes angebrachte Oeffnung stattfindet, so sei

O die Fläche des Querschnittes AB,
O' " " " " CD,
Ω " " " " ab des ausfließenden Strahles an der Stelle, wo er aufhört, sich zusammenzuziehen, und wo der Parallelismus der Fäden wieder hergestellt ist,
N, N' und U seien die resp. mittleren Geschwindigkeiten in den Querschnitten AB, CD und ab,
Z und Z' die verticalen Höhen der Querschnitte AB und CD über irgend einer horizontalen Ebene,
ϱ die Masse der Volumeneinheit der Flüssigkeit,
$g = 9^m,8088$,
Π die Dichtigkeit oder das Gewicht der Volumeneinheit $= \varrho g$,
M die Gesammtmasse der Flüssigkeit zwischen AB und CD,
P, P' und p die äußeren Druckkräfte, welche gegen die Flächeneinheit der Querschnitte AB, CD und ab der Flüssigkeit wirken, wovon P in der Richtung der Bewegung und P' und p in entgegengesetzter Richtung wirken.

Untersuchen wir nun, was stattfindet, wenn die flüssige Masse $ABCD$ in dem Zeitelemente dt in die unendlich benachbarte Lage $A'B'C'D'$ übergeht.

In Folge der Continuität der Flüssigkeiten und wenn man die Rechnung zuvörderst auf eine tropfbare Flüssigkeit, wie das Wasser, anwendet, hat man:

$$OV = O'V' = \Omega U,$$

weil die durch jeden Querschnitt gehenden Flüssigkeitsvolumina einander gleich sein müssen.

Um die Gleichung für das Princip der lebendigen Kräfte aufzustellen, berechnen wir die Quantitäten Arbeit, Leistung oder Wirkung, welche durch die verschiedenen auf die Masse wirkenden Kräfte hervorgebracht werden, indem wir dabei den Widerstand der Wände vernachlässigen, was in allen den Fällen erlaubt ist, wo die Querschnitte des Gefäßes in Vergleich zu seiner Länge beträchtliche Dimensionen haben, und indem wir uns vorbehalten, weiter unten hierauf zurückzukommen.

Bei der Bewegung jener flüssigen Masse aus der Lage $ABCD$ in die Lage $A'B'C'D'$ ist die durch die Schwere hervorgebrachte Quantität der Wirkung das Product ihres Gewichtes in die Höhe, um welche ihr Schwerpunct gefallen ist. Bei dieser Verrückung kann man aber die Masse $ABCD$ als aus zwei andern zusammengesetzt betrachten, nämlich aus $A'B'CD$, welche ihren Ort nicht verändert hat, und aus $ABA'B'$, welche in die Lage $CDC'D'$ herabgesunken ist, wie dieses mit Hülfe der Theorie der Momente leicht nachgewiesen werden kann. Mithin ist die durch die Schwere hervorgebrachte Quantität der Wirkung gleich:

$$\Pi \cdot ABA'B' \times (Z - Z')^{k \cdot m}$$

Nun ist aber:

$$ABA'B' = OVdt = \Omega Udt,$$

und wenn man die Masse der unendlich dünnen Schichten $ABB'A'$, $CDC'D'$, $aba'b'$ mit dM bezeichnet, so hat man:

$$dM = \frac{\Pi}{g} \cdot \Omega Udt;$$

mithin kann die Wirkung der Schwere auf die flüssige Masse während des Zeitelementes dt durch:

$$g \cdot dM\,(Z - Z')^{k \cdot m}$$

ausgedrückt werden.

Während derselben Zeit ist die von den Druckkräften P und P' hervorgebrachte Quantität der Wirkung:

$$P \cdot OVdt - P'O'V'dt^{k \cdot m},$$

welche wegen:

$$OVdt = O'V'dt = \frac{gdM}{\Pi}$$

durch:

$$\frac{gdM}{\Pi}(P - P)^{k \cdot m}$$

ausgedrückt werden kann.

Was den Zuwachs an lebendiger Kraft während des Augenblickes dt oder während der Zeit, worin die Masse $ABCD$ in die Lage $A'B'C'D'$ kommt, betrifft; so bemerkt man, daß, wenn die Bewegung wirklich beständig geworden ist, die Geschwindigkeit in jedem Puncte sich gleich geblieben ist und mithin auch die lebendige Kraft des beiden Lagen gemeinschaftlichen Theiles $A'B'CD$ dieselbe sein wird. Subtrahirt man also die lebendige Kraft der Masse $ABCD$ von der der Masse $A'B'C'D'$, um dadurch den gesuchten Zuwachs zu erhalten; so wird die lebendige Kraft des gemeinschaftlichen Theiles verschwinden und man erhält:

$$CDC'D' \times V'^2 - ABA'B' \times V^2$$

für den Zuwachs an lebendiger Kraft während der Zeit dt. Man sieht, daß diese Größe nichts anders ist, als der Zuwachs an lebendiger Kraft, welcher die Masse $ABA'B'$ bekommt, indem sie in die Lage $CDC'D'$ übergeht; und sie reducirt sich nach den vorhergehenden Relationen auf:

$$\rho O'V'dtV'^2 - \rho OVdtV^2,$$

oder auf:

$$dM\,(V'^2 - V^2).$$

Die Gleichung der lebendigen Kräfte ist danach

$$dM\,(V'^2 - V^2) = 2gdM\,(Z - Z') + 2\frac{gdM}{\Pi}\,(P - P').$$

Dividirt man auf beiden Seiten mit dM, berücksichtigt dabei die bekannten Relationen:

$$V = \frac{\Omega}{O}\,U, \quad V' = \frac{\Omega}{O'}\,U$$

und setzt $Z - Z' = H$; so kommt:

$$U^2\left(\frac{\Omega^2}{O'^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) = 2gH + \frac{2g\,(P - P')}{\Pi}.$$

Größe des Druckes in irgend einem Puncte des Gefäßes.

§. 7. Bezeichnet man mit h und h' die den Geschwindigkeiten V und V' zugehörigen Fallhöhen, so hat man:

$$V^2 = \frac{U^2\Omega^2}{O^2} = 2gh, \quad V'^2 = \frac{U^2\Omega^2}{O'^2} = 2gh',$$

und mithin:

$$2g\,(h' - h) = 2gH + 2g\,\frac{P - P'}{\Pi},$$

woraus sich die Relation ergibt:

$$P' = P + \Pi H - \Pi\,(h' - h),$$

welche den in dem Querschnitte CD stattfindenden Druck gibt. Dieser Druck ist also gleich dem Drucke auf AB, plus dem der Höhe der Flüssigkeit über dem betrachteten Querschnitte CD entsprechenden Drucke, und weniger dem Drucke, welchen eine Wassersäule hervorbringen würde, deren Höhe dem Zuwachse der Geschwindigkeit von AB bis CD entspricht. Man sieht, daß, wenn die Bewegung in dem Gefäße sehr langsam ist, $h' - h$ sehr gering und der Druck in irgend einem Puncte fast derselbe ist, als wenn die Flüssigkeit in Ruhe wäre.

Anwendung auf den Querschnitt ab des Flüssigkeitsstrahles.

§. 8. Um die vorstehenden Formeln auf den Querschnitt ab des Flüssigkeitsstrahles anzuwenden und die Ausflußgeschwindigkeit zu bestimmen, genügt es, $P' = p$ oder gleich dem äußeren Drucke gegen die Ausflußöffnung, dann $O' = \Omega$ zu setzen und für H die Höhe des Spiegels AB über dem Querschnitte ab, wo die Flüssigkeitsfäden wieder anfangen, parallel zu werden, anzunehmen. Die Gleichung der lebendigen Kräfte gibt in diesem Falle:

$$U^2\left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) = 2g\cdot H + 2g\cdot\frac{P - p}{\Pi},$$

woraus folgt:

$$U = \sqrt{\frac{2g\left(H + \frac{P - p}{\Pi}\right)}{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}}.$$

Der Fall, wo die Oberfläche des Behälters im Verhältniß zur Ausflußöffnung sehr groß ist.

§. 9. Da in der Praxis die obere Fläche AB oder O des Behälters gegen die der Ausflußöffnung gewöhnlich sehr groß ist, so wird das Glied $\frac{\Omega^2}{O^2}$ sehr klein und kann alsdann vernachlässigt werden. Ist die Oeffnung z. B. $\frac{1}{10}$ der oberen Fläche, so ist $\frac{\Omega^2}{O^2} = \frac{1}{100}$. In diesem Falle reducirt sich die letzte Formel auf:

$$U = \sqrt{2g\left(H + \frac{P-p}{\Pi}\right)}.$$

Da Π das Gewicht der Volumeneinheit der Flüssigkeit ist, so sind $\frac{P}{\Pi}$ und $\frac{p}{\Pi}$ die Höhen dieser Flüssigkeit, welche resp. den Druck P und p messen würden.

Der Fall, wo der Ausfluß in die freie Luft und unter dem atmosphärischen Drucke stattfindet.

§. 10. Handelt es sich endlich um den Ausfluß des Wassers eines Behälters, dessen Oberfläche nur dem atmosphärischen Drucke ausgesetzt ist, in die freie Luft; so hat man $P = p$, und der Ausdruck für die Geschwindigkeit reducirt sich auf:

$$U = \sqrt{2gH},$$

welche Beziehung zuerst von Torricelli bewiesen ist und ausdrückt, daß in der Hypothese der parallelen Schichten die mittlere Ausflußgeschwindigkeit genau gleich der ist, welche der Fallhöhe des Wasserspiegels über dem zusammengezogenen Querschnitte des Strahles entspricht.

Der Fall, wo der Ausfluß aus einem Gefäße in ein anderes stattfindet.

§. 11. Wenn der Ausfluß, anstatt in die freie Luft, in ein anderes Gefäß erfolgte, dessen Spiegel in der Höhe h über dem Querschnitte ab des Strahles läge; so würde der Druck p gegen die Ausflußöffnung gleich dem der Atmosphäre plus dem Gewichte der Wassersäule von der Höhe h sein, und man hätte:

$$\frac{P-p}{\Pi} = -h;$$

mithin würde die Geschwindigkeit in der Ausflußöffnung:

$$U = \sqrt{2g\,(H-h)},$$

d. h. sie würde der Höhendifferenz zwischen dem oberen und unteren Wasserspiegel als Fallgeschwindigkeit entsprechen.

Anwendung der vorstehenden Theorie auf die Bewegung der Gase, wenn die inneren und äußeren Druckkräfte wenig von einander verschieden sind.

§. 12. Die vorstehenden Sätze können auch immer auf elastische Flüssigkeiten angewendet werden, sobald der Druck im Innern des Behälters nur wenig variirt; denn weil sich alsdann die Dichtigkeit ebenfalls nur unmerklich ändert, so kann man auch hier annehmen, daß durch die verschiedenen Querschnitte des Behälters gleiche Volumina der Flüssigkeit gehen. Es ist für diesen Fall nur zu bemerken, daß, da die Gase in verschlossenen Gefäßen enthalten sind, der Druck P in dem Behälter mit Hülfe eines Instrumentes, eines sogenannten Hebermanometers gemessen wird, in welchem eine Wasser- oder Quecksilbersäule durch ihren Niveauunterschied den Ueberschuß des Druckes über den atmosphärischen Druck oder die Druckhöhe anzeigt.

Bezeichnet man diese Höhe der Flüssigkeit in der Manometerröhre, welche dem Ueberschusse des Druckes das Gleichgewicht hält, mit h und die Dichtigkeit dieser Flüssigkeit mit Π; so hat man offenbar:

$$P - p = \Pi_1 h.$$

Π_1 ist a priori bekannt und gleich $1000^{kil.}$, wenn die Flüssigkeit des Manometers Wasser ist, oder gleich $13598^{kil.}$, wenn man sich des Quecksilbers bedient.

Was den Werth von Π oder das Gewicht der Volumeneinheit der Gase unter dem Drucke P und bei der Temperatur, welche man jedesmal ermitteln kann, betrifft; so hat man nach dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze, wenn Π_0 die Dichtigkeit des Gases bei der Temperatur von 0° und unter dem atmosphärischen Drucke P_0 bezeichnet, für den Druck Π bei der Temperatur von n° Centes:

$$\Pi = \frac{\Pi_0 P}{P_0 (1 + 0{,}00375\, n)}.$$

Für die Luft, bei einem Drucke von $0^m{,}76$, ist

$$\left.\begin{array}{ll} P_0 = 1^k{,}0333 & \text{für das Quadratcentimeter} \\ \Pi_0 = 1^k{,}2991 & \text{das Cubikmeter} \end{array}\right\}, \text{ also } \Pi = \frac{1{,}2572\, P}{1 + 0{,}00375\, n},$$

in welcher Formel man gewöhnlich für atmosphärische Luft $0{,}004\, n$ für $0{,}00375\, n$ setzt, um dadurch die Feuchtigkeit, welche sie immer enthält, und deren Wirkung in einer Vermehrung der Spannkraft und einer Verminderung der Dichtigkeit des Gases besteht, in Rechnung zu bringen.

Hieraus sieht man, daß sich das Glied:

$$\frac{P - p}{\Pi} = \frac{\Pi_1}{\Pi} h$$

leicht berechnen läßt und bei dem Drucke im Behälter die Höhe einer Flüssigkeitssäule ausdrückt, welche vermöge ihres Gewichtes denselben Druck hervorbringen kann. Wegen der geringen Dichtigkeit des Gases wird nun diese Höhe sehr beträchtlich sein, und die Höhe des oberen Theiles des Behälters über der Ausflußöffnung wird im Verhältnisse zu jener Druckhöhe immer vernachlässigt werden können, so daß man bei der Anwendung der Formel (§. 9)

$$U = \sqrt{2g\left(H + \frac{P - p}{\Pi}\right)}$$

auf die Ausströmung der Gase von dem Gliede $2gH$ abstrahiren und den Werth der Ausflußgeschwindigkeit auf:

$$U = \sqrt{\frac{2g(P-p)}{\Pi}}$$

reduciren kann.

§. 13. Die in Frankreich von Girard und d'Aubuisson und in Schweden von Lagerhjelm angestellten Versuche, von denen weiter unten die Rede sein wird, bestätigen in der That diese Analogie zwischen der Ausströmung der eigentlichen Flüssigkeiten und der Gase, sobald der Druck in der sich bewegenden Masse nur wenig variirt, ein Umstand, der z. B. bei den meisten Gebläsen stattfindet, wo der Ueberschuß des inneren Druckes über den der Atmosphäre oft nur auf $0^m,03$ oder $0^m,04$ steigt, d. h. wo die Druckkräfte nur um $\frac{1}{25}$ oder $\frac{1}{15}$ von einander abweichen. Vorstehende Annahme ist jedoch dann nicht mehr zuläßig, wenn die Druckkräfte sich merklich ändern, wie bei den Dampfmaschinen ꝛc.; in diesem Falle muß man die Wirkung der allmähligen Veränderung des Druckes oder der Expansion des Gases in den verschiedenen Puncten der Masse direct untersuchen.

Berichtigung der obigen Formeln für den Ausfluß der Gase, wenn die inneren und äußeren Druckkräfte sehr verschieden sind.

§. 14. Betrachtet man einen Gasbehälter unter ähnlichen Verhältnissen wie vorhin, so sieht man zuvörderst, daß die durch die Schwere mitgetheilte Quantität der Wirkung sich ebenso wenig ändert, wie der Ausdruck für den Zuwachs an lebendiger Kraft; anders ist es aber mit der Quantität der Wirkung, welche durch den Druck des Gases hervorgebracht wird.

Nach dem, was in §. 5 über die Continuität der elastischen Flüssigkeiten gesagt ist, geht durch jede unendlich dünne Schicht in derselben Zeit nicht mehr dasselbe Volumen Gas, sondern dieselbe Masse, weil nach der Voraussetzung die Gleichförmigkeit der Bewegung hergestellt ist. Hieraus folgt, daß, wenn man alle Bezeichnungen aus §. 6 beibehält und Π' und ϖ resp. die Dichtigkeiten der Flüssigkeit unter dem Drucke P' und p, welcher resp. in CD und in ab stattfindet, nennt, die Massenelemente der Flüssigkeit, welche durch einen jeden der Querschnitte $ABA'B'$, $CDC'D'$, $aba'b'$ gehen, resp. durch:

$$dM = \frac{\Pi}{g} OVdt = \frac{\Pi'}{g} O'V'dt = \frac{\varpi}{g} \Omega Udt$$

ausgedrückt werden.

Betrachtet man nun insbesondere den Hergang der Sache bei der Versetzung der Masse $ABCD$ in die Lage $A'B'C'D'$, so wird die von den Druckkräften P und P' in dem Zeitelemente dt hervorgebrachte Quantität Wirkung oder Arbeit wieder ausgedrückt durch:

$$P \cdot OVdt - P' \cdot O'V'dt.$$

Aber nach den vorhergehenden Relationen ist dieselbe offenbar in jedem Augenblicke $= o$, weil das bekannte Mariotte'sche Gesetz, wonach die Spannungen den Dichtigkeiten proportional sind, die Gleichung gibt:

$$\frac{P}{P'} = \frac{\Pi}{\Pi'}$$

Da die Quantität der Wirkung, welche der Masse durch die Druckkräfte P und P' mitgetheilt wird, in jedem Zeitelemente $= o$ ist; so folgt, daß auch die gesammte Quantität der Wirkung, welche jene Kräfte am Ende irgend einer Zeit hervorgebracht haben werden, $= o$ ist; da sich aber der Druck von einem Querschnitte zu dem anderen ändert und auf eine stetige Weise abnimmt, so wirkt er wie eine Feder, welche allmählig nachläßt und dadurch eine gewisse Quantität der Wirkung hervorbringt, welche die der äußersten beiden Druckkräfte vertreten kann.

Durch die Expansion der Gase hervorgebrachte Quantität Arbeit oder Leistung.

§. 15. Denn betrachtet man eine flüssige Masse $ABab$ (Fig. 3), so sei BB' der in dem Zeitelemente dt von der Schicht AB durchlaufene Weg, während ab in $a'b'$ übergeht. In Folge der Beständigkeit der Bewegung und der vorausgesetzten allmähligen Expansion des Gases im Innern des Gefäßes erkennt man leicht, daß die durch jene Expansion in dem Zeitelemente dt hervorgebrachte Quantität Arbeit genau gleich der ist, welche das Volumen $ABA'B'$ hervorbringen würde, wenn es von dem Drucke P des Behälters in der Schicht AB zu dem Drucke p des zusammengezogenen Querschnittes überginge und dabei das Volumen $aba'b'$ annähme. Diese Behauptung ist schon a priori einleuchtend; man kann dieselbe jedoch durch ein ähnliches Raisonnement, wie das in §. 6 angewandte, noch unzweifelhafter herausstellen, wenn man untersucht, was in einem gegebenen Augenblicke in einem Flüssigkeitsfaden $mn\alpha\alpha'\beta'\beta tm$ stattfindet, den man sich durch Normalebenen auf der Richtung seiner Axe in Schichten von gleichen Massen $mnqp$, $pqsr$, $rsut$, ... $\alpha\alpha'\beta'\beta$ zerlegt denkt. Nun sieht man, daß, wenn pq genau die Lage von mn am Ende der Zeit dt darstellt, rs die Lage von pq am Ende derselben Zeit dt, tu die von rs, ... $\alpha'\beta'$ die von $\alpha\beta$ darstellen wird, so daß jede Schicht am Ende des in Rede stehenden Zeitelementes die Stelle der folgenden eingenommen haben wird. Bei dieser gleichzeitigen Verrückung aller Schichten hat eine jede eine Wirkungsquantität entwickelt, welche der Vergrößerung ihres Volumens oder der Verminderung ihres Druckes, d. h. ihrer Expansion entspricht, und die Summe aller dieser einzelnen Wirkungsquantitäten ist genau die Wirkung, welche die ganze Masse des Fadens $mnu\alpha\beta tm$ am Ende der Zeit dt bei dem Uebergange in die Lage $pq\alpha'\beta'p$ hervorgebracht hat.

Anstatt aber diese allgemeine und gleichzeitige Verrückung der einzelnen Schichten zu betrachten, kann man annehmen, daß die obere Schicht $mnqp$ nach und nach die Stelle der zweiten, der dritten, vierten u. s. w. annehme, bis sie endlich in die der letzten Schicht $\alpha\beta\beta'\alpha'$ gelangt, und es ist klar, daß die Summe der Wirkungsquantitäten, welche sie durch ihre Expansion bei dem Uebergange in diese aufeinander folgenden Lagen hervorgebracht haben wird, genau der vorhergehenden gleich sein wird, welches auch die Art ihrer Wirkung auf die benachbarten Schichten sein mag. Um also die gesuchte Wirkung oder Arbeit zu erhalten, braucht man nur diejenige zu bestimmen, welche einer Volumen- oder Spannungsveränderung entspricht, die das Element $mnpq$ bei dem Uebergange zu dem Volumen und der Spannung von $\alpha\beta\beta'\alpha'$ erfährt. Hiernach ist auch die gesammte Quantität der Wirkung oder Arbeit, welche durch die Elasticität des ganzen Gases zwischen dem oberen Querschnitte AB des Gefäßes und dem zusammengezogenen Querschnitte ab in dem Zeitelemente dt hervorgebracht wird, genau gleich der, welche das in dem Zeitelemente dt ausströmende Massenelement $dM = \frac{\Pi}{g} OVdt = \frac{\varpi}{g} \Omega Udt$ hervorbringen würde, indem es von dem Volumen $ABB'A'$ und dem Drucke P zu dem Volumen $aa'b'b$ und dem Drucke p überginge. Dieser Beweis ist ganz allgemein und läßt sich eben so gut auf die Wirkung der Schwere auf die Schichten, auf die Aenderung der lebendigen Kraft der Schichten, wie auf die Wirkung, welche bei der Ausdehnung der elastischen Massentheilchen der Flüssigkeit entwickelt wird, anwenden, vorausgesetzt, daß die Bewegung beständig und continuirlich ist.

Jetzt läßt sich nun leicht zeigen, daß die durch die Expansion irgend eines Gases gegen die beweglichen Wände eines Behälters ausgeübte Quantität der Wirkung von der Gestalt dieses Behälters und von der Art der Expansion unabhängig ist; sobald dieselbe so langsam erfolgt, daß es erlaubt ist, die durch diese Veränderung hervorgerufenen bewegenden und Trägheitskräfte zu vernachlässigen und anzunehmen, daß die Spannung und die Temperatur in den verschiedenen Puncten des Gases oder des Behälters, nach den Principien von Mariotte und Pascal *), in jedem Augenblicke dieselben sind. Denn es seien in einem gegebenen Augenblicke der Expansion q und p das Volumen und die Spannug des Gases, $d\omega$ irgend ein Flächenelement seiner beweglichen Umhüllung, de der Raum, welchen dasselbe in normaler Richtung beschreibt, während das Volumen q in $q + dq$ übergeht; so wird die gegen das Flächenelement $d\omega$ längs des Weges de ausgeübte Quantität Wirkung offenbar durch die Größe

$$pd\omega \cdot de,$$

welche in der ganzen Ausdehnung der Umhüllung für den so lange als constant anzusehenden Druck p zu nehmen ist, ausgedrückt. Es ist aber $d\omega de$ genau das Volumenelement, welches von $d\omega$ beschrieben wird, also gleich dq, und daher:

$$p \cdot dq$$

der Ausdruck für die gegen jene Umhüllung ausgeübte Wirkung, während q um dq zunimmt. Bezeichnet man nun mit q' und p' das Volumen und die Spannung des Gases im ersten Augenblicke seiner Expansion, so hat man nach dem Principe von Mariotte:

$$p = \frac{p'q'}{q}, \text{ also } pdq = p'q' \frac{dq}{q}.$$

*) Oeuvres de B. Pascal, Tome 4, Chap. 5.

Integrirt man diesen Ausdruck von $q = q'$ bis zu einem willkührlichen Werthe von q; so erhält man für die entsprechende Wirkung oder Leistung:

$$\int_q^{q'} p dq = p'q' \int_q^{q'} \frac{dq}{q} = p'q' \log. \frac{q}{q'} = p'q' \log. \frac{p'}{p},$$

welches offenbar auch der Ausdruck für die Wirkung ist, welche irgend eine bewegende Kraft gegen die beweglichen Wände der Umhüllung ausüben müßten, um das Gas von dem Volumen q und von der Spannung p auf das Volumen q' und die Spannung p', welche dasselbe vorher besaß, wieder zurückzubringen. Die vorstehenden Logarithmen sind übrigens Neper'sche, welche man erhält, wenn man die gewöhnlichen mit 2,3026 multiplicirt, und welche man auch in einer diesem Abschnitte angehängten, von Prony entlehnten Tabelle berechnet findet.

§. 16. Kehren wir nun zu der Frage über den Ausfluß der Gase zurück, so ist nur noch zu bemerken, daß man hat:

$$p' = P, \; p = p, \; q' = ABB'A' = OVdt = \frac{gdM}{\Pi},$$

und hieraus ergibt sich für die Wirkung oder Leistung der Expansion der Masse dM, während sie von $ABB'A'$ in die Lage $abb'a'$ (Fig. 3) übergeht, der Ausdruck:

$$\frac{gdM}{\Pi} P \log. \frac{P}{p}^{k.m},$$

wovon das Doppelte an die Stelle des Gliedes $\frac{2gdM}{\Pi}(P - p)^{k.m}$ im zweiten Theile der Gleichung für die lebendigen Kräfte (§. 6) zu setzen ist, indem man bemerkt, daß man hier wegen der Continuität der Flüssigkeit hat:

$$\Pi OV = \Pi'\Omega U.$$

Vermittelst dieser einfachen Substitutionen, welche man überall da vornehmen kann, wo es erforderlich ist, findet das, was sich von der Ausströmung der tropfbaren Flüssigkeiten sagen läßt, auch auf die Gase Anwendung, ohne daß man nöthig hat, neue Auseinandersetzungen voranzuschicken.

Es folgt hieraus, daß, wenn man wieder von dem Widerstande der Gefäßwände abstrahirt, die Geschwindigkeit der Gase in der Ausflußöffnung im Allgemeinen durch die Formel:

$$U = \sqrt{\frac{2g\left(H + \frac{P}{\Pi}\log.\frac{P}{p}\right)}{1 - \frac{\varpi^2 \Omega^2}{\Pi^2 O^2}}}$$

gegeben wird.

Außerdem erinnert man sich, daß H gegen das Glied $\frac{P}{\Pi}\log.\frac{P}{p}$, besonders bei großen Spannungen, ganz vernachlässigt werden kann, wodurch in dem Falle, daß auch O im Verhältnisse zu Ω sehr groß ist, der Ausdruck für die Geschwindigkeit sich auf:

$$U = \sqrt{2g\,\frac{P}{\Pi}\,log.\,\frac{P}{p}}$$

reducirt.

Grad der Genauigkeit, welchen man durch die Anwendung der für tropfbare Flüssigkeiten entwickelten Theorie auf Gase erlangt.

§. 17. Um sich von dem Grade der Genauigkeit zu überzeugen, welchen man erreichen kann, wenn man die Gase, wie es vorhin geschehen war, wie nicht zusammendrückbare Flüssigkeiten behandelt, und um zu zeigen, bis zu welcher Grenze man diese Methode anwenden kann, wollen wir im Folgenden den Werth, welchen man unter jener Voraussetzung für die Ausflußgeschwindigkeit erhält, mit demjenigen vergleichen, welcher sich aus der strengeren Betrachtung der Expansion ergibt. Zu diesem Ende wollen wir bemerken, daß man nach einer bekannten Formel hat:

$$log.\,\frac{P}{p} = log.\left(1 + \frac{P-p}{p}\right) = \frac{P-p}{p} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{P-p}{p}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{P-p}{p}\right)^3 - \text{ꝛc.},$$

nnd daß, wenn

$$P < \tfrac{6}{5}\,p$$

ist, was bei allen Gebläsen stattfindet, wo der innere Druck den atmosphärischen niemals um $\frac{1}{5}$ überschreitet, das Glied:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{P-p}{p}\right)^2 < \tfrac{1}{50}$$

wird, und man sich damit begnügen kann,

$$log.\,\frac{P}{p} = \frac{P-p}{p}$$

zu nehmen. Die Ausflußgeschwindigkeit ist alsdann näherungsweise durch:

$$U = \sqrt{2g\,\frac{P}{\Pi}\cdot\frac{(P-p)}{p}}$$

gegeben, welcher Werth aber offenbar etwas zu groß ist, und wenn man, um denselben zu verkleinern, $\frac{p}{\Pi}$ an die Stelle von $\frac{P}{\Pi}$ setzt; so reducirt er sich auf:

$$U = \sqrt{2g\cdot\frac{(P-p)}{\Pi}},$$

der mit dem vorhin (§. 12) für die Ausflußgeschwindigkeit des Gases gefundenen übereinstimmt, indem man von der Compressibilität desselben abstrahirte und annahm, daß es mit der constanten, im Innern des Behälters herrschenden Dichtigkeit aus der Oeffnung heraustrete.

Die strenge Formel würde für den Fall, daß $P = \frac{6}{5} p$ wäre, geben

$$U = \sqrt{\frac{2gP}{\Pi} log. \tfrac{6}{5}} = \sqrt{\frac{2gP}{\Pi} \times 0{,}182322} = 0{,}427 \sqrt{\frac{2gP}{\Pi}},$$

während die letztere gibt:

$$U = \sqrt{\frac{2gP}{\Pi}} \sqrt{\tfrac{1}{6}} = 0{,}408 \sqrt{\frac{2gP}{\Pi}},$$

und hiernach betrüge der Unterschied der beiden Werthe für die Ausflußgeschwindigkeit nur $\frac{19}{427}$ oder $\frac{1}{23}$ für die Voraussetzung, daß $P = \frac{6}{5} p$ wäre, unter welcher Grenze sich alle Fälle der Anwendung auf Gebläse befinden.

Anwendung des Theorems von Thomas Simpson auf die näherungsweise Berechnung von $log. \frac{P}{p}$.

§. 18. Damit man endlich im Stande sei, den Werth des Neper'schen Logarithmus von $\frac{P}{p}$ zu berechnen, im Fall man keine Tabellen zur Hand hätte; so bemerken wir, daß, wenn man, nach dem Lehrsatze von Thomas Simpson, die Differenz zwischen P und p nur in zwei gleiche Theile theilt, man näherungsweise hat:

$$\int_p^P \frac{dp}{p} = log. \frac{P}{p} = \frac{P-p}{6}\left(\frac{1}{P} + \frac{4}{\frac{P+p}{2}} + \frac{1}{p}\right)$$

$$= \tfrac{1}{6}\left(\frac{P}{p} + \frac{8(P-p)}{P+p} - \frac{P}{p}\right),$$

und überall, wo das Verhältniß von P zu p nicht 4 oder 5 überschreitet, was selbst bei Dampfmaschinen nur selten eintritt, ergibt diese Rechnung den Werth von $log. \frac{P}{p}$ wenigstens bis auf $\frac{1}{26}$ genau, womit man sich in der Praxis begnügen kann.

Wirkungen der Contraction des flüssigen Strahles.

§. 19. Die vorstehende Theorie hat uns in den Stand gesetzt, die mittlere Ausflußgeschwindigkeit in dem Querschnitte ab des Strahles (Fig. 1) zu bestimmen, wenn man diesen Querschnitt kennt. Hier nun zeigt sich der Einfluß der Contraction, einer Erscheinung, deren Existenz wir früher bloß angedeutet haben und welche jetzt näher betrachtet werden muß. In Folge des Andringens der inneren Flüssigkeitsfäden gegen die Oeffnung zieht sich der Strahl nach seinem Durchgange durch dieselbe bis auf eine gewisse Entfernung zusammen, welche für die kleinen kreisförmigen Oeffnungen ungefähr die Länge eines Durchmessers und für die großen derartigen Oeffnungen einen halben Durchmesser der Mündung beträgt. An dieser Stelle, wo der Parallelismus der Fäden sich ziemlich genau wieder herstellt, haben wir den Querschnitt *ab* angenommen, der hiernach also etwas kleiner ist, als die in der Wand des Gefäßes wirklich angebrachte Oeffnung; außerdem ist auch die Höhe des Spiegels über *ab* etwas größer, als die der Oeffnung entsprechende.

Einige Schriftsteller haben das Verhältniß des zusammengezogenen Querschnittes *ab* des Strahles zu der Oeffnung direct zu bestimmen gesucht und so den Contractionscoefficienten, d. i. die Zahl gefunden, mit welcher die Fläche der Ausflußöffnung zu multipliciren ist, um die Fläche des Querschnittes der größten Contraction zu erhalten. Dieselben haben dafür ein Mittel 0,64 für die kreisförmigen Oeffnungen von 3 bis 8 Centimeter Durchmesser gefunden. Indem sie alsdann für die Geschwindigkeit den Werth $\sqrt{2gH}$ nahmen, den die Theorie ergibt, leiteten sie daraus die sogenannte Ausflußmenge ab, welche nun mit der Erfahrung genau hätte übereinstimmen müssen, wenn jene Geschwindigkeit nicht selbst von der wirklichen abgewichen wäre. Man überzeugte sich jedoch bald, und Daniel Bernouilli war der erste, der diese Bemerkung machte, daß die so erhaltenen Resultate im Allgemeinen etwas beträchtlicher waren, als die, welche die Versuche lieferten, und man fand, daß für die oben erwähnten Oeffnungen die Fläche, mit welcher man $\sqrt{2gH}$ multipliciren müsse, um die Ausflußmenge zu erhalten, nicht 0,64 von der der Oeffnung sei, wie dies directe Messungen ergeben hatten, sondern durchschnittlich nur 0,62, woraus hervorging, daß die Geschwindigkeit auf $\frac{0,62}{0,64} = 0,97$ ihres obigen Werthes zu reduciren sei, ein Umstand, den man anfänglich der Reibung der Flüssigkeit an den Wandungen der Oeffnung zuschrieb.

Man hatte in der That für diese Annahme um so mehr Grund, da man sah, daß die kreisförmigen Oeffnungen unter sonst gleichen Umständen größere Ausflußmengen gaben, als die quadratischen oder rechteckigen; da jedoch diese Reduction der Geschwindigkeit voraussetzt, daß sich die lebendige Kraft oder der hydrostatische Druck H, welcher dieselbe erzeugt, auf $(0,97)^2$ oder 0,94 seines Werthes reducire, was die Erfahrung bei aufwärts springenden Strahlen, die sich ziemlich genau zu der ganzen Höhe des Gefälles erheben, nicht bestätigt; so sieht man sich genöthigt, die vorhin erwähnte Aenderung der Geschwindigkeit aufzugeben und die obige Differenz den Irrthümern, welche bei der an und für sich sehr schwierigen Messung des contrahirten Querschnitts des Strahles, dessen wahre Lage nicht einmal leicht zu entdecken ist, vorgefallen sein können, und besonders dem Umstande zuzuschreiben, daß die Theilchen der Flüssigkeit auch in jenem Querschnitte noch ungleiche und divergente Geschwindigkeiten haben; denn eine nothwendige Folge dieser Ungleichheit in den Geschwindigkeiten ist, daß man die lebendige Kraft in jenem Querschnitte unter ihrem wahren Werthe schätzt. Es läßt sich in der That leicht zeigen, daß die Summen der lebendigen Kräfte, welche den wirklichen und ungleichen Geschwindigkeiten zukommt, nothwendig diejenige übersteigt, welche der aus der Hypothese des Parallelismus der Fäden sich ergebenden mittleren Geschwindigkeit oder mittleren Druckhöhe entspricht.

Bidone, ein gelehrter italienischer Mathematiker, behauptet in einer Abhandlung, welche kürzlich unter denen der Academie von Turin (1829) erschienen ist, daß die Fläche des zusammengezogenen Querschnittes zu der Fläche der Ausflußöffnung in dem unveränderlichen Verhältnisse $= 0{,}67$ stehe, wodurch die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in den gewöhnlichen Fällen in jenem Querschnitte auf $\frac{0{,}62}{0{,}67} = 0{,}925$ des theoretischen Werthes von $\sqrt{2gH}$ reducirt und angenommen werden müßte, daß die lebendige Kraft oder die erzeugende Druckhöhe selbst nur $(0{,}925)^2 = 0{,}856$ ihres Werthes betrage. Diese Folgerungen sind um so weniger zulässig, als die theoretischen Betrachtungen von Bidone selbst bestritten werden können und nur auf eine einzige, im zweiten Bande der **Hydrodynamique** von Bossut, Seite 13 u. 14, §. 322 und folgg. der Ausgabe von 1771, mitgetheilte Beobachtung gestützt sind, eine Beobachtung, welche den Messungen von Strahlen durch Borda, Michelotti, Venturi, Eytelwein, Hachette und Bossut selbst widerspricht. Der Letztere fand für eine quadratische Oeffnung von 35 Millimeter Breite nur das Verhältniß 0,642 zwischen den Flächen des zusammengezogenen Querschnittes und der Ausflußöffnung, welcher Werth dem Durchschnittswerthe von den durch die übrigen Schriftsteller ermittelten ziemlich genau entspricht.

Wenn übrigens diese Versuche für kleine quadratische und kreisförmige Oeffnungen, die selten fünf Centimeter in der Breite oder im Durchmesser überschritten haben, im Allgemeinen einen Contractionscoefficienten von nahe 0,66 ergeben haben; so gibt es andere, wie der von Brunacci, Poncelet und Lesbros, für quadratische und kreisförmige Oeffnungen von $0^m{,}20$ Breite oder Durchmesser, welche sich von jenen merklich entfernen, indem sie nur auf 0,563 für die ersteren und höchstens auf 0,602 oder 0,608 für die zweiten steigen.

Formel für die Ausflußmenge.

§. 20. Was es nun auch immer mit diesen verschiedenen Betrachtungen für ein Bewenden haben möge, es geht nichts destoweniger daraus hervor, daß die Bestimmung der Ausflußmenge der Oeffnungen durch die Schätzung der Dimensionen des zusammengezogenen Strahles ein sehr unvollkommenes Mittel ist, welches in allen Fällen, wo man mit kleinen Oeffnungen zu thun hat, um so mehr zu großen Irrthümern führen kann, als das Verhältniß der Fläche des zusammengezogenen Querschnittes zu der der Oeffnungen und der Zwischenraum zwischen beiden nicht unveränderlich sind, und es überhaupt, besonders bei den rechteckigen Oeffnungen, nicht immer eigentliche Querschnitte der größten Contraction gibt. Denn bei diesen Oeffnungen liegt die größte Zusammenziehung des Strahles in der Richtung der langen Seiten nicht in derselben Entfernung, wie die größte Zusammenziehung in der Richtung der kurzen Seiten, die Flüssigkeitsfäden behalten daselbst immer eine ungleiche und divergente oder convergente Bewegung, so daß die Hypothese des Parallelismus der Schichten (§. 3) hier nicht als Näherungsmethode zulässig ist, um die Anwendung des Principes der lebendigen Kräfte auf verschiedene Untersuchungen über die Bewegung der Flüssigkeiten zu erleichtern. Aus diesem Grunde hat man einen anderen, einfacheren und directeren Weg zur Bestimmung der Wirkungen der Contraction auf die Ausflußmenge der Oeffnungen eingeschlagen, indem man nach der Methode von Daniel Bernouilli für jeden Fall das Verhältniß der wirklichen Ausflußmenge zu der theoretischen oder natürlichen sucht, und die letztere durch die Torricelli'sche Formel:

$$A\sqrt{2gH}$$

dargestellt denkt, worin A die Fläche der wirklichen Ausflußöffnung und H die Druckhöhe der Flüssigkeit über dem Mittelpunkte dieser Oeffnung, welche hier im Verhältniß zu H als sehr klein angenommen wird, bezeichnet. Nennt man daher Q das Volumen der wirklichen Ausflußmenge, m sein Verhältniß zu dem, welches die Berechnung von $A\sqrt{2gH}$ ergibt; so hat man die Formel:

$$Q = mA\sqrt{2gH},$$

worin m nach den weiter unten folgenden Bemerkungen veränderliche Werthe annimmt, die sich hauptsächlich auf die Reduction der Fläche A der Oeffnung beziehen, die man jedoch auch als Correctionsmittel für den Werth von $\sqrt{2gH}$ betrachten kann, indem dieser Werth, welchen man für die wahre mittlere Geschwindigkeit in dem Querschnitte der stärksten Contraction substituirt, der letzteren nur in den Fällen nahezu gleich ist, wo die Bewegung der Flüssigkeit durch nichts, weder außerhalb noch innerhalb des Gefäßes gehindert wird.

Zu dem Ende hat man nun, um allen Einfluß der Wände, welche die Oeffnung begrenzen, zu vermeiden und um den Ausfluß für verschiedene Oeffnungen in gleiche Umstände zu versetzen, bei den meisten Versuchen die Oeffnungen in einer dünnen Metallplatte angebracht, deren Ränder dergestalt zugeschärft waren, daß der Strahl bei seinem Durchgange die Seiten nur an den Kanten berührte, und dies ist es, was man den Ausfluß durch eine dünne Wand genannt hat. Außerdem ereignet es sich in der Praxis sehr häufig, daß sich der Strahl von den Wänden, obgleich sie eine gewisse Dicke haben, ablöst, wie wenn der Ausfluß durch eine dünne Wand erfolgte. Dieses findet namentlich dann immer statt, wenn die Dicke der Wand die kleinste Dimension der Oeffnung weder nach der Höhe, noch nach der Breite überschreitet.

Einfluß der Gestalt der Wände auf die Contraction des Strahles.

§. 21. Ehe wir die Resultate der Erfahrung mittheilen, wollen wir durch eine nähere Betrachtung einiger Figuren den Einfluß der Gestalt der Wände des Gefäßes auf die Größe der Contraction des Flüssigkeitsstrahles zeigen, welche nach den Beobachtungen von Hachette und anderen Physikern sehr wenig von der Form des Umfanges, wofern derselbe keine einspringenden Winkel darbietet, abzuhängen scheint.

Die Figuren 5 und 6 geben eine Idee von der Art und Weise, wie die Flüssigkeitsfäden von allen Seiten gegen die Oeffnung convergiren, wenn dieselbe in einer dünnen und ebenen Wand und in einiger

Entfernung von den verticalen Seiten, oder dem Boden des Behälters angebracht ist. Auf diesen Fall beziehen sich die meisten Versuche über die Contraction der Strahlen, und man hat dafür das oben (§. 19) erwähnte mittlere Verhältniß 0,64 zwischen den Flächen des zusammengezogenen Querschnittes und der Oeffnung gefunden.

Die Figur 7 zeigt, daß, wenn die Wand, in der sich die Oeffnung befindet, nach innen concav ist, die Zahl der Flüssigkeitsfäden, welche gegen die Oeffnung convergiren können, geringer sein wird, als für eine ebene Wand, und daß die Contraction nicht ganz so stark sein kann, als bei den Figuren 5 und 6, was auch durch die Erfahrung bestätigt wird. In dem Falle, wo die Wand genau die Gestalt (Fig. 8) hätte, welche der flüssige Strahl anzunehmen strebt, würde die Contraction die kleinstmögliche oder null sein, so daß die Fäden in nahezu parallelen Richtungen durch die Oeffnung gingen.

Dagegen ersieht man aus der Figur 9, daß, wenn die Wand nach innen convex ist, eine viel größere Anzahl von flüssigen Fäden gegen die Oeffnung anströmen kann, als bei den Figuren 5 und 6, und daß die Contraction in diesem Falle bedeutender sein wird, als in den letzteren.

Endlich ist aus der Figur 10 ersichtlich, daß die Contraction am größten sein wird, wenn der Ausfluß durch ein Röhrenstück erfolgt, welches in das Innere des Behälters tritt und von dessen Wänden der flüssige Strahl sich überall abzulösen strebt. Borda hat durch theoretische Betrachtungen gefunden, daß sich die Fläche des zusammengezogenen Querschnittes alsdann auf die Hälfte von der der Oeffnung reduciren müsse. Dieses Resultat findet sich durch die eigenen Versuche dieses Physikers und durch die von Venturi bestätigt, so daß man annehmen kann, daß der Contractionscoefficient in allen möglichen Fällen zwischen den Werthen 1 und $\frac{1}{2}$ liegt, welche sich resp. auf die Figuren 8 und 10 beziehen.

Erfahrungsresultate über die Ausflußmenge durch kleine Oeffnungen in dünnen Wänden.

§. 22. Was nun die Resultate der Versuche in Beziehung auf die Bestimmung des Factors m (§. 20) betrifft, welchen man zuweilen uneigentlich den Contractionscoefficienten nennt (da er sich doch gleichzeitig mit auf die Correction der mittleren Geschwindigkeit im kleinsten Querschnitte des Strahles bezieht, und welchen wir einfach durch den Ausdruck Ausflußcoefficient bezeichnen wollen; so betreffen dieselben hauptsächlich die quadratischen oder kreisförmigen Oeffnungen unter $0^m,10$ Seitenlänge oder Durchmesser bei meistens sehr bedeutenden Druckhöhen.

Unter diesen Resultaten muß man zuvörderst diejenigen unterscheiden, welche von Newton, Mariotte, Daniel Bernouilli und Hachette für sehr kleine Oeffnungen von einem Durchmesser zwischen $0^m,001$ und 0,015 erhalten sind. Diese Resultate haben gelehrt, daß selbst unter den stärksten Druckhöhen der Coefficient m zwischen 0,68 und 0,74 oder 0,78 liegt. Bossut hat zwar für kreisförmige Oeffnungen von etwa $0^m,013$ Durchmesser bei Druckhöhen, welche zwischen dem 96- und 280fachen Durchmesser varirt haben, den Coefficienten m ungefähr gleich $0^m,622$ gefunden; man darf aber dessen ungeachtet bei den sehr kleinen, hier in Rede stehenden Oeffnungen für den Coefficienten m im Allgemeinen keinen Werth annehmen, welcher von 0,70 merklich abweicht.

Hierauf folgen die vielfachen Versuche, welche von Bossut, Michelotti, Venturi, Eytelwein, Hachette, d'Aubuisson &c. mit kreisförmigen Oeffnungen von $0^m,02$ bis $0^m,16$ Durchmesser und mit quadratischen oder rechteckigen von $0^m,02$ bis $0^m,08$ Seitenlänge angestellt sind und bei sehr bedeutenden Druckhöhen für den Coefficienten m Werthe ergeben haben, die zwar veränderlich, aber dennoch zwischen 0,60 und 0,63 geblieben sind, so daß der allgemeine Durchschnittswerth als nur sehr wenig von 0,615 abweichend zu betrachten ist, ohne daß man ein nothwendiges Gesetz in jenen Variationen bemerken könnte.

Jedoch stimmen die Autoren alle in der Annahme überein, daß der Coefficient m von den schwächeren Druckhöhen zu den stärkeren, welche zwischen der 10-, 200- oder 300fachen Weite der Oeffnung liegen, allmählig abnehme. Dieses beweisen die Versuche mit dem sogenannten Wasserzoll, bei welchen die Ausflußmenge durch eine verticale kreisförmige Oeffnung in dünner Wand von 1 Zoll oder $0^m,027$ Durchmesser bei einer Druckhöhe von nur 1 Linie oder $0^m,00225$ über dem Scheitel der Oeffnung beobachtet wird. Für eine solche Oeffnung hat Mariotte $m = 0,665$, Bossut $m = 0,650$ und Hachette $m = 0,690$ gefunden, was keinen Zweifel über die Zunahme des Coefficienten m für sehr geringe Druckhöhen übrig läßt. Da aber nur ein einziger Versuch von Borda über den Ausfluß durch dieselbe Oeffnung bei einer Druckhöhe von dem 10fachen Durchmesser angestellt ist; so kann man über das Gesetz der in Rede stehenden Abnahme für größere Druckhöhen nichts Bestimmtes behaupten, zumal da dieses Gesetz, wie wir später bei der Mittheilung der Versuche von Poncelet und Lesbros über solche Oeffnungen, wie man sie in der Praxis bei Maschinenwerken zu betrachten hat, sehen werden, sehr verwickelt zu sein scheint. Eine Zusammenstellung der Resultate aus den Versuchen von Borda, Bossut und Michelotti über Oeffnungen von 1 Zoll Durchmesser ergibt übrigens näherungsweise:

Druckhöhen in Durchmessern der Oeffnung	$\frac{1}{12}$	10	48	81	108	141
Entsprechende Werthe von m	0,65	0,623	0,619	0,618	0,617	0,616.

Man muß sich erinnern, wenn man diese Resultate in der Praxis anwenden will, daß dieselben nur Oeffnungen angehören, welche in einer ebenen und dünnen Wand eines großen Behälters angebracht und von den Seitenwänden ganz isolirt sind, so daß man annehmen kann, daß die Contraction vollständig erfolge, wie man der Kürze wegen gewöhnlich sagt. Uebrigens kann diese Wand horizontal, vertical oder gegen den Horizont geneigt sein; sie kann sogar eine gewisse Dicke haben, wofern sich nur der flüssige Strahl, nach der obigen Bemerkung (§. 20), vollständig von derselben absondert und nur die inneren, den Behältern angehörigen Kanten berührt, was, wie schon erwähnt, im Allgemeinen immer dann stattfindet, wenn diese Dicke nicht mehr beträgt, als den 1 bis $1\frac{1}{2}$ fachen Abstand der gegenüberliegenden und nächsten Seiten der Oeffnung.

Ausfluß durch Ansatzröhren.

§. 23. Was den Fall in Fig. 11 betrifft, wo die Oeffnung durch die Dicke der Wände gewissermaßen verlängert wird und eine Röhre bildet, so daß das Wasser sich jenseits der inneren Oeffnung an die Wände dieser Röhren legt und derselben genau folgt, indem es den ganzen Raum dieser Röhre, welche man Ansatzröhre nennt, ausfüllt; so zeigt die Erfahrung, daß der Ausfluß, der alsdann mit voller Röhre erfolgt, so sehr geändert wird, daß man bei cylindrischen Röhren, deren Durchmesser gleich dem der Oeffnung ist und deren Länge zwischen dem $1\frac{1}{2}$ und 3fachen Durchmesser derselben liegt, für den Ausflußcoefficienten 0,815 oder 0,820 findet, sobald der Ausfluß mit voller Röhre erfolgt, während derselbe für eine solche Oeffnung in einer dünnen Wand nur den Werth von etwa 0,61 haben würde. Dieses Resultat kann als der mittlere Werth aus der geringen Zahl von Versuchen über diesen Gegenstand von Bossut, Michelotti, Venturi, Poleni, Prony, Hachette und Eytelwein angesehen werden. Dasselbe variirt jedoch mit der Gestalt der Ansatzröhren und wird etwa 0,96 für die, welche sich der natürlichen Form des Strahles am meisten nähern (Fig. 12), und 0,90 für die pyramidalen oder conischen Ansatzröhren (Fig. 13), deren kleinste Oeffnung von der inneren Oeffnung des Behälters um die $1\frac{1}{2}$ bis 3fache Breite der letzteren absteht und zum Durchmesser oder zu den Seiten resp. 0,80 von denen der inneren Oeffnung hat.

Hinsichtlich dieser letzteren Ansatzröhren muß bemerkt werden, daß die vorstehenden Coefficienten sich nur auf die äußere oder kleinste Oeffnung beziehen, deren Fläche in der Formel $Q = mA\sqrt{2gH}$ für den Werth von A genommen werden muß.

Die Vergrößerung der Ausflußmenge und des Coefficienten m in den letzteren Fällen erklärt sich dadurch, daß das Wasser in nahezu parallelen Fäden aus der äußeren Oeffnung tritt und folglich nur eine sehr geringe Contraction erleidet, welche man bei den cylindrischen Ansatzröhren sogar als ganz verschwindend annehmen kann, so daß die Ausflußmenge in diesem Falle eigentlich genau gleich der sein müßte, welche die Formel $A\sqrt{2gH}$ ohne den Coefficienten m ergibt. Die beobachtete Differenz kann hier offenbar nur von dem Widerstande herrühren, welchen die Theilchen der Flüssigkeit bei ihrer Bewegung im Innern der Röhre erfahren, und besonders von den Verlusten an lebendiger Kraft, welche durch die inneren Wirbel hervorgebracht werden, die aus dem Zusammentreffen der Flüssigkeitstheilchen mit den Wänden entstehen, nachdem dieselben durch den Querschnitt gegangen sind, in welchem sie sich nach dem Durchgange durch die innere Oeffnung zusammenziehen. Die Versuche über emporspringende Strahlen mit Ansatzröhren beweisen in der That, daß es wirklich die Geschwindigkeit oder die lebendige Kraft ist, welche hier geändert wird; denn diese

Strahlen erheben sich im Allgemeinen nur auf eine Höhe von $(0{,}82)^2 = 0{,}67$ des Gefälles H, wodurch ein Verlust an Gefälle von $\frac{1}{3}$ der Druckhöhe oder der Wirkung der Schwere angezeigt wird.

Allgemeine Bemerkung. Alle diese Resultate, sowohl für die verschiedenen Ansatzröhren, wie für die Oeffnungen in dünnen Wänden, finden ebenso gut auf die eigentlichen oder tropfbaren Flüssigkeiten, wie das Wasser, als auch auf die verschiedenartigen Gase Anwendung, wie man wenigstens aus der Uebereinstimmung der schönen Versuche von Girard und d'Aubuisson in Frankreich mit den sehr sorgfältig ausgeführten Versuchen von Lagerhjelm in Schweden schließen kann.

Einfluß der plötzlichen Verengungen im Innern der Gefäße oder der Leitungsröhren.

§. 24. Welches übrigens auch die Ursachen sein mögen, die zu der Erscheinung des Ausflusses mit vollen Röhren Veranlassung geben, und wenn man das Factum ihrer Bildung auch nur unter gewissen Umständen zugesteht; so kann man doch die Resultate der Erfahrung erklären, wenn man den Verlust an lebendiger Kraft berücksichtigt, welcher durch das Zusammentreffen der Flüssigkeit mit den Wänden herbeigeführt wird, und welcher stets eintritt, sobald sich im Innern der Gefäße oder Leitungsröhren Verengungen befinden, welche die Flüssigkeit nöthigen, sich mit einer größeren Geschwindigkeit zu bewegen, als die ist, welche sie kurz vor dem von den Verengungen herrührenden zusammengezogenen Querschnitte, d. i. in denjenigen Theilen des Gefäßes hatte, wo die Strömung wieder permanent geworden und als in parallelen Schichten vor sich gehend betrachtet werden kann.

Um zu zeigen, wie man im Allgemeinen die Verluste an lebendiger Kraft in Betracht ziehen kann, welche in allen solchen Fällen eintreten und welche anfangs von Bernouilli und Borda unrichtig bestimmt waren, bis Navier ihren Ausdruck mit dem glücklichsten Erfolge verbesserte; so sei

- U' die mittlere Geschwindigkeit der Flüssigkeit beim Durchgange durch die Verengung oder in dem zusammengezogenen Querschnitte des Strahles,
- dM die Masse einer ihrer unendlich dünnen Schichten,
- u die Geschwindigkeit der flüssigen Masse vor dieser Schicht, wobei angenommen wird, daß die Flüssigkeit an dieser Stelle eine parallele und gleichförmige Bewegung wieder angenommen habe, und:
- M' der gesammte Werth dieser flüssigen Masse.

Der Verlauf der Sache ist hier ganz demjenigen analog, wo ein weicher Körper von der Masse dM, welcher sich mit der Geschwindigkeit U' bewegt, auf einen ähnlichen Körper von der Masse M' trifft, welcher sich mit der Geschwindigkeit u bewegt; diese Körper vereinigen sich miteinander, nachdem sie sich gegenseitig unter irgend einer Veränderung ihrer Form comprimirt haben, und setzen dann ihre Bewegung mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit fort, die hier von u nicht verschieden ist, sobald die in dem Zeitelemente dt durch die Oeffnung zufließende Masse dM im Verhältnisse zu M' unendlich klein ist. Demnach ist auch das Maaß für den Verlust an lebendiger Kraft, welcher aus der Aenderung der Geschwindigkeit hervorgeht und hauptsächlich durch die inneren Wirbel und Widerstände der Flüssigkeit erzeugt wird,

$$= dM\,(U' - u)^2.$$

Dieser Werth bezieht sich übrigens auf jedes Zeitelement und würde

$$= M\,(U' - u)^2$$

werden, wenn es sich darum handelte, den Verlust an lebendiger Kraft während der Zeiteinheit zu bestimmen.

Untersucht man nun den Hergang in einem Behälter (Fig. 14), welcher dem früher betrachteten ähnlich ist und bei welchem man für gewisse Querschnitte AB, $A'B'$ ꝛc. die Hypothese der parallelen Schichten annehmen kann, der aber im Inneren eine plötzliche Einengung $a'b'$ darbietet; so läßt sich leicht der Ausdruck für den von diesem Umstande herrührenden Verlust an lebendiger Kraft bestimmen. Es seien:

O, Ω die Flächen der Querschnitte AB, $A'B'$,
ω, ω' die Flächen der Oeffnungen ab, $a'b'$,
V, u die Geschwindigkeiten in AB, $A'B'$,
U, U' die Geschwindigkeiten in ab, $a'b'$,
P, p der Druck gegen AB, ab,
H die ganze Höhe des Spiegels AB über dem Mittelpuncte der Oeffnung ab,
m, m' die Ausflußcoefficienten für die Oeffnungen ab, $a'b'$, welche als bekannt vorausgesetzt werden,
Π das Gewicht der Volumeneinheit der Flüssigkeit,
dM das während der Zeit dt ausgeflossene Massenelement;

so hat man wegen der Continuität der Flüssigkeit:

$$V = \frac{m\omega U}{O},\quad u = \frac{m\omega U}{\Omega},\quad U' = \frac{m\omega U}{m'\omega'}.$$

Schließt man nun hier wie früher, so findet man für die von der Schwere auf die in der Zeit dt ausgeflossene Masse dM hervorgebrachte Quantität der Wirkung oder Arbeit:

$$gdMH^{k.m},$$

für die der Druckkräfte P und p:

$$gdM\,\frac{(P-p)}{\Pi}^{k.m}$$

und endlich für den Zuwachs der lebendigen Kraft der Masse dM bei ihrem Uebergange aus AB in ab:

$$dM\,(U^2 - V^2) = dM \cdot U^2\left(1 - \frac{m^2\omega^2}{O^2}\right),$$

wozu offenbar noch der Verlust an lebendiger Kraft, welcher durch die Verengung bei $a'b'$ erzeugt wird und nach dem Vorhergehenden gleich:

$$dM\,(U' - u)^2 = dM \cdot m^2\omega^2 U^2\left(\frac{1}{m'\omega'} - \frac{1}{\Omega}\right)^2$$

ist, addirt werden muß.

Hiernach gibt die Gleichung der lebendigen Kräfte:

$$dMU^2\left(1-\frac{m^2\omega^2}{O^2}\right)+dMm^2\omega^2U^2\left(\frac{1}{m'\omega'}-\frac{1}{\Omega}\right)^2$$
$$=2gdMH+2gdM\frac{P-p}{\Pi},$$

und wenn man mit dM dividirt:

$$U^2\left[1-\frac{m^2\omega^2}{O^2}+m^2\omega^2\left(\frac{1}{m'\omega'}-\frac{1}{\Omega}\right)^2\right]=2gH+2g\frac{P-p}{\Pi},$$

woraus man die mittlere Ausflußgeschwindigkeit U durch ab und alsdann die Ausflußmenge:

$$Q=m\omega U$$

für die Zeiteinheit ableiten kann.

Ausfluß in die freie Luft durch eine Oeffnung, welche im Verhältniß zu den Querschnitten des Gefäßes sehr klein ist.

§. 25. Wenn es sich um den Ausfluß des Wassers in die freie Luft handelt, und gleichzeitig die obere Fläche O des Behälters im Verhältnisse zu der ω der Oeffnung ab sehr groß ist; so reducirt sich obige Gleichung auf folgende:

$$U^2\left[1-m^2\omega^2\left(\frac{1}{m'\omega'}-\frac{1}{\Omega}\right)^2\right]=2gH,$$

woraus folgt:

$$U=\sqrt{\frac{2gH}{1+m^2\omega^2\left(\frac{1}{m'\omega'}-\frac{1}{\Omega}\right)^2}}.$$

§. 26. In dem Falle, wo $\omega'=\Omega$ ist, was z. B. der Fall ist, wenn eine prismatische oder cylindrische Röhre $a'b'CD$ (Fig. 15) die Communication des Behälters AB mit der Oeffnung ab vermittelt, wird der Ausdruck für die Geschwindigkeit in den vorhergehenden Voraussetzungen:

$$U=\sqrt{\frac{2gH}{1+\frac{m^2\omega^2}{\Omega^2}\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2}}.$$

Ausfluß durch eine Ansatzröhre bei gänzlicher Füllung derselben.

§. 27. Ist endlich die Oeffnung ab gleich dem Querschnitte der Röhre (Fig. 16), und folgen die Fäden der Flüssigkeit den Wänden der Röhre, indem sie parallel, ohne sichtbare Contraction heraustreten; so hat man den Fall der in §. 23 erwähnten Ansatzröhren, wenn der Ausfluß mit voller Anfüllung der Röhre erfolgt. Unter diesen Umständen ist:

$$\omega=\Omega,\quad m=1,$$

und die vorhin gefundene Ausflußgeschwindigkeit reducirt sich auf:

$$U = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2}}.$$

Der vorliegende Fall ist einer von denen, welche die auf die Hypothese der parallelen Schichten gegründete Theorie am besten bestätigen. Denn der Ausflußcoefficient ist alsdann nach §. 23 erfahrungsmäßig gleich 0,82 unter solchen Umständen, wo er für die Oeffnung in einer dünnen Wand gleich 0,61 gewesen wäre, und in der That findet man, wenn man in der vorstehenden Formel $m' = 0{,}61$ setzt:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2}} = 0{,}84,$$

und mithin:

$$U = 0{,}84\sqrt{2gH}.$$

Wenn die Ausflußöffnung ω, wie eben angenommen wurde, gleich Ω oder gleich dem Querschnitte der Röhre ist; so sieht man, daß sich die mittlere Ausflußgeschwindigkeit in dem Verhältnisse von 1 zu 0,84 vermindert. Da aber die mittlere Ausflußmenge gleich:

$$\omega U = 0{,}84 \cdot \omega \sqrt{2gH}$$

wird, so folgt, daß dieselbe doch größer ist, als sie es für die Oeffnung $a'b'$ ohne Ansatzröhre sein würde, weil diese letztere durch die Formel:

$$0{,}61 \cdot \omega \sqrt{2gH},$$

wie man früher (§. 20) gesehen hat, erhalten werden würde.

Für den Fall einer Ansatzröhre ergibt also die Erfahrung für den Ausflußcoefficienten den Werth 0,82 und die Theorie den Werth 0,84. Der unbedeutende Unterschied zwischen diesen beiden Zahlen oder der Ueberschuß der durch die Theorie gegebenen über die andere kann nach Navier *) dem Widerstande der Wände zugeschrieben werden, welcher bisher außer Acht gelassen ist.

Einfluß einer plötzlichen Erweiterung des Gefäßes.

§. 28. Aehnliche Erscheinungen zeigen sich bei der Bewegung einer Flüssigkeit, die sich plötzlich aus einem kleineren Querschnitte eines Gefäßes in einen viel größeren ergießt; denn indem die Flüssigkeit aus dem Theile $MNmn$ (Fig. 17) in den Raum $PQP'Q'$ tritt, stößt sie auf eine flüssige Masse, welche sich mit einer geringeren Geschwindigkeit bewegt, vermischt sich mit derselben und geht nach einigen Wirbeln mit ihr in gemeinschaftlicher und gleichförmiger Bewegung weiter. Hieraus entsteht folglich ein leicht zu berechnender Verlust an lebendiger Kraft. Man bezeichne mit Ω und O' die Flächen der Quer-

*) Belidor: Architecture hydraulique; nouvelle édition, Tome I, p. 290 note C. K.

schnitte MN und PQ und mit u und V' die Geschwindigkeiten in diesen Querschnitten. Da die Fäden der Flüssigkeitsfäden sich parallel untereinander und zu den Wänden der Röhre MN fortbewegen, so findet in mn keine Contraction statt, und wenn man die in dem Zeitelemente dt ausströmende Flüssigkeitsmasse mit dM bezeichnet, so ist der Verlust an lebendiger Kraft nach §. 24:

$$dM\ (u - V')^2 = dM \cdot u^2 \left(1 - \frac{\Omega}{O'}\right)^2,$$

welche Größe in der Gleichung der lebendigen Kräfte den analogen Gliedern beigefügt werden muß.

Einfluß des Widerstandes der Wände.

§. 29. Wir haben bisher eine verzögernde Kraft ganz unberücksichtigt gelassen, deren Wirkung zwar in allen den Fällen, wo die Geschwindigkeit der Flüssigkeit sehr gering und ihre Querschnitte sehr groß sind, vernachlässigt werden kann, welche aber beachtet werden muß, sobald es sich um Röhren von einer in Beziehung zu ihrem Durchmesser sehr bedeutenden Länge handelt. Dieser Widerstand rührt von der Adhäsion der Flüssigkeitstheilchen an den Röhrenwänden her, und man begreift leicht, daß sich die Verzögerung der Bewegung dieser Theilchen wegen der größeren oder geringeren Zähigkeit der Flüssigkeit allmählig der ganzen Masse mittheilen und endlich die allgemeine Bewegung ändern muß, was die Erfahrung sowohl für die tropfbaren, wie für die elastischen Flüssigkeiten auch bestätigt.

Die Beobachtungen von Coulomb *), welche durch die Folgerungen, die Prony daraus gezogen hat, bestätigt sind, zeigen, daß dieser Widerstand für tropfbare Flüssigkeiten der Größe $\frac{\Pi}{g}$, worin Π das Gewicht der Volumeneinheit der Flüssigkeit bezeichnet, ferner dem benetzten Umfange $\tilde{\omega}$ der Leitungsröhre, der Länge L dieser Röhre, welche ohne plötzliche Biegungen und von constantem Querschnitte Ω angenommen wird, und endlich einer Function $\alpha u + \beta u^2$ der mittleren Geschwindigkeit u in jener Röhre proportional ist, wo α und β constante Coefficienten sind, welche von der Natur der Flüssigkeit abhängen und von der der Wände der Röhren, wenigstens für die gebräuchlichsten, unabhängig sind.

Hiernach wird der Widerstand der Wände ausgedrückt durch:

$$\frac{\Pi}{g}\,\tilde{\omega}L\,(\alpha u + \beta u^2)^{\text{kil.}},$$

und da der von irgend einer Schicht in der Richtung dieses Widerstandes in dem Zeitelemente dt durchlaufene Weg udt ist; so wird die augenblickliche Quantität der Wirkung, welche jener Widerstand hervorbringt, durch:

$$\frac{\Pi}{g}\,\tilde{\omega}L\,(\alpha u + \beta u^2)\,udt^{\text{ k. m}}$$

*) Mémoires de l'institut, 3e Vol. Sciences physiques.

ausgedrückt, welcher Ausdruck sich wegen der Relation:

$$dM = \frac{\Pi}{g}\,\Omega u dt$$

auf folgenden reducirt:

$$dM \cdot \frac{\tilde{\omega} L}{\Omega}\,(\alpha u + \beta u^2)^{k \cdot m},$$

wovon das Doppelte von dem zweiten Theile der Gleichung der lebendigen Kräfte, welche den Wirkungsquantitäten der bewegenden Kräfte entsprechen, subtrahirt werden muß.

Anwendung auf den Ausfluß durch sehr lange Röhrenleitungen.

§. 30. Wenden wir diese und die vorhergehenden Betrachtungen auf den Ausfluß einer Flüssigkeit aus einem großen Behälter $ABCD$ (Fig. 18) in einen anderen $A'B'C'D'$ an, indem wir annehmen, daß die Communication durch eine Leitungsröhre $aba'b'$ von constantem Querschnitte Ω, welche sich an beiden Behältern in kleinere Oeffnungen N die Querschnitte der Röhre endigt, vermittelt werde. Behält man alle Bezeichnungen aus den §§. 24, 28 und 29 bei und bezeichnet außerdem die Höhe des constanten Niveaus des unteren Behälters über dem Mittelpuncte der Oeffnung ab mit h; so sieht man leicht ein, daß die lebendige Kraft, welche eine Flüssigkeitsschicht dM bei ihrem Uebergange aus AB in $A'B'$ bekommt, aus der besteht, welche sie von AB bis ab verlangt, nämlich (§. 24):

$$dhU^2\left(1 - \frac{m^2\omega^2}{O}\right) + dM \cdot U^2 m^2 \omega^2 \left(\frac{1}{m'\omega'} - \frac{1}{\Omega}\right)^2,$$

weniger der, welche jene Schicht bei dem Eintritte in den unteren Behälter wieder verliert, nämlich:

$$dM \cdot U^2 \left(1 - \frac{m\omega}{O'}\right)^2.$$

Hieraus folgt, daß die Gleichung der lebendigen Kräfte für den gegenwärtigen Fall folgende ist:

$$U^2\left[1 - \frac{m^2\omega^2}{O^2} + m^2\omega^2\left(\frac{1}{m'\omega'} - \frac{1}{\Omega}\right)^2 - \left(1 - \frac{m\omega}{O'}\right)^2\right]$$
$$= 2g\,(H - h) + \frac{2g\,(P - p)}{\Pi} - \frac{2\,\tilde{\omega} L}{\Omega'}\,(\alpha u + \beta u^2),$$

wobei die Geschwindigkeiten U und u durch die Relation:

$$m\omega U = \Omega u$$

mit einander verbunden sind.

Vereinfachungen für die gewöhnlichen Wasserleitungen.

§. 31. Bei den meisten Wasserleitungen vereinfacht sich diese Formel sehr, weil die Querschnitte der beiden Behälter im Verhältnisse zu den Oeffnungen ω und ω' sehr groß sind, so daß die Brüche $\frac{\omega}{O}$ und $\frac{\omega}{O'}$ gegen die Einheit vernachlässigt werden können; außerdem hat die Röhre denselben Durchmesser, wie die Einflußöffnung $a'b'$, so daß $\omega' = \Omega$ ist und der äußere Druck ist auf beiden Seiten gleich dem der Atmosphäre; man hat daher blos:

$$U^2 \frac{m^2\omega^2}{\Omega^2}\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2 = 2g\,(H-h) - \frac{2\,\tilde{\omega}L}{\Omega}\,(\alpha u + \beta u^2),$$

und wieder:

$$m\omega U = \Omega u.$$

Ist ferner $\omega = \Omega$, so ist die Contraction beim Ausgange der Röhre Null, $m = 1$, $u = U$, und die Gleichung reducirt sich auf

$$U^2\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2 = 2g\,(H-h) - \frac{2\,\tilde{\omega}L}{\Omega}\,(\alpha U + \beta U^2),$$

wodurch die Geschwindigkeit U gegeben ist, wenn man den Höhenunterschied $H - h$ kennt.

Der Fall, wo der Ausfluß in die freie Luft erfolgt.

§. 32. Wenn die Röhre in die freie Luft mündet und die Oeffnung ω kleiner ist, als der Querschnitt Ω; so ist kein unterer Behälter weiter in Betracht zu ziehen, das Glied $U^2\left(1-\frac{m\omega}{O'}\right)^2$ (§. 30), welches den Verlust an lebendiger Kraft beim Einströmen in diesen Behälter ausdrückte, verschwindet, O' wird gleich $m\omega$, und die Gleichung reducirt sich, wenn man wieder $\omega' = \Omega$ und ω gegen O als sehr klein annimmt, auf:

$$U^2\left[1 + \frac{m^2\omega^2}{\Omega^2}\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2\right] = 2gH + \frac{2g(P-p)}{\Pi} - \frac{2\,\tilde{\omega}L}{\Omega}(\alpha u + \beta u^2).$$

Ist ferner $P = p =$ dem atmosphärischen Drucke, $\omega = \Omega$, so hat man $m = 1$, $u = U$ und die Gleichung vereinfacht sich auf:

$$U^2\left[1 + \left(\frac{1}{m'}-1\right)^2\right] = 2gH - \frac{2\,\tilde{\omega}L}{\Omega}(\alpha U + \beta U^2).$$

Bestimmung der Coefficienten α und β für die gewöhnlichen Wasserleitungen.

§. 33. Bei den meisten Wasserleitungen ist L wenigstens gleich dem 100fachen Durchmesser der Röhre und das Glied für den Widerstand der Wände wird alsdann gegen $U^2\left[1+\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2\right]$ sehr groß; man kann demnach dieses letztere Glied vernachlässigen, und wenn man für den Fall, daß ein unterer Behälter vorhanden ist, für $H - h$ blos H setzt, so reducirt sich die letzte der Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen auf:

$$gH = \frac{\tilde{\omega}L}{\Omega}(\alpha U + \beta U^2).$$

Unter dieser Form hat Prony die Formel angewandt, um mit Hülfe der Erfahrungen von Dubuat, Couplet und Bossut die Werthe von α und β zu bestimmen, und hat für diese constanten Coefficienten für Wasserleitungen

$$\alpha = 0{,}00017\,,\quad \beta = 0{,}003416$$

gefunden. Substituirt man diese Zahlen in die vorstehende Gleichung, so findet man mit einer für die Praxis hinreichenden Annäherung:

$$U = -0^m{,}025 + 53{,}38\sqrt{\frac{\Omega H}{\omega L}}\,,$$

und mithin die Ausflußmenge $Q = \Omega U$ ohne Correctionscoefficienten.

Der Fall, wo der Querschnitt der Leitungsröhre ein Kreis ist.

§. 34. Wenn der Querschnitt der Röhre kreisförmig ist, so hat man:

$$\Omega = \frac{3{,}1416\,D^2}{4}\,,\ \omega = 3{,}1416\,D\,,\ \frac{\omega'}{\Omega} = \frac{4}{D}\,,$$

wo D den Durchmesser bezeichnet, und der Werth der Geschwindigkeit wird:

$$U = -0^m{,}025 + 26{,}79\sqrt{\frac{DH}{L}}.$$

Die Ausflußmenge oder das in einer Secunde ausgeflossene Wasservolumen ist offenbar gleich:

$$\Omega U = \frac{3{,}1416\,D^2}{4}\,U.$$

Eytelwein hat die Rechnungen Prony's wieder aufgenommen und dabei das Glied $U^2\left[1 + \left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2\right]$, dessen Einfluß im Allgemeinen sehr gering ist und welches er mit $\frac{U^2}{\mu^2}$ bezeichnet, berücksichtigt, indem er $\mu = \frac{13}{16} = 0{,}8125$ nahm, was nur für den Fall Gültigkeit hat, wo die Contraction in der unteren Oeffnung, deren Coefficient m' ist, vollständig erfolgt. Unter dieser Voraussetzung findet er für das Meter als Längeneinheit:

$$\alpha = 0{,}0002193\,,\quad \beta = 0{,}0027496\,,$$

und mithin:

$$U = \frac{-L + \sqrt{L^2 + (560776\,L + 38617551\,D)\,DH}}{25{,}0754 \cdot L + 1726{,}82 \cdot D}.$$

Wenn L im Verhältniß zu D sehr groß, z. B. $= 100 \times D$ ist, was gewöhnlich stattfindet; so kann man das Glied mit D^2 gegen L^2 unter dem Wurzelzeichen vernachlässigen und der Ausdruck wird, wenn im Zähler und Nenner mit $25{,}0754\,L$ dividirt:

$$U = \frac{-0{,}03988 + \sqrt{0{,}0015904 + 891{,}84\,\frac{DH}{L}}}{1 + 68{,}865\,\frac{D}{L}}.$$

Endlich erhält man eine noch einfachere und für die Praxis hinreichend genaue Formel, wenn man das Glied αU des Widerstandes der Wände vernachlässigt. In diesem Falle hat Eytelwein durch Vergleichung der Resultate der Formel mit denen der Erfahrung gefunden, daß man

$$\beta = 0{,}00349987 \text{ oder ungefähr } \beta = 0{,}0035$$

setzen müsse, wodurch man für die Geschwindigkeit in der Leitungsröhre nach gehöriger Reduction folgenden Ausdruck erhält:

$$U = 26{,}44 \sqrt{\frac{DH}{L + 54\,D}}.$$

Ausflußmenge der Gasleitungen in dem Falle, wo sich dieselben in einer Oeffnung oder irgend einer Ansatzröhre endigen.

§. 35. Auch auf die Gasleitungen, wo der Unterschied der Druckkräfte, welche an ihren Enden wirken, ein ziemlich kleiner Bruch von der größten derselben ist (§. 17), finden die in den §§. 30, 31 und 32 aufgestellten allgemeinen Formeln ihre Anwendung; man muß aber bemerken, daß ungeachtet der Geringfügigkeit dieser Differenz die Druckhöhe $\frac{P-p}{\Pi}$ (§. 12) immer noch sehr groß ist gegen die Höhen H und h, welche dem Niveauunterschiede der äußersten Querschnitte entsprechen, so daß man von den Gliedern gH und gh, welche sich in jenen Formeln auf die Wirkung der Schwere beziehen, abstrahiren kann. Andererseits sind Girard und d'Aubuisson durch die Resultate ihrer schönen Versuche über die Ausströmung elastischer Flüssigkeiten durch Röhrenleitungen darauf geführt, den Widerstand in den Röhren blos dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional anzunehmen, wodurch das Glied mit α dieses Widerstandes Null wird und die Formeln für die Geschwindigkeit und Ausflußmenge sich sehr vereinfachen.

Betrachtet man, wie in §. 30, eine Leitungsröhre mit gleichförmigem Querschnitte, welche dazu dient, die Communication zwischen zwei großen Gasometern mit den constanten Spannkräften P und p herzustellen, nimmt man dabei an, daß sich diese Röhre in einer kleinern Oeffnung endigt und nennt wieder:

L die Länge der Leitungsröhre,
Ω und ω die Flächen des als kreisförmig angenommen Querschnitts der Röhre und der Oeffnungen,
U die Geschwindigkeit der Flüssigkeit beim Durchgange durch die Oeffnung ω unter dem Drucke p,
u die constante Geschwindigkeit in der Röhre,
m' den Contractionscoefficienten bei dem Eintritte in die Röhre,
Π die Dichtigkeit der Flüssigkeit in dem Speisebehälter,
m den Ausflußcoefficienten für die Ausflußöffnung ω der Röhre;

so hat man nach §. 32, und wenn man das auf die Schwere sich beziehende Glied $2g(H-h)$ vernachlässigt:

$$U^2\left[1 + \frac{m^2\omega^2}{\Omega^2}\left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2\right] = 2g \cdot \frac{P-p}{\Pi} - \frac{8\beta L}{D} u^2,$$

oder wegen der Relation:

$$u = \frac{m\omega U}{\Omega} = \frac{md^2 U}{D^2},$$

die Gleichung:

$$U^2\left[1 + \frac{m^2 d^4}{D^4}\left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2 + \frac{8\beta L m^2 d^4}{D^5}\right] = \frac{2g\,(P-p)}{\Pi},$$

welche unmittelbar die Geschwindigkeit U in der Ausflußöffnung, und mithin das Volumen:

$$Q = m\omega U$$

der Ausflußmenge bei der Dichtigkeit Π des oberen Behälters ergibt, wenn man darin für β seinen mittleren Werth:

$$\beta = 0{,}00315$$

setzt, welcher aus den weiter unten zu erwähnenden Versuchen abgeleitet ist.

In dieser Gleichung hat man p gleich dem äußeren atmosphärischen Drucke zu setzen, wenn der Ausfluß in die freie Luft erfolgt, $m' = 0{,}61$ oder $= 0{,}62$, wenn die Contraction für die Eintrittsöffnung in die Röhre, wie gewöhnlich, vollständig ist, $m = 0{,}61$ oder $= 0{,}62$, wenn dasselbe für die Ausflußöffnung ω stattfindet, $m = 0{,}84$, wenn die Röhre in einer cylindrischen Ansatzröhre endigt, deren Länge 2 bis 4 mal so groß ist, als der gegen den Durchmesser der Röhre selbst sehr klein angenommene Durchmesser derselben. Liegt endlich die Oeffnung ω an dem Ende einer Ansatzröhre, welche mit der Leitungsröhre durch eine zweckmäßige Krümmung verbunden ist, wie dies fast immer bei den Windleitungen, welche die Hochöfen und Frischfeuer speisen, stattfindet; so kann man nach den Erfahrungen von d'Aubuisson $m = 0{,}96$ setzen.

Der Fall, wo die Leitungsröhre an ihrer Ausmündung ganz offen ist.

§. 36. Für den besonderen Fall, wo die Leitungsröhre an ihrem Ende ganz offen ist, so daß man $\Omega = \omega$, $D = d$, $U = u$, $m = 1$ hat, reducirt sich die obige Gleichung auf:

$$U^2\left[1 + \left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2 + \frac{8\beta L}{D}\right] = \frac{2g\,(P-p)}{\Pi},$$

wenn L gegen D so groß ist, daß die Größe $1 + \left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2$ gegen $\frac{8\beta L}{D}$ vernachlässigt werden kann, was dann immer eintritt, sobald $L > 100\,D$ wird; so reducirt sich die Formel für die Ausflußgeschwindigkeit auf folgende:

$$U = \sqrt{\frac{2g\,(P-p)\,D}{8\beta L\Pi}}, \text{ woraus } Q = \Omega U = \Omega\sqrt{\frac{2g\,(P-p)\,D}{8\beta L\Pi}}$$

folgt.

Da der vorliegende Fall genau dem entspricht, für welchen Girard mit einer eisernen Leitungsröhre von $0^m{,}0158$ Durchmesser an dem Gasometer des Hospitals von St. Louis zu Paris experimentirt hat; so kann man daraus für β den mittleren Werth $\beta = 0{,}0032$ ableiten, welcher den vorhin gegebenen ein wenig überschreitet, und es scheint, daß man denselben sowohl auf das Kohlenwasserstoffgas, wie auf das ölbildende Gas und die atmosphärische Luft anwenden kann, wobei zu bemerken ist, daß sich die Dichtigkeit des ersten Gases zu der der letzteren etwa wie 0,555 : 1 verhält und die der atmosphärischen Luft wieder durch die Formel (§. 12):

$$\Pi = \frac{\Pi_0 P}{p_0 (1 + 0{,}004\, n)} = \frac{1{,}2572\, P}{1 + 0{,}004\, n}$$

gegeben wird, wo n die Temperatur in Centesimalgraden und P den Druck auf das Quadratcentimeter in Kilogr. bezeichnet.

Beziehung zwischen der Geschwindigkeit und dem Drucke in irgend einem Puncte der Röhrenleitung.

§. 37. Kehren wir zu unseren ersteren Annahmen über die Röhrenleitungen, welche sich in eine Ansatzröhre oder einer beliebigen Oeffnung, kleiner als der Querschnitt der Röhre, endigen, zurück, und bezeichnen noch mit P' den Druck in einem Puncte, welcher resp. in den nach der Richtung der Röhre gemessenen Entfernungen l und l' von der Ein- und Ausflußöffnung liegt, so daß $l + l' = L$ ist; so gibt die Gleichung für die lebendigen Kräfte (§ 35), wenn man genau beachtet, was von dem Speisebehälter bis zu dem fraglichen Puncte stattfindet:

$$u^2 + \left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2 u^2 + \frac{8\beta l u^2}{D} = U^2 \left[\frac{m^2 d^4}{D^4} + \frac{m^2 d^4}{D^4}\left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2 + 8\beta l \frac{m^2 d^4}{D^5}\right] = \frac{2g\,(P - P')}{\Pi}.$$

Betrachtet man nun ferner, was sich von diesem Puncte bis zum äußersten Ende der Röhre an der Ausflußöffnung ereignet, so erhält man:

$$U^2 - u^2 + \frac{8\beta l' u^2}{D} = U^2 \left[1 - \frac{m^2 d^4}{D^4} + 8\beta l' \frac{m^2 d^4}{D^5}\right] = 2g\, \frac{P' - p}{\Pi}.$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so ergibt sich die aus §. 35 wieder und sie können sowohl zur Berechnung der Ausflußmenge:

$$Q = \Omega u = m \omega U$$

dienen, wenn man den Druck P' kennt, wie auch zur Bestimmung der Druckunterschiede $P - P'$, $P' - p$ und mithin zu der des Druckes P', sobald man die Ausflußmenge oder die Geschwindigkeit U durch die Relation in §. 55 gefunden hat.

Besonderer Fall, wo der Druck nahe bei der Ausflußöffnung gemessen wird.

§. 38. Angenommen, man hätte den Druck P' in einem sehr nahe bei der Ausflußöffnung gelegenen Puncte direct beobachtet, so daß l' sehr klein und l fast gleich L wäre; so könnte man das Glied mit $\beta l'$

in der zweiten der obigen Gleichungen vernachlässigen, wodurch dieselben resp. in folgende übergingen:

$$\frac{m'd^4}{D^4}U^2\left[1+\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2+\frac{8\beta L}{D}\right]=2g\frac{P-P'}{\Pi}$$

und

$$U^2\left(1-\frac{m^2d^4}{D^4}\right)=2g\frac{P'-p}{\Pi},$$

und hierzu kann man nach der früheren Bemerkung noch die Gleichung:

$$U^2\left[1+\frac{m^2d^4}{D^4}\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2+8\beta L\frac{m^2d^4}{D^5}\right]=2g\frac{P-p}{\Pi}$$

hinzufügen, welche sich auf den Behälter und die Ausflußöffnung bezieht und durch Addition der beiden vorhergehenden Gleichungen erhalten wird.

Substitution der Manometerhöhen für die Spannungen in die Formeln.

§. 39. Mündete die Ausflußöffnung in die freie Luft, so wäre p gleich dem äußeren barometrischen Drucke im Augenblicke des Experiments, und wenn man mit H und H' die Manometerhöhen bezeichnet, welche gleichzeitig den Ueberschuß der Spannungen P und P' über den Druck p messen; so hat man für das Quecksilbermanometer:

$$P-p=1^k,3598\,H,\quad P'-p=1^k,3598H',$$

woraus folgt:

$$P-P'=1^k,3598\,(H-H'),$$

und für das Wassermanometer:

$$P-p=0^k,1\,H,\quad P'-p=0^k,1\,H',$$

woraus folgt:

$$P-P'=0^k,1\,(H-H').$$

Die Druckkräfte p, P und P' beziehen sich hierbei auf das Quadratcentimeter, welches zur Flächeneinheit angenommen ist, und die Höhen H, H' sind nach Metern gemessen. Substituirt man also diese Werthe von $P-p$, $P'-p$ und $P-P'$, sowie den Werth der Dichtigkeit Π (§. 35), welche sich auf den Speisebehälter bezieht, in die obigen Formeln; so verwandeln sich dieselben in andere, denen die Manometerhöhen H und H' zu Grunde liegen.

Gesetz zwischen den Manometerhöhen in den verschiedenen Puncten der Röhrenleitungen.

§. 40. Eines der bemerkenswerthesten Resultate, welche d'Aubuisson aus seinen zahlreichen Versuchen über die Ausströmung der Luft durch sehr lange Röhrenleitungen abgeleitet hat, besteht darin, daß, wenn man mit

H, h die Quecksilberhöhen für den Druck im Speisebehälter und neben der Ausflußöffnung, mit

L die Länge der Leitungsröhre zwischen diesen beiden Oertern, vorausgesetzt, daß keine sehr starken Biegungen darin vorkommen und mit

D, *d* die Durchmesser dieser Röhre und der Ausflußöffnung

bezeichnet, man zwischen diesen Größen näherungsweise die Beziehung hat:

$$h = \frac{H}{1 + 0{,}0238\, L\, \frac{d^4}{D^5}} \quad \text{oder} \quad \frac{H - h}{h} = 0{,}0238\, L\, \frac{d^4}{D^5}.$$

Um dieses Resultat der Erfahrung mit dem zu vergleichen, welches die vorstehende Theorie gibt, braucht nur bemerkt zu werden, daß die Gleichungen in §. 37, welche uns zuletzt beschäftigt haben, den Voraussetzungen entsprechen, unter denen d'Aubuisson seine Versuche angestellt hat, wenn man annimmt, daß der Druck P' neben bei der Ausflußöffnung der vorhin mit H' bezeichneten Manometerhöhe h entspricht. Nun folgt aber aus der ersten jener Gleichungen:

$$P - P' = \frac{\Pi}{2g}\, m^2\, \frac{d^4}{D^4}\, U^2 \left[1 + \left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2 + \frac{8\beta L}{D}\right],$$

und aus der zweiten:

$$P' - p = \frac{\Pi}{2g}\, U^2 \left(1 - \frac{m^2 d^4}{D^4}\right);$$

mithin hat man:

$$\frac{P - P'}{P' - p} = \frac{H - h}{h} = m^2\, \frac{d^4}{D^4} \cdot \frac{1 + \left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2 + \frac{8\beta L}{D}}{1 - m^2\, \frac{d^4}{D^4}},$$

woraus folgt:

$$h = \frac{\left(1 - m^2\, \frac{d^4}{D^4}\right) H}{1 + m^2\, \frac{d^4}{D^4}\left[\left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2 + \frac{8\beta L}{D}\right]},$$

welche Formel mit der von d'Aubuisson übereinstimmt, wenn man im Nenner $\left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2$ gegen $\frac{8\beta L}{D}$ und im Zähler $m^2\, \frac{d^4}{D^4}$ gegen die Einheit vernachlässigt, was für alle Versuche desselben, wobei $L > 100\, D$ und wenigstens $D > 2\, d$ war, erlaubt ist.

Mittlerer Werth des Coefficienten β für den Widerstand aus den Erfahrungssätzen von d'Aubuisson.

§. 41. Durch eine Vergleichung der von d'Aubuisson erhaltenen Resultate mit denen, welche sich aus der obigen Formel ergeben, wenn man darin $m = 0.93$ oder $m^2 = 0{,}865$ setzt, hatte man für β den Werth $\beta = 0{,}00308$ abgeleitet, der gegen die Erfahrungen von Girard (§. 35) etwas zu gering ist und sich aus dem Coefficienten $0{,}0238$ von $\frac{d^4}{D^5} L$ ergibt. Navier ist in seinen **Mémoire sur l'é-**

coulement des fluides élastiques auf den Werth $\beta = 0{,}00324$ gekommen, wobei er gleichfalls den Coefficienten 0,0238 annahm und $m = 0{,}94$ setzte; dieser Werth scheint jedoch etwas zu groß zu sein.

Denn aus der obigen allgemeinen Gleichung folgt:

$$8\beta = \frac{H-h}{h} \cdot \frac{D^4}{d^4} \frac{D}{L} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{d^4}{D^4}\right) - \frac{D}{L}\left[1 + \left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2\right],$$

worin Navier das negative Glied auf der rechten Seite ganz vernachlässigt. Hierdurch ergeben sich aber für β um so größere Werthe, je kleiner das Verhältniß von L zu D ist, was zuweilen nicht ganz unbedeutende Differenzen herbeiführen kann.

Da die von d'Aubuisson gefundene Näherungsformel gibt:

$$\frac{H-h}{h} \frac{D^4}{d^4} \cdot \frac{D}{L} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{d^4}{D^4}\right) = 0{,}0238 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{d^4}{D^4}\right),$$

so hat man zur Bestimmung von β aus der allgemeinen Formel:

$$8\beta = 0{,}0238 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{d^4}{D^4}\right) - \frac{D}{L}\left[1 + \left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2\right].$$

Nimmt man nun $m' = 0{,}61$, blos $D = 0{,}001\,L$ und mit Navier für den mittleren Werth von $0{,}0238 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{d^4}{D^4}\right)$ die Zahl 0,02594, zu welcher derselbe durch die Vergleichung verschiedener Erfahrungsresultate von d'Aubuisson gekommen ist; so findet man:

$$8\beta = 0{,}02594 - 0{,}00141 = 0{,}02453, \text{ woraus } \beta = 0{,}00307$$

statt des in den Vorlesungen von 1828 angenommenen Werthes von $\beta = 0{,}00308$ und statt des von Navier zuletzt abgeleiteten Werthes $\beta = 0{,}00324$.

Die directen Versuche von Girard über die Ausflußmenge langer Röhrenleitungen (§. 36) geben für β den Werth 0,0032; man sieht also, daß man keine Gefahr laufen wird, sich bedeutend zu irren, wenn man für den mittleren Werth

$$\beta = 0{,}00315$$

nimmt, wie in §. 35 gesagt ist.

Bemerkung über die Veränderlichkeit der Dichtigkeit und des Druckes in den Leitungsröhren.

§. 42. Wenn man zur Erlangung eines noch genaueren Ausdruckes für die Geschindigkeit und Ausflußmenge eines Gases nach Vorschrift des §. 16 den Factor $P - P'$ oder $P - p$ in der Gleichung für die lebendigen Kräfte (§. 49 ffg.) mit $\log. \frac{P}{P'}$ oder $\log. \frac{P}{p}$ vertauscht; so muß man bei der Berechnung der durch den Widerstand der Wände der Röhre aufgehobenen Quantität Arbeit oder Leistung auch auf die Aenderung der Dichtigkeit und des Druckes in den verschiedenen Puncten der Leitungsröhre Rücksicht nehmen, was besonders unerläßlich ist, wenn es sich um die Bestimmung des Gesetzes für den Druck in den verschiedenen Puncten der Röhre handelt. Da jedoch die Lösung dieser Aufgabe zu analytischen Entwickelungen führt, welche in der Praxis nur mit Schwierigkeit angewendet werden können, und da die Aenderung der Dichtigkeit des Gases in den Fällen der Praxis immer nur sehr gering ist (§. 17); so verweisen wir hinsichtlich dieser Entwickelungen auf die §§. 20 bis 25 der bereits erwähnten schönen Abhandlung von Navier über die Ausströmung der elastischen Flüssigkeiten.

Ueber die Schützöffnungen, Gerinne und Kanäle oder Gräben.

Hauptsächliche Unterschiede zwischen den Schleusenöffnungen und den bisher betrachteten kleinen Oeffnungen.

§. 43. Es kommen bei den Maschinenwerken und Schleusen Behufs der Herbeiführung, Leitung und Vertheilung des Wassers eine große Anzahl von Vorrichtungen vor, welche von den früher betrachteten wesentlich abweichen, und für welche es von Wichtigkeit ist, die Ausflußgeschwindigkeit und die Ausflußmengen genügend schätzen zu können. Die bei der Bewegung der Flüssigkeit obwaltenden Umstände entfernen sich in diesen Fällen mehr von den Hypothesen, auf welche die vorhergehende Theorie gegründet ist; vergleicht man indessen die Resultate der Rechnung mit denen der Erfahrung; so kann man immer noch zu Regeln gelangen, welche für die gewöhnlichen Bedürfnisse der Praxis hinlängliche Genauigkeit darbieten. Es sollen daher im Folgenden die gebräuchlichsten Einrichtungen dieser Art einzeln betrachtet und die in jedem besonderen Falle anzuwendenden Formeln angegeben werden.

Die Schützöffnungen der Schleusen, Mühlhüttenwerke rc. sind im Allgemeinen vertical, in mehr oder weniger dicken Wänden angebracht, nach oben durch ein bewegliches Schützbrett, nach unten durch einen horizontalen Heerd begrenzt und an den Seiten stromaufwärts oder nach dem Behälter zu von verticalen Flügelwänden oder Mauern eingeschlossen, welche einander mehr oder weniger genähert sind und gegen die Axe der Ausflußöffnung eine mehr oder weniger schräge Lage haben, so daß sich vor der Schützöffnung ein Zuleitungscanal von oft sehr geringer Ausdehnung befindet, welcher das Wasser in horizontalen Fäden aus einem großen Speisebehälter herbeiführt. In Folge dieses Umstandes und weil die Höhe der Ausflußöffnung im Verhältnisse zu der Druckhöhe über ihrem Mittelpuncte sehr beträchtlich ist, wird die Voraussetzung, nach welcher man für die mittlere Ausflußgeschwindigkeit die jener Druckhöhe entsprechnnde Geschwindigkeit nimmt, ebenso wie die Hypothese der parallelen Schichten oder der Gleichheit der Geschwindigkeiten in allen Puncten der Oeffnung in theoretischer Beziehung viel weniger genau, als in den früheren Fällen.

Formel zur Berechnung der Ausflußmenge für Oeffnungen, welche im Verhältniß zu der Druckhöhe der Flüssigkeit nicht sehr klein sind.

§. 44. Um nun hierbei ein strengeres Verfahren einzuschlagen, hat man die Annahme von gleichen Geschwindigkeiten auf diejenigen Flüssigkeitsfäden beschränkt, welche sich in derselben Höhe unter dem

Wasserspiegel befinden, und die Ausflußmenge dadurch berechnet, daß man die rechteckige Oeffnung in unendlich schmale horizontale Schichten theilte und für eine jede dieser Schichten die entsprechende Ausflußmenge nach der zugehörigen Druckhöhe ermittelte. Denn es sei:

l die constante Breite der Oeffnung und

h die Druckhöhe über einen unendlich dünnen Schicht von der Höhe dh; so ist die Ausflußmenge für diese Schicht nach den Betrachtungen und Hypothesen in §. 20 ffg.:

$$= l \cdot dh \sqrt{2gh},$$

und um die Ausflußmenge für die ganze Oeffnung zu erhalten, hat man diesen Ausdruck von der Druckhöhe h über dem Scheitel der Oeffnung bis zur Druckhöhe H über der Grundlinie zu integriren, wodurch man erhält:

$$Q = l \int_H^h dh \sqrt{2gh} = \tfrac{2}{3} l \sqrt{2g} \left(H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \tfrac{2}{3} l \left(H \sqrt{2gH} - h \sqrt{2gh}\right).$$

Vergleichung dieser Formel mit der in §. 20 für kleine Oeffnungen.

§. 45. Die in §. 20 aufgestellte Formel würde bei den gegenwärtigen Bezeichnungen folgende sein:

$$Q = l\,(H - h) \sqrt{2g\,\frac{(H + h)}{2}},$$

und um dieselbe mit der so eben gefundenen zu vergleichen, hat Prony gezeigt *), daß sie sich von jener nur durch einen veränderlichen Coefficienten unterscheidet, welcher sich im Allgemeinen nur sehr wenig von der Einheit entfernt und für welchen er in dem erwähnten Werke eine vollständig berechnete Tabelle gegeben hat. Es können übrigens die Resultate der Versuche über den Ausfluß durch die einfachste dieser beiden Formeln mit ebenso großer Genauigkeit und Regelmäßigkeit dargestellt werden, wie durch die andere; die dabei anzuwendenden Correctionscoefficienten sind weder für die eine, noch für die andere constant und, mit Ausnahme des Falles einer sehr kleinen Druckhöhe, fast gar nicht von einander verschieden, wie man weiter unten aus der Tabelle in §. 48 sehen wird.

Beschränkt man sich also auf die am leichtesten zu berechnende Formel und bezeichnet den Correctionscoefficienten für den Ausfluß in dem Falle, wo die Contraction vollständig ist (§. 21 u. 22) mit m; so kann man die wirkliche Ausflußmenge durch die Formel:

$$Q = ml\,(H - h) \sqrt{2g \cdot \frac{H + h}{2}}$$

bestimmen.

---

*) Mémoire sur le Jaugeage des eaux courantes.

Erfahrungsresultate über die Ausflußmenge bei vollständiger Contraction des Strahles.

§. 46 Bis in die letzteren Jahre waren die Versuche über die Wirkungen der vollständigen Contraction für quadratische und rechteckige Oeffnungen in einer dünnen Wand von geringer Zahl und beschränkten sich auf die schon oben (§. 22) erwähnten Erfahrungen von Bossut und Michelotti über Oeffnungen von $0^m,10$ bis $0^m,08$ Breite mit sehr bedeutenden Druckhöhen. Die hieraus abgeleiteten Werthe für den Ausflußcoefficienten waren nicht merklich von denen verschieden, die man unter ähnlichen Umständen für kreisförmige Oeffnungen (§. 22) erhalten hatte, und schienen im Allgemeinen sehr wenig von den Dimensionen der Oeffnung abzuhängen. Durch neuere Versuche mit einer rechteckigen Oeffnung von $0^m,009$ Höhe und $0^m,018$ bis $0^m,144$ Breite, unter Druckhöhen von 24 bis 40 mal ihrer Höhe, hat Bidone (**Mémoires de l'académie de Turin, 1823, pages 92 et suivantes**) für den Ausflußcoefficienten scheinbar constante Werthe erhalten, welche zwischen den Grenzen 0,620 und 0,625 geblieben sind; aber d'Aubuisson ist durch noch neuere Versuche (**Annales de Chémie et de physique, tome 44, année 1830, page 225**) mit einer verticalen Oeffnung von $0^m,02$ bis $0^m,06$ zu einer anderen Folgerung gekommen, in Folge deren er annimmt, daß der Coefficient für langgedehnte rechtwinklige Oeffnungen im Allgemeinen größer ist, als für kreisförmige und quadratische, so daß, wenn derselbe für die quadratische Oeffnung von $0^m,01$ Breite unter den obigen Druckhöhen etwa 0,65 ist, er für eine Oeffnung von $0^m,30$ Grundlinie bei derselben Breite und Druckhöhe 0,70 und bei einer Grundlinie von $0^m,10$ gleich 0,71 bis 0,72 wird.

Der scheinbare Widerspruch in diesen Resultaten kann offenbar nur in der Einrichtung der Apparate und für die letzteren besonders darin seinen Grund haben, daß die horizontale Breite der Oeffnungen im Vergleich zu der des Behälters zu groß gewesen sein mag, wodurch die Contraction vermindert und die Ausflußmenge vermehrt wird (§. 21). Aus derselben Ursache erklärt es sich auch, warum die miteinander verbundenen Oeffnungen, womit d'Aubuisson Versuche angestellt hat, anderen im Großen angestellten und weiter unten mitzutheilenden Versuche entgegen, größere Ausflußmengen ergeben haben, als die einfachen Oeffnungen von derselben Breite.

Versuche von Poncelet und Lesbros.

§. 47 Seit dem Jahre 1827 haben Poncelet und Lesbros neue und viel umfassendere Versuche, als es bis dahin geschehen war, ausgeführt, welche sich den Umständen der Praxis viel mehr anschließen. Die größte Sorgfalt und die genauesten Beobachtungsmittel, sowie zahlreiche Bestätigungen sind hierbei angewandt, um den Resultaten alle mögliche Sicherheit zu geben. Diese Untersuchungen sind zwar noch lange nicht geschlossen; aber es sind schon manche nützliche Resultate derselben in eimem Memoire vom 16. November 1829 der Academie der Wissenschaften zu Paris vorgelegt und in dem **recueil des savans étrangers** dieser berühmten Societät (**année 1832**) abgedruckt. Sie beziehen sich auf rechteckige Oeffnungen von $0^m,20$ Grundlinie in dünnen Wänden, welche in die freie Luft münden, eine vollständige Contraction zulassen und deren Höhe von $0^m,01$ bis $0^m,20$ variirte, und sind unter den verschiedensten Druckhöhen bis zu der von $1^m,70$ über der oberen Seite, über welche hinaus der Ausfluß keine merkliche Aenderung mehr zu erleiden scheint, ausgeführt.

Wir beschränken uns hier darauf, eine Tabelle dieser Resultate mitzutheilen, welche durch Interpolation bis zu Druckhöhen von 3^m ausgedehnt ist und sowohl für die eine, wie für die andere der in §. 44 und 45 aufgestellten Formeln die entsprechenden Correctionscoefficienten für den Ausfluß gibt.

§. 48. Correctionscoefficienten für den Ausfluß des Wassers aus verticalen rechteckigen Oeffnungen in dünne Wänden, bei vollständiger Contraction des Flüssigkeitsstrahles und Ausmündung in die freie Luft.

Druckhöhe über dem Scheitel der Oeffnungen.	Erste Tabelle, wenn die Druckhöhen für einen Punct des Wasserspiegels gemessen werden, wo sich derselbe noch nicht gesenkt hat.												Zweite Tabelle, wenn die Druckhöhen unmittelbar über der Oeffnung genommen sind.					
	Coefficienten für die Formel $Q = l(H-h)\sqrt{2g\frac{(H+h)}{2}}$, wenn die Höhe der Oeffnung gleich ist:						Coefficienten für die Formel $Q = \frac{2}{3} l (H\sqrt{2gH} - h\sqrt{2gH})$, wenn die Höhe der Oeffnung gleich ist:						Coefficienten für die Formel $Q = l(H-h)\sqrt{2g\frac{H+h}{2}}$, wenn die Höhe der Oeffnung gleich ist:					
	$0^m,20$	$0^m,10$	$0^m,05$	$0^m,03$	$0^m,02$	$0^m,01$	$0^m,20$	$0^m,10$	$0^m,05$	$0^m,03$	$0^m,02$	$0^m,01$	$0^m,20$	$0^m,10$	$0^m,05$	$0^m,03$	$0^m,02$	$0^m,01$
$0^m,000$	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″	0,619	0,667	0,713	0,766	0,783	0,795
0,005	″	″	″	″	″	0,705	″	″	″	″	″	0,709	0,597	0,630	0,668	0,725	0,750	0,778
0,010	″	″	0,607	0,630	0,660	0,701	″	″	0,622	0,644	0,667	0,704	0,595	0,618	0,642	0,687	0,720	0,762
0,015	″	0,593	0,612	0,632	0,660	0,697	″	0,611	0,623	0,644	0,665	0,700	0,594	0,615	0,639	0,674	0,707	0,745
0,02	0,572	0,596	0,615	0,634	0,659	0,694	0,592	0,611	0,624	0,644	0,664	0,696	0,594	0,614	0,638	0,668	0,697	0,729
0,03	0,578	0,600	0,620	0,638	0,659	0,688	0,594	0,612	0,626	0,643	0,662	0,690	0,593	0,613	0,637	0,659	0,685	0,708
0,04	0,582	0,603	0,623	0,640	0,658	0,683	0,596	0,612	0,627	0,642	0,660	0,684	0,593	0,612	0,636	0,654	0,678	0,695
0,05	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679	0,597	0,613	0,628	0,642	0,659	0,680	0,593	0,612	0,636	0,651	0,672	0,686
0,06	0,587	0,607	0,627	0,640	0,657	0,676	0,598	0,613	0,629	0,641	0,658	0,676	0,594	0,613	0,635	0,647	0,668	0,681
0,07	0,588	0,609	0,628	0,639	0,656	0,673	0,598	0,614	0,630	0,640	0,657	0,673	0,594	0,613	0,635	0,645	0,665	0,677
0,08	0,589	0,610	0,629	0,638	0,656	0,670	0,599	0,614	0,630	0,639	0,656	0,670	0,594	0,613	0,635	0,643	0,662	0,675
0,09	0,591	0,610	0,629	0,637	0,655	0,668	0,599	0,614	0,631	0,638	0,655	0,668	0,595	0,614	0,634	0,641	0,659	0,672
0,10	0,592	0,611	0,630	0,637	0,654	0,666	0,599	0,615	0,631	0,638	0,654	0,666	0,595	0,614	0,634	0,640	0,657	0,669
0,12	0,593	0,612	0,630	0,636	0,653	0,663	0,600	0,615	0,631	0,637	0,653	0,663	0,596	0,614	0,633	0,637	0,655	0,665
0,14	0,595	0,613	0,630	0,635	0,651	0,660	0,600	0,616	0,631	0,636	0,652	0,660	0,597	0,614	0,632	0,636	0,653	0,661
0,16	0,596	0,614	0,631	0,634	0,650	0,658	0,600	0,616	0,631	0,635	0,650	0,658	0,597	0,615	0,631	0,635	0,651	0,659
0,18	0,597	0,615	0,630	0,634	0,649	0,657	0,601	0,617	0,630	0,634	0,649	0,657	0,598	0,615	0,631	0,634	0,650	0,657
0,20	0,598	0,615	0,630	0,633	0,648	0,655	0,601	0,617	0,630	0,633	0,648	0,655	0,599	0,615	0,630	0,633	0,649	0,656
0,25	0,599	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653	0,601	0,617	0,630	0,632	0,646	0,653	0,600	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,30	0,600	0,616	0,629	0,632	0,644	0,650	0,602	0,618	0,630	0,632	0,644	0,650	0,601	0,616	0,629	0,632	0,644	0,651
0,40	0,602	0,617	0,628	0,631	0,642	0,647	0,603	0,618	0,629	0,631	0,642	0,647	0,602	0,617	0,629	0,631	0,642	0,647

Folgerungen aus den vorstehenden Tabellen.

§. 49. Die Vergleichung der Zahlen in diesen Tabellen mit denen, welche sich aus verschiedenen andern Beobachtungen ergeben, hat Poncelet und Lesbros auf folgende Schlüsse geführt: 1) für alle kreisförmigen, quadratischen oder rechteckigen Oeffnungen mit einer Druckhöhe von mehr als 1m,30 über dem Scheitel bleibt der Coefficient für den Ausfluß nahezu derselbe und scheint von der Gestalt und den absoluten Dimensionen der Oeffnung unabhängig zu

0,50	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644	0,604	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,645
0,60	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,642	0,604	0,617	0,628	0,630	0,638	0,642	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,643
0,70	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640	0,605	0,617	0,627	0,629	0,637	0,640	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640
0,80	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637
0,90	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635	0,605	0,616	0,626	0,628	0,634	0,635	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635
1,00	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632
1,10	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629	0,605	0,615	0,625	0,627	0,631	0,629	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629
1,20	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626
1,30	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622	0,604	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622
1,40	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618	0,603	0,612	0,621	0,922	0,622	0,618	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618
1,50	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615	0,603	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
1,60	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613
1,70	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612
1,80	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612	0,602	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612
1,90	0,601	0,608	0,614	0,613	0,612	0,611	0,601	0,608	0,614	0,613	0,613	0,611	0,601	0,608	0,614	0,613	0,613	0,611
2,00	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611	0,601	0,607	0,614	0,612	0,612	0,611
3,00	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609	0,601	0,603	0,660	0,608	0,610	0,609	0,601	0,606	0,606	0,608	0,610	0,609

sein, vorausgesetzt, daß dieselben im Verhältniß zu denen des Behälters sehr klein sind und die Contraction vollständig erfolge. Nach der vorstehenden Tabelle würde dieser Werth nur zwischen 0,600 und 0,625 variiren, was den mittleren Coefficienten wenigstens bis auf $\frac{1}{40}$ genau 0,615 ergibt, übereinstimmend mit dem, welcher aus den allgemeinen, von den verschiedenen Beobachtungen für sehr starke Druckhöhen erhaltenen Resultaten abgeleitet ist. 2) Bei den weit unter $1^m,30$ liegenden Druckhöhen hängt der Coefficient für den Ausfluß weit weniger von dem Umfange oder der langgedehnten Form der Oeffnung ab, als vielmehr von dem größeren oder geringeren Abstande der gegenüber liegenden Seiten und von der absoluten Gröeß der Druckhöhe, so daß z. B. eine kreisförmige Oeffnung von $0^m,02$ Durchmesser und eine quadratische Oeffnung von $0^m,02$ Seitenlänge unter denselben Druckhöhen fast genau dieselben Coefficienten haben, wie die rechteckige Oeffnung von $0^m,02$ Höhe, welches auch die andere Dimension sei, wofern dieselbe nur im Verhältnisse zu der entsprechen-den Breite des Behälters sehr klein ist, so daß die Contraction vollständig wird.

Hiernach und nach der Bekanntmachung der entscheidenden Versuche, welche Poncelet und Lesbros über diesen Gegenstand ausgeführt haben, kann die vorstehende Tabelle leicht auf kleinere oder größere Oeffnungen, als darin enthalten sind, ausgedehnt werden, wobei man hinsichtlich der letzteren bemerken kann, daß die Coefficienten für Oeffnungen von mehr als $0^m,20$ Höhe von denen wenig abweichen können, welche die Tabelle für diese Höhe gibt, wie man aus ihrem geringen Unterschiede gegen die Werthe für eine Oeffnung von $0^m,10$ Höhe entnehmen kann.

Werthe des Ausflußcoefficienten für eine unvollständige Contraction des Flüssigkeitsstrahles.

§. 50. Wenn eine Seite der Ausflußöffnung in der Verlängerung einer inneren Wandfläche des Behälters liegt, die auf der Ebene der Oeffnung senkrecht ist; so treten die Fäden der Flüssigkeit an dieser Seite parallel zu einander aus und die Contraction wird daselbst unterdrückt. Dasselbe ereignet sich für eine jede Seite, welche sich in ähnlichen Umständen befindet. Man besitzt sehr wenig Erfahrungen über diese Art des Ausflusses; die hauptsächlichsten sind von Bidone *), welcher mit kleinen Oeffnungen von etwa $0^m,015$ Höhe und Breite unter sehr großen Druckhöhen experimentirt hat. Aus denselben geht hervor, daß, wenn m der Coefficient für den Ausfluß einer Oeffnung in dünner Wand mit vollständiger Contraction bei der Druckhöhe ist, die man betrachtet, der gesuchte Coefficient

$m\,(1 + 0{,}035)$ ist, wenn die Contraction nur auf drei Seiten,
$m\,(1 + 0{,}072)$ „ „ „ „ „ „ zwei „
$m\,(1 + 0{,}125)$ „ „ „ „ „ „ einer Seite
stattfindet.

*) Mémoire de l'Académie de Turin, Tome 25, années 1820 et 1821.

Werth des Ausflußcoefficienten für die gewöhnlichen Schleusenthore.

§. 51. Man hat auch einige Versuche, welche mit großen Oeffnungen angestellt sind, wo die Contraction an der unteren Seite fast ganz unterdrückt war. Sie beziehen sich auf die Schützöffnungen in den Schleusenthoren und sind in dem Kanale du midi von Pin und Lespinasse, im alten Hafen-Bassin von Lapeyre, und im Bromberger Kanale von dem Bauinspector Kypke *) angestellt. Alle diese Erfahrungen, bei denen die Druckhöhen sehr groß waren und die Oeffnungen bis zu 1 Quadratmeter Fläche hatten, stimmen darin überein, daß man dem Ausflußcoefficienten den mittleren Werth:

$$m = 0{,}625$$

geben kann, der sich mit Zuverlässigkeit auf die Schützöffnungen in den Schleusenthoren anwenden läßt, da dieselben gewöhnlich sehr nahe über dem Heerde liegen und daher an der Grundfläche nur eine ganz unbedeutende Contraction erzeugen. Dieser Coefficient kommt auch dem sehr nahe gleich, welchen man aus dem obigen Resultate von Bidone ableiten würde, wenn man denselben mit den Coefficienten der vorstehenden Tabelle für eine Oeffnung von $0^m{,}20$ Höhe verbindet.

Bemerkung über den Fall, wo die Ausflußöffnung eingetaucht ist.

§. 52. Es muß hierbei bemerkt werden, daß bei den Versuchen von Kypke über die Schleusen des Bromberger Kanales die Ausflußöffnungen ganz unter den Wasserspiegel der unteren Kammer getaucht waren, so daß also der Coefficient für diesen Fall und für den, wo die Oeffnung in die freie Luft mündet, sich gleich bleibt, sobald man die Ausflußgeschwindigkeit nach §. 11 bestimmt. Dieses Resultat entspricht übrigens genau den Beobachtungen von Dubuat und anderen über Oeffnungen, welche in das Wasser des unteren Behälters getaucht sind.

In dem Falle, wo die Oeffnung nur zum Theil eingetaucht wäre, würde man dieselbe als aus zwei anderen zusammengesetzt ansehen, von denen die eine in die freie Luft mündete, die andere aber in das Wasser des unteren Behälters getaucht wäre, und alsdann auf eine jede die Formeln anwenden, welche sich darauf beziehen, indem man für den Ausfluß ein und denselben Coefficienten annähme.

Endlich mag noch für gewisse Anwendungen bemerkt werden, daß bei den Versuchen von Pin und Lespinasse zwei miteinander verbundene Oeffnungen den Coefficienten 0,55 ergeben haben, der also weit unter dem Coefficienten 0,625 liegt, welcher sich auf eine einzige Oeffnung bezieht.

Versuch von d'Aubuisson mit einer großen Oeffnung, worin die Contraction nur an zwei Seiten stattfand.

§. 53. Bei Gelegenheit seiner schönen Untersuchungen über Gebläse führt d'Aubuisson **) eine Beobachtung an, welche er mit einer

*) Die letzteren Versuche finden sich in Eytelwein's Handbuche der Mechanik und Hydraulik, Leipzig 1823, Seite 147 mitgetheilt.
**) Annales des mines, 2ème Série, année 1828.

rechteckigen Oeffnung von $0^m,02$ bis $0^m,04$ Höhe, die sich nahe an dem Boden und an einer der Seitenwände des Behälters befand, unter Druckhöhe von $0^m,40$ bis $0^m,70$ anstellte, und er fand für den Ausflußcoefficienten:

$$m = 0{,}696.$$

Unter diesen Umständen würde der Coefficient für die vollständige Contraction (vgl. die Tabelle in §. 48) ungefähr 0,635 sein, und wenn man darauf die Regel in §. 50 anwendet; so findet man für die fragliche Oeffnung $m = 1{,}072 \times 0{,}635 = 0{,}681$, was sich nur unbedeutend von dem mittleren Resultate d'Aubuisson's entfernt.

Fall, wo die Contraction nur theilweise an einer oder mehreren Seiten unterdrückt ist. — Ansatzröhren.

§. 54. Wenn bei den Mühl- und Hüttenwerken eine Wand des Behälters der Oeffnung so nahe liegt, daß dadurch die Contraction an dieser Seite merklich vermindert, aber doch nicht ganz aufgehoben wird; so kann man zum ersten Näherungswerthe des Ausflußcoefficienten das arithmetische Mittel der Werthe nehmen, welche derselbe erhalten würde, wenn die Contraction an jener Seite vollkommen unterdrückt oder wenn sie vollständig vorhanden wäre. In den seltenen Fällen endlich, wo die Oeffnung durch ein Ansatzrohr ohne innere Verengung nach außen hin verlängert wäre, so daß das Wasser mit voller Oeffnung entströmte, kann man für die Coefficienten die in §. 23 angegebenen oder die aus den Theorien der §§. 25 ffg. sich ergebenden Werthe annehmen.

Ausfluß des Wassers durch einen Ueberfall.

§. 55. Wenn eine rechteckige Oeffnung in einer verticalen Wand eines Behälters nach oben zu ganz offen, oder wenn die Druckhöhe über dem Scheitel derselben $= 0$ ist; so bildet dieselbe einen sogenannten Ueberfall. Die bei dem Ausflusse obwaltenden Umstände werden alsdann ganz geändert, da sich der Wasserspiegel über der Oeffnung bedeutend senkt und man die Größe des Querschnittes dieser Oeffnung nur durch specielle Versuche ermitteln kann.

Nennt man unter diesen Umständen:

H die gesammte Druckhöhe aB (Fig. 19) von der Grundlinie a der Oeffnung bis zu der Höhe eines Punctes des Wasserspiegels N, wo sich derselbe noch nicht merklich gesenkt hat,

l die Breite der Oeffnung;

so lehrt die Erfahrung, daß man die Ausflußmenge durch die Formel:

$$Q = mlH\sqrt{2gH}$$

berechnen kann, welche sich aus der in §. 45 ergibt, wenn man darin die Druckhöhe über dem Scheitel der Oeffnung $= 0$ setzt, und welche mit der von Bernouilli und Dubuat angenommenen übereinkommt.

Erfahrungsresultate. — Einfluß der Contraction.

§. 56. Die Beobachtungen des Letzteren, die von Brindley und Smeaton und endlich einige neuere von Eytelwein und d'Aubuisson*), bei denen die Druckhöhe H von $0^m,025$ bis $0^m,40$ variirt hat, ergeben für m, wenn die Contraction an den Seiten und auf dem Grunde vollständig stattfindet, und wenn der Flüssigkeitsstrahl bei seinem Ausflusse ganz frei bleibt, Werthe zwischen 0,40 bis 0,47 und zwar um so größere, je geringer die Druckhöhe ist; ihr mittlerer Werth entfernt sich nur wenig von der Zahl 0,42.

Was den Einfluß der Contraction oder der Annäherung der Seiten der Oeffnung an die Wände des Behälters betrifft, so scheint derselbe nach den obigen Erfahrungen sehr unbedeutend zu sein, wenigstens so lange der Durchschnitt des Behälters im Vergleich zu dem der Oeffnung einigermaßen groß ist und besonders, wenn der Boden des Behälters in einiger Entfernung unter der Grundlinie der Oeffnung liegt.

Bidone, der über diesen Gegenstand specielle Versuche angestellt hat, hat gefunden, daß der Coefficient m nahezu gleich 0,4 blieb, die verticalen Seiten der Oeffnung mochten in der Verlängerung der parallelen Seitenwände des Behälters liegen oder nicht, in welchem ersteren Falle die Oeffnung eine Art von Kanal bildete, dessen Grundfläche etwas tiefer gelegt war, als der Boden des Behälters. Die Art und Weise, wie dieser Schriftsteller die Druckhöhe maß, unterliegt jedoch einigen Schwierigkeiten und erfordert, daß man zu der Höhe des Wasserstandes, welche in einer gewissen Entfernung stromaufwärts von der Oeffnung genommen ist, noch diejenige Höhe hinzu addirt, welche der mittleren Stromgeschwindigkeit in dem dieser Entfernung entsprechenden Querschnitte angehört.

Der geringe Einfluß, welchen die Unterdrückung der Contraction an den Seiten solcher Ausflußöffnungen äußert, kann übrigens durch die merkliche Vermehrung des Widerstandes erklärt werden, den die verticalen Seitenwände des Behälters oder Zuflußkanales der Bewegung entgegensetzen, da hierdurch ein Theil der wirksamen Druckhöhe oder der Ausflußgeschwindigkeit beim Durchgange durch die Oeffnung vernichtet wird.

Um das Gesetz zu ermitteln, nach welchem sich die Ausflußmenge oder der Coefficient m mit den Druckhöhen ändert, haben Poncelet und Lesbros mit vieler Sorgfalt und Genauigkeit mit einem gegen die Breite des Behälters sehr kleinen Ueberfalle, für welchen die Contraction an den drei Seiten vollständig war, Untersuchungen angestellt. Dieses Gesetz wird durch die folgende Tabelle, welche sich auf eine Oeffnung von $0^m,20$ Breite bezieht, dargestellt:

Werthe von:

H ... $0^m,01$; $0^m,02$; $0^m,03$; $0^m,04$; $0^m,06$; $0^m,08$; $0^m,10$; $0^m,15$; $0^m,20$; $0^m,22$.

m ... 0,424; 0,417; 0,412; 0,407; 0,401; 0,397; 0,395; 0,393; 0,390; 0,386.

Man kann also in der Praxis als mittleren Werth:

$$m = 0{,}405$$

*) Annales des Mines, 2e Série, 1828.

annehmen, wie **Bidone** vorgeschlagen hat, und die Ausflußmenge der Ueberfälle durch die Formel:

$$Q = 0{,}405\, lH \sqrt{2gH}$$

berechnen, vorausgesetzt, daß der Querschnitt des Behälters gegen den der Oeffnung sehr groß sei.

Beziehung zwischen der Druckhöhe über der unteren Kante der Ueberfallsöffnung und der Dicke des Strahles.

§. 57. Wenn man kein Nivellirinstrument zur Hand hat, um die Druckhöhe H zu bestimmen, so ist man genöthigt, die mittlere Dicke $ab = h$ (Fig. 19) des Strahles über der Grundlinie des Ueberfalles zu messen. Diese Höhe h ist eine Function von H und hängt auch von dem Verhältnisse der Breite l der Oeffnung zu der Breite L des Behälters ab.

Durch Vergleichung der Resultate aus den Messungen von Bidone und Eytelwein mit ihren eigenen sind Poncelet und Lesbros dahin gelangt, die Beziehung zwischen H und h in Millimetern durch die Interpolationsformel:

$$H = h + 0{,}9 + \sqrt{Kh + 0{,}81}$$

oder:

$$h = H + \tfrac{1}{2} K - 0{,}9 - \sqrt{K\left(\tfrac{1}{4} K + H - 0{,}9\right) + 0{,}81},$$

worin:

$$K = 0{,}0196 \left[19 + \left(100 \frac{l}{L} - 15{,}5 \right)^2 \right]$$

ist, darzustellen, welche übrigens nur dann angewendet werden kann, wenn die Seiten der Oeffnung den Seitenwänden des Behälters nicht zu nahe liegen, und sie würde namentlich dann die Werthe von $\frac{H}{h}$ viel zu groß geben, wenn $\frac{l}{L}$ größer wäre, als 0,4.

Unter diesen Umständen würde man statt der vorstehenden Formel nach einem Versuche von **Eytelwein** $\frac{H}{h} = 1{,}178$ setzen können, wenn $\frac{l}{L}$ ungefähr $= 0{,}86$ wäre, und nach **Bidone** $\frac{H}{h} = 1{,}25$, wenn $\frac{l}{L} = 1$ ist.

Ausflußmenge der Schützöffnungen in Gerinne.

§. 58. Das Wasser, welches durch die Schützöffnungen der Mühlen- und Hüttenwerke strömt, wird oft durch offene Kanäle von einer bestimmten Länge, welche man **Gerinne** nennt, zu den Rädern oder Receptoren geleitet. Der gewöhnlichste Fall ist der (Fig. 20), wo das Gerinne nur sehr kurz und ziemlich abhängig und wo sein Boden und die Seiten in der Verlängerung der inneren Seiten der Oeffnung liegen. **Bossut** versichert (**hydrodynamique, tome II, n. 584**), daß die Ausflußmenge dieselbe sei, als wenn der Kanal hinweggenommen würde, und Dubuat hat dieses (**Principes d'hydraulique, tome I, chap. VII, n. 189**) ohne vorherige Bestätigung für alle Fälle angenommen, wo das Wasser des Gerinnes gegen die Oeffnung nicht wieder zurückfließen kann; jedoch scheint diese Annahme nur für sehr bedeutende Druckhöhen in Behältern mit großen Oeffnungen richtig zu sein. Wenn die Druckhöhe gering ist, so ist es die Ausflußgeschwindigkeit auch, und nach den neueren Versuchen von Poncelet und Lesbros scheint die Ausflußmenge durch die Gegenwart des Gerinnes geändert zu werden, und zwar dergestalt, daß der Coefficient mit den Druckhöhen fortwährend abnimmt, anstatt sich zu vergrößern, wenn sich die Druckhöhen vermindern, wie solches bei Oeffnungen in dünnen Wänden, welche in die freie Luft münden, stattfindet (§. 47 folgg.)

Da bei den Maschinenwerken gewöhnlich nur sehr starke Druckhöhen vorkommen, so wird man die Ausflußmenge nach dem Vorhergehenden in diesen Fällen immer leicht berechnen können.

Geschwindigkeit in der Nähe des Anfangspunctes des Gerinnes.

§. 59. Was die Geschwindigkeit betrifft, so nimmt man auch hier an, daß dieselbe im Puncte der größten Contraction des Strahles sehr nahe gleich der sei, welche der Druckhöhe über dem Mittelpuncte der Oeffung entspricht; jenseits dieses Punctes aber, d. h. in einer Entfernung von etwa der doppelten Breite der Oeffnung zeigt sich eine ähnliche Erscheinung, wie die, welche wir §. 27 für die Ansatzröhren bestimmt haben. Der von der Schwere und dem Widerstande des Grundbettes afficirte Strahl breitet sich aus und trifft bald gegen die Seitenwände des Gerinnes, die Geschwindigkeit wird dadurch vermindert und die Flüssigkeit verliert einen Theil der lebendigen Kraft, der hier sehr schwer direct zu ermitteln ist, da die Flüssigkeit nicht sogleich einen gleichförmigen Stand annimmt, wie dies bei geschlossenen und vollständig gefüllten Röhren stattfindet.

Man begnügt sich gewöhnlich mit der Annahme, daß die Geschwindigkeit in demselben Verhältnisse, wie bei den fraglichen Ansatzröhren geändert werde, und daß sich dieselbe namentlich auf 0,82 von der reducire, welche der Druckhöhe im Behälter entspricht, sobald die Contraction in der Oeffnung vollständig ist, und allgemein auf:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}},$$

worin der Coefficient m für jene Contraction beliebig ist. Diese Regel kann jedoch bestritten werden, da die Flüssigkeit an der oberen Fläche frei ist und daselbst keine Störung in ihrer Bewegung erleidet.

Wäre übrigens das Gefälle des Gerinnes und seine Dimensionen, sowie die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Oeffnung von der Art, daß der Strahl die Seitenwände des Gerinnes nicht träfe; so leuchtet ein, daß alsdann kein Verlust an Geschwindigkeit und an lebendiger Kraft stattfinden würde.

Der Fall, wo der Stau in dem Kanale den Strahl vollständig bedeckt.

§. 60. Sind dagegen das Gefälle des Gerinnes und die Druckhöhe im Behälter so schwach, daß der Widerstand der Wände oder andere äußere Hindernisse die Flüssigkeit zwingen, sich im Gerinne nahe vor der Oeffnung anzuhäufen und in die Höhe zu schwellen, so daß dadurch der zusammengezogene Strahl ganz überdeckt wird; so vermehrt sich der Druck gegen diesen Strahl und die Geschwindigkeit, wie die Ausflußmenge wird merklich geändert. Es seien:

ω die Fläche der Oeffnung und Ω die des Querschnittes des Kanales in einem Puncte, wo der Stand des Wassers als gleichförmig angenommen werden kann,

V u. U die Geschwindigkeit im zusammengezogenen Querschnitte und in Ω,

m der Contractionscoefficient für die Oeffnung ω,

$H-h$ der Höhenunterschied zwischen dem Wasserspiegel im Behälter und im Kanale, und

Q die Ausflußmenge in der Secunde;

so hat man nach Dubuat (**Principes d'hydraulique, Tome I, pages 189 et suivantes**) in diesem Falle zur Berechnung der Ausflußmenge die Formel:

$$Q = 0{,}85\,\Omega\sqrt{2g\,(H-h)},$$

worin sich der Coefficient 0,85 besonders auf die Geschwindigkeit $\sqrt{2g\,(H-h)}$ und weniger auf die Contraction bezieht. Das Princip der lebendigen Kräfte führt jedoch zu einer allgemeineren Regel, die mehr Sicherheit zu gewähren scheint.

Denn nach den §§. 11, 24 ff. hat man hier offenbar die Gleichung:

$$U^2\left[1+\left(\frac{\Omega}{m\omega}-1\right)^2\right] = 2g\,(H-h),$$

welche die beiden Formeln gibt:

$$U = \sqrt{\frac{2g\,(H-h)}{1+\left(\frac{\Omega}{m\omega}-1\right)^2}} \text{ und } Q = \Omega\sqrt{\frac{2g\,(H-h)}{1+\left(\frac{\Omega}{m\omega}-1\right)^2}},$$

in die kein Correctionscoefficient weiter angeführt zu werden braucht, und welche die noch nicht publicirten Versuche von Lesbros über diesen Fall ziemlich genau bestätigen.

Man hat hier also auch:

$$V = \frac{\Omega U}{m\omega} = \sqrt{\frac{2g\,(H-h)}{\frac{m^2\omega^2}{\Omega^2}+\left(1-\frac{m\omega}{\Omega}\right)^2}},\quad Q = m\omega V$$

$$= m\omega\sqrt{\frac{2g\,(H-h)}{\frac{m^2\omega^2}{\Omega^2}+\left(1-\frac{m\omega}{\Omega}\right)^2}},$$

und wenn man für einen besonderen Fall annimmt, daß Ω gegen ω sehr groß ist; so kömmt man weiter auf die Formel:

$$V = \sqrt{2g(H-h)},$$

welche sich auf den Fall bezieht, wo die Oeffnung in das Wasser eines sehr großen unteren Bassins oder Behälters getaucht ist (§. 11 u. §. 46).

Der allgemeine Ausdruck von V führt auch für die Annahme von $\Omega = m\omega$ zu demselben Resultate, und außerdem hat man alsdann $U = V$; aber diese Annahme verträgt sich nicht mit der, von welcher wir bei dieser Untersuchung ausgegangen sind, nach welcher das Wasser in dem Kanale einen Stau erleiden und in Folge dessen gegen die Oeffnung zurückfließen und den zusammengezogenen Strahl bedecken sollte: dieselbe könnte nur dann verwirklicht werden, wenn man der Mündung in den Kanal die Form des Strahles (Fig. 21) gegeben hätte, wenn der Kanal selbst die genaue Verlängerung jener Mündung bildete und ein solches Gefälle hätte, daß die Wirkung der Schwere hinreichte, um fortwährend die passiven Widerstände, welche die Geschwindigkeit zu verzögern oder die Querschnitte des Wassers zu vergrößern streben, zu überwinden. Da aber alsdann der zusammengezogene Strahl ebenso aus dem Behälter strömt, als wenn er vollkommen frei und nur dem atmosphärischen Drucke unterworfen wäre; so scheint es, daß man die Geschwindigkeit nicht durch die Formel $\sqrt{2g\,(H-h)}$, sondern durch die in §§. 44 und 45 gegebenen berechnen müsse.

Bemerkungen über den Fall, wo der zusammengezogene Strahl von dem Staue nur zum Theil bedeckt wird.

§. 61. Wenn die Contraction an der Grundlinie und an den Seiten der Oeffnung stattfindet und das Gerinne in der Vereinigungsstelle mit dem Behälter nicht die Gestalt des flüssigen Strahles hat (Fig. 22); so ereignet es sich gewöhnlich, daß sich dieser Strahl bei großen Druckhöhen von den Seitenwänden und dem Grunde des Gerinnes, wenigstens in der Nähe des am meisten zusammengezogenen Querschnittes, gänzlich ablös't, und alsdann sind Geschwindigkeit und Ausflußmenge, wie man in §. 58 gesehen hat, dieselben, wie wenn der Kanal gar nicht vorhanden wäre, ungeachtet der Anschwellung des Wassers, welche etwas jenseits jenes Querschnittes erfolgt und durch Stöße und Widerstände aller Art herbeigeführt wird. Ist aber die Druckhöhe sehr gering, so senkt sich der Flüssigkeitsstrahl und breitet sich aus, die Anschwellung nähert sich der Oeffnung, das Wasser, welches diese Anschwellung bildet, ergießt sich in die leeren Räume an den Seiten, aus denen es anfänglich zum Theil immer wieder herausgestoßen wird, welche es aber bald mehr oder weniger vollkommen ausfüllt, und ändert so den auf den Strahl ausgeübten Druck und die Art des Ausflusses.

Dieses ist die Ursache, welche für die kleinen Druckhöhen eine Verminderung der Ausflußmenge oder des Coefficienten m der Formel in §. 45 herbeiführt, eine Verminderung, welche nach den noch nicht herausgegebenen Versuchen von Lesbros jenen Coefficienten für ein und dieselbe Oeffnung und Druckhöhe, die nach der Tabelle in §. 48 z. B. $m = 0{,}65$ oder $m = 0{,}70$ ergeben würde, bis auf 0,40 herabdrücken kann. Auch dieser Fall der kleinen Druckhöhen und der unvollständigen Ueberdeckung des Strahles ist einer von denen, welche über das wahre Maaß der Ausflußmenge die meiste Unsicherheit läßt, da es zu schwierig ist, einen deutlich genug hervorspringenden physischen Charakter der Ausströmung zu entdecken, mit Hülfe dessen man die einem jeden Falle entsprechende Verminderung des Coefficienten m bestimmen könnte. Diese Ungewißheit ist übrigens ganz dieselbe wie die, welche sich bei Ansatzröhren (§. 23 und 27) immer dann kund gibt, wenn die Druckhöhe oder die Länge der Röhre sehr gering ist. Auch in dem letzteren Falle kann der Coefficient zwischen 0,82 und 0,61 variiren, je nachdem die Flüssigkeit den Wänden der Röhre mehr oder weniger gut folgt, oder mit einer mehr oder weniger veränderten mittleren Geschwindigkeit aus derselben tritt.

Oeffnungen, welche an der oberen Seite frei und durch ein Gerinne verlängert sind.

§. **62.** Was den Fall betrifft, wo die Oeffnungen oben offen (§. 55) und nach außen durch einen rechtwinkligen Kanal oder ein Gerinne verlängert sind; so treten auch hier dieselben Umstände ein, wie man aus den Versuchen von Christian (**Mécanique industrielle, Tome 1er**) ersehen kann, die für den Coefficienten m in der Formel:

$$Q = mlH\sqrt{2gH}$$

im Allgemeinen kleinere Werthe ergeben haben, als bei den frei in die Luft sich ergießenden Ueberfällen; übrigens sind diese Werthe durch ein Verfahren erhalten, welches über den Grad der Genauigkeit der Resultate einige Zweifel übrig läßt. Alles, was man daraus schließen kann, ist, daß der Coefficient für die Oeffnung mit Gerinne sich zu dem für die Oeffnung ohne Gerinne wie 0,96 : 1 verhält. Hiernach könnte man für jenen Coefficienten den mittleren Werth:

$$0{,}405 \times 0{,}96 = 0{,}39$$

(vergl. §. 56) annehmen, der wahrscheinlich etwas zu groß ist und sich außerdem auf einen Fall bezieht, wo die horizontale Breite der Oeffnung gleich der des Behälters ist, wodurch die Contraction an den Seiten aufgehoben wird.

Es scheint übrigens nicht, daß in diesem Falle der Strahl durch die Anschwellung des Wassers in dem Gerinne überdeckt werde; wenn er es aber doch würde, wie es die bei gewissen unvollkommenen Ueberfällen vorkommen kann; so könnte man nach Dubuat zur Berechnung der Ausflußmenge die obige Formel (§. 60):

$$Q = \Omega U = m\Omega\sqrt{2g(H-h)}$$

anwenden, worin man für den Coefficienten m den Werth:

$$m = 0{,}90$$

zu setzen hätte. Die Versuche, aus denen dieser Werth abgeleitet ist, beziehen sich vorzugsweise auf den Fall, wo das Grundbett des Behälters und des Gerinnes in ihren gegenseitigen Verlängerungen liegen und wo die Breite des Letzteren von der der Oeffnung in dem Fangbehälter wenig verschieden ist.

Es gewährt aber wahrscheinlich mehr Genauigkeit, wenn man nach der in §. 52 angegebenen Methode verfährt und die Oeffnung als aus zwei anderen bestehend ansieht, von denen die eine *AD* (Fig. 23), deren Höhe sich durch die Verlängerung des geringsten Wasserspiegels *LM* in dem Gerinne ergibt, ganz eingetaucht ist und die andere *BD* das Wasser, wie bei einem Ueberfalle ohne Gerinne, in die freie Luft ergießt.

Vortheil, welcher mit der Verminderung der Contraction verbunden ist.

§. 63. Um die Verluste an lebendiger Kraft zu vermeiden, welche beim Eintritte in das Gerinne in Folge der Zusammenziehung des flüssigen Strahles herbeigeführt werden (§. 61), bringt man vor der Oeffnung eine Art von Ansatzröhre an, welche der natürlichen Gestalt des Strahles (§. 60) mehr oder weniger nahe kommt und in deren Verlängerung genau die Wände des Gerinnes liegen. Diese Einrichtung ist jedoch fehlerhaft, da hieraus immer ein Verlust an lebendiger Kraft hervorgeht, welcher im Verhältnisse zu der wirksamen Druckhöhe der Flüssigkeit (§. 23 ffg.) nicht ganz unbeträchtlich ist. Dieser Verlust nimmt besonders dann sehr zu, wenn, wie man dieses bei einigen Werken findet, die Ansatzröhre von allen Seiten geschlossen ist und die Höhe ihrer Eingangsöffnung durch ein dünnes Schützbrett (Fig. 24) regulirt wird. Nachdem alsdann das Wasser eine erste Contraction unter jenem Schützbrette erlitten hat, stößt es gegen die Wände der Ansatzröhre und, da es nicht frei heraustreten kann, schwillt es auf, breitet sich in dem ganzen inneren Raume aus und verliert so den Ueberschuß der ursprünglichen Geschwindigkeit über diejenigen, welche es genöthigt ist anzunehmen, indem es sich über einen größeren Querschnitt innerhalb der Ansatzröhre ausbreitet (§. 24).

Bringt man diese Vorrichtung dagegen im Innern des Behälters, d. h. stromaufwärts von dem Schützbrette an, so daß die Contraction an den Seiten in dem Augenblicke, wo das Wasser unter das Schützbrett tritt, um sich in das Gerinne zu ergießen, welches die genaue Verlängerung der Seiten der Oeffnung bildet, fast ganz aufgehoben ist; so kann man versichert sein, daß der Verlust an lebendiger Kraft äußerst unbedeutend ist, da derselbe nur von den Geschwindigkeitsveränderungen abhängt, welche die Flüssigkeit im Innern des Behälters, d. h. in sehr großen Querschnitten erleidet, wo die Geschwindigkeit im Verhältnisse zu der in der Ausflußöffnung stattfindenden sehr gering ist.

Mittel, welche man anwendet, um die Contraction zu vermindern.

§. 64. Um diesen Zweck zu erfüllen, legt man die Grundlinie der Oeffnung und das Bett des Gerinnes in die Verlängerung des Heerdes des Behälters, oder wenn dieses nicht möglich ist, so verbindet man die beiden Grundbetten durch eine krumme Fläche (Fig. 25), welche an beiden tangent ist, oder begnügt sich endlich, wenn diese

Grundflächen zu weit von einander abstehen, die der Ausflußöffnung durch eine Abrundung zu schließen, welche die natürliche Gestalt des zusammengezogenen Strahles darstellt. Aehnliche Abrundungen bringt man an die verticalen Seiten der Oeffnung folgendermaßen an: Wenn *cd* die Breite ist, welche das Gerinne und die Oeffnung oder der ausfließende Strahl haben soll, so nimmt man *ab* etwa $= \frac{4}{3}\,cd$, *ef* wenigstens $= ab = \frac{4}{3}\,cd$ oder höchstens $= \frac{3}{2}\,ab = 2\,cd$, alsdann verbindet man *a* und *b* mit den Wänden des gegen das Innere des Behälters verlängerten Gerinnes durch Curven, welche die in der Figur angegebene Gestalt haben und an den Wänden tangent sind.

Bei dieser Einrichtung wird die Contraction auf drei Seiten der Oeffnung fast ganz aufgehoben, die Geschwindigkeit im Anfangspuncte des Gerinnes wird sehr nahe der gleich, weeche der mittleren Druckhöhe im Behälter entspricht, und der Ausflußcoefficient wird selbst bei ziemlich bedeutenden Druckhöhen oder bei hohen Oeffnungen folgende Werthe haben;

1) wenn das Schützbrett bei *cd* vertical steht = 0,70,
2) wenn dasselbe geneigt ist (Fig. 26) bei einer Ausladung von 1 auf einer Höhe von 2 . . . = 0,74,
3) wenn dasselbe geneigt ist bei einer Ausladung von 1 auf einer Höhe von 1 . . . = 0,80.

Bei geringen Druckhöhen und niedrigen Oeffnungen muß man diese Zahlen unter gleichen Umständen etwa um $\frac{1}{10}$ ihrer Werthe vermehren, wobei noch zu bemerken ist, daß die Höhe der Oeffnung, wenn das Schützbrett geneigt ist, perpendiculär zu der Grundfläche des Gerinnes genommen werden muß.

Diese Zahlen sind aus dem mittleren Resultate verschiedener Versuche abgeleitet, welche Poncelet bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die Räder mit krummen Schaufeln unter Anwendung geneigter Schützbretter angestellt hat. (**Mémoire sur les roues hydrauliques à aubes courbes etc. Metz 1827.**) In den §§. 37 und 44 dieser Abhandlung kann man sehen, wie das Vorhandensein eines Gerinnes, selbst wenn dasselbe ziemlich stark geneigt ist, eine Abnahme des Coefficienten für die theoretische Ausflußmenge (§. 61) in dem Maaße herbeiführt, wie sich die Druckhöhe vermindert.

Was die Zweckmäßigkeit eines geneigten Schützbrettes betrifft, so soll dadurch nicht gerade eine Verminderung der oberen Contraction des Strahles bewirkt werden, sondern man beabsichtigt dabei, in gewissen Fällen die Oeffnung den Wasserrädern so nahe als möglich zu bringen, weil dadurch die Einwirkungen des Widerstandes der Wände des Gerinnes auf die Geschwindigkeit des Wassers vermindert werden.

Bewegung des Wassers in sehr langen Kanälen.

§. 65. Den Mühl- und Hüttenwerken wird das Wasser oft durch Gräben von bedeutender Länge zugeführt, wo das Gefälle gewöhnlich gleichförmig, ziemlich schwach, das Profil constant, der Wasserspiegel dem Grundbette parallel und die mittlere Geschwindigkeit in den verschiedenen Querschnitten dieselbe ist.

Man nimmt auch bei diesen Wassergräben an, und die Erfahrung bestätigt es, daß der Widerstand der Wände wie bei den Röhrenleitungen (§. 29) durch eine Function von der Form:

$$\frac{\Pi}{g}\,\tilde{\omega} L\,(\alpha U + \beta U^2)$$

dargestellt werden kann, wie Π, L, g, U dieselben Bedeutungen wie für Röhren haben, $\tilde{\omega}$ aber den benetzten Umfang des Querprofils des Grabens bezeichnet und α, β ebenfalls constante Coefficienten sind.

Unter der Voraussetzung, daß der Stand und die Bewegung des Wassers in einem offenen Graben, Kanale oder Flußbette gleichförmig geworden sei, reducirt sich die Gleichung für die Bewegung der Flüssigkeit unter dem bloßen Drucke der Atmosphäre (§. 33) auf folgende:

$$gH - \frac{\tilde{\omega} L}{\Omega}\,(\alpha U + \beta U^2) = 0,$$

wenn H das Gefälle des Kanales auf die Länge L und Ω die constante Fläche des Querprofiles bezeichnet.

Werthe der Coefficienten α, β nach Prony.

§. 66. Prony bezeichnet das Verhältniß $\frac{\Omega}{\tilde{\omega}}$ der Fläche des Querprofiles zu dem benetzten Umfange durch R, nennt dasselbe mit Dubuat den mittleren Halbmesser, und bezeichnet das Verhältniß $\frac{H}{L}$ des gesammten Falles des Kanales zu seiner Länge oder das eigentliche Gefälle desselben mit J, wobei alsdann J den Fall auf das laufende Meter bedeutet. Hierdurch erhält die vorstehende Gleichung die Form:

$$gRJ = \alpha U + \beta U^2.$$

Vergleicht man die durch diese Formel gegebenen Resultate mit denen, welche Dubuat aus 31 Versuchen über offene Kanäle direct erhalten hat; so ergeben sich nach Prony für α und β die Werthe:

$$\alpha = 0{,}000436,\ \text{wonach}\ \frac{\alpha}{g} = 0{,}00004445,$$

$$\beta = 0{,}003034,\ \text{wonach}\ \frac{\beta}{g} = 0{,}00030931,$$

und mithin:

$$U = -\,0^m{,}07185 + \sqrt{0{,}005163 + 3233{,}428\,\frac{\Omega H}{\tilde{\omega} L}}$$

oder

$$U = -\,0^m{,}07185 + \sqrt{0{,}005163 + 3233 \cdot RJ},$$

wenn man R für $\frac{\Omega}{\tilde{\omega}}$ und J für $\frac{H}{L}$ substituirt *).

---

*) Recherche sur la théorie des eaux courantes, par *Prony*.

Vernachlässigt man das erste Glied unter dem Wurzelzeichen gegen das zweite, so reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$U = -0^m,07185 + 56,86\sqrt{RJ}.$$

Werthe der Coefficienten α und β nach Eytelwein. Wichtige Bemerkung von Prony über diesen Gegenstand.

§. 67. Eytelwein hat mit Hülfe der Gleichung Prony's und auf Grund neuerer Beobachtungen über große Flüsse von Funk, Brünings und Woltmann andere Werthe für α und β bestimmt, nämlich folgende:

$$\alpha = 0,000238, \text{ wonach } \frac{\alpha}{g} = 0,0000243,$$

$$\beta = 0,003586, \text{ wonach } \frac{\beta}{g} = 0,00036554,$$

so daß die mittlere Geschwindigkeit durch:

$$U = -0^m,03319 + \sqrt{0,00110163 + 2735,66\,RJ}$$

ausgedrückt wird.

Bei einer Vergleichung zwischen den Resultaten dieser letzteren und der vorhergehenden Formel hatte Prony gefunden *), daß sowohl die eine, wie die andere mit einem ziemlich gleichen Grade von Genauigkeit die Ergebnisse der älteren und der neueren Versuche darstellt; ferner hat er bemerkt, daß diese Resultate ebenso gut durch die Formel in §. 34, welche sich auf Röhrenleitungen bezieht, und zwar fast mit demselben Grade von Genauigkeit, wie durch die vorstehende Eytelwein'sche Formel dargestellt würden, obgleich die letztere aus einer viel größeren Anzahl von Versuchen abgeleitet ist. Diese Bemerkung kann in vielen Fällen von Wichtigkeit sein.

Die Beziehung:

$$gRJ = \alpha U + \beta U^2$$

dient also zur Bestimmung der Geschwindigkeit, sobald man das Gefälle für das laufende Meter und den mittleren Halbmesser des Kanales, d. h. das Verhältniß der Fläche des Wasserprofiles, zu dem benetzten Umfange kennt. Sie kann aber auch dazu gebraucht werden, die übrigen Bedingungen bei der Anlage eines Kanales, welche sich auf die Geschwindigkeit, die Form und das Gefälle beziehen, zu ermitteln, wenn man bemerkt, daß die Ausflußmenge für die Secunde

$$Q = \Omega U$$

ist.

Um die Berechnungen zu erleichtern, hat Prony (s. das zuletzt citirte Werk) eine Tabelle für die Werthe des Gliedds RJ und für die zugehörigen Geschwindigkeiten nach seinen Formeln und nach denen von Eytelwein aufgestellt.

*) Recueil de cinq tables, pour faciliter et abréger les calculs etc., 1825.

Relationen zwischen der mittleren Geschwindigkeit, der Geschwindigkeit an der Oberfläche und auf dem Grunde.

§. 68. Wenn man kein Instrument zu seiner Disposition hat, mit welchem man das Gefälle des Kanales auf eine angemessene Länge mit hinreichender Genauigkeit messen kann, so sucht man die mittlere Geschwindigkeit durch directe Beobachtung zu ermitteln. Aus den Versuchen von Dubuat geht hervor, daß die Geschwindigkeit in den verschiedenen Puncten eines Kanales oder Wasserstromes keineswegs dieselbe, sondern vielmehr in der Mitte, etwas unter der Oberfläche am größten ist und von da bis auf den Grund und nach den Ufern zu abnimmt. Hiernach hat derselbe eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeit V an der Oberfläche im stärksten Stromstriche, der Geschwindigkeit W am Grunde und der mittleren Geschwindigkeit U aufgestellt. Prony hat eine andere, einfachere und genauere Relation in Vorschlag gebracht, welche weder von der Figur, noch von der absoluten Größe der Querschnitte abhängt; dieselbe ist:

$$U = \frac{V\,(V + 2{,}37187)}{V + 3{,}15312} \text{ und } W = 2U - V.$$

Vermittelst der nachstehenden Tabelle kann man sich der Berechnung der ersteren dieser beiden Formeln entheben.

Werthe von V . . . 0^m; $0^m{,}5$; 1^m; $1^m{,}5$; 2^m; $2^m{,}5$; 3^m; $3^m{,}5$; 4^m.

Werthe von $\frac{U}{V}$ . . . 0,752; 0,786; 0,812; 0,832; 0,848; 0,862; 0,873; 0,883; 0,891.

In den gewöhnlichsten Fällen der Praxis, wo die mittlere Geschwindigkeit zwischen $0^m{,}20$ und $1^m{,}50$ liegt, braucht man nach Prony nur

$$U = 0{,}816\,V \text{ oder } U = 0{,}8\,V$$

zu nehmen.

Mittel, um die Geschwindigkeit an der Oberfläche zu messen. — Pitot'sche Röhre. Mühlen mit kleinen Flügeln. Strommesser. Schwimmer.

§. 69. Was die Mittel betrifft, mit Hülfe deren man die Geschwindigkeit in dem stärksten Stromstriche direct messen kann; so hat man deren mehrere vorgeschlagen und im Gebrauche; die wichtigsten davon sind folgende:

Die Pitot'sche Röhre ist eine blecherne Röhre, welche an dem unteren Ende umgebogen ist; dieses Ende wird horizontal dem Strome entgegengehalten, so daß die Oeffnung stromaufwärts gekehrt ist, alsdann erhebt sich die Flüssigkeit in dem vertical stehenden Arme bis zu einer der Geschwindigkeit des Stromes entsprechenden Höhe, welche man mit Hülfe eines graduirten Schwimmers mißt. Die fortwährenden Schwankungen des Wasserspiegels in dem verticalen Arme und die Nothwendigkeit, das Instrument in einem wohlbekannten Strome zu tariren, sind Unbequemlichkeiten, welche den Gebrauch desselben etwas erschweren.

Man hat sich auch einer leichten Mühle mit horizontaler Axe und kleinen Flügeln bedient, welche an der Oberfläche des Wassers zum Theil eingetaucht wurden und deren Geschwindigkeit man entweder direct oder mit Hülfe eines Zählers beobachtete; aber die Schwierigkeit, das Instrument festzustellen und die Reibungswiderstände an den Zapfen und den Widerstand der Luft gehörig in Rechnung zu bringen, hat demselben nur eine beschränkte Anwendung verstattet.

Eines anderen Instrumentes mit horizontaler Axe und geneigten Flügeln, welches man in verschiedenen Tiefen in das Wasser taucht und an welchem ein Zähler angebracht ist, hat man sich in Deutschland unter dem Namen des Strommessers oder des hydrometrischen Flügels bedient; aber die Schwierigkeit, dasselbe zu tariren, ist dieselbe, wie bei den vorhergehenden.

Das einfachste und sicherste Mittel besteht noch darin, daß man in die Mitte des Stromes einen leichten Schwimmer, etwa von eichenem Holze, wirft, welcher nur sehr wenig über die Oberfläche des Wassers hervorragt, um der Luft keine zu bedeutende Fläche auszusetzen. Man wirft denselben ein wenig oberhalb des Punctes, von welchem aus man die Länge messen will, in das Wasser und folgt ihm so weit als möglich mit einer Uhr. Durch mehrmalige Wiederholungen dieser Operation gelangt man zu einem hinreichend genauen Resultate über die Geschwindigkeit an der Oberfläche, woraus man nach §. 68 die mittlere Geschwindigkeit U und demnach die Ausflußmenge $Q = \Omega U$ ableiten kann. Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, daß der Wasserstand und die Geschwindigkeit des Kanales auf eine gewisse Strecke gleichförmig oder die Querprofile constant bleiben.

Zweckmäßige Geschwindigkeit der fließenden Gewässer.

§. 70. Die Geschwindigkeit am Grunde braucht man zur Berechnung der Wassermenge eines Flusses nicht zu kennen; bei der Anlegung von Kanälen ist es jedoch von Wichtigkeit, dieselbe zwischen gewisse Grenzen einzuschließen. Denn wenn sie zu groß ist, so greift sie das Bett an, indem sie die Materialien, woraus dasselbe besteht, mit sich fortreißt, und wenn sie zu schwach ist, so lagert sich der durch Gewitterregen herbeigeführte Schlamm und Gruß in Menge ab und verdirbt ebenfalls das Bett.

Aus den Beobachtungen von Dubuat geht hervor, daß die Geschwindigkeiten, bei welchen die Substanzen des Flußbettes anfangen mit fortgerissen zu werden, durch die nachfolgende Tabelle, welche seinen **Principes d'hydraulique, Tome 2**, entlehnt ist, gegeben werden:

Bezeichnung der Substanzen.	Geschwindigkeiten in der Secunde auf dem Grunde.
Brauner Töpferthon	0^m,081
Grober Sand	0,217
Kies von der Größe der Aniskörner	0,108
desgl. „ „ „ einer Erbse	0,189
desgl. „ „ „ einer großen Bohne	0,325
Abgerundete Meeresgeschiebe von 0^m,027 Durchmesser	0,650
Eckige Kiesel von der Größe eines Hühnereies . . .	0,975

Zu diesen Angaben, welche bei der Anlage von Kanälen zu Rathe gezogen werden können und sehr schätzenswerthe Data zu annähernder Bestimmung der constanten Geschwindigkeit liefern, wenn dieselben bereits ausgeführt sind, fügen wir nach Navier noch die folgenden, welche in der Edinburger Encyclopädie, redigirt von Telford und Nimmo, unter dem Artikel **Bridge** mitgetheilt sind:

Bezeichnung der Substanzen.	Grenze der Geschwindigkeit.
Schlammige Erde	0^m,076
Milder Thon	0,152
Sand	0,305
Kies	0,609
Flußkiesel	0,614
Zerschlagene Kiesel	1,22
Conglomerata, milder Schiefer	1,52
Lagerhafte Gebirgsarten	1,83
Harte Felsarten	3,05

Bestimmung der Wassermenge der fließenden Gewässer.

§. 71. Zur Bestimmung der Wassermenge der fließenden Gewässer verfährt man auf verschiedene Weisen. Man sammelt entweder das in einer gegebenen Zeit ausgeflossene Wasserquantum in Gefäßen oder Bassins von bekanntem Rauminhalte, oder man mißt die Geschwindigkeit an seiner Oberfläche, um daraus die mittlere (§. 59 u. 60) abzuleiten, oder man stauet den Strom direct auf, wenn er es noch nicht ist, bringt in dem Stauwerke eine solche Oeffnung an, auf welche die Regeln in §§. 47 ffg. mit Zuverlässigkeit angewendet werden können, und beobachtet alsdann die Höhe, auf welcher sich der Wasserspiegel oberhalb des Stauwerkes erhält, wenn die Bewegung genau gleichförmig geworden ist (§. 2) oder wenn durch den Strom ebenso viel Wasser zufließt, als durch die fragliche Oeffnung abgeführt wird.

Auf diese Weise bedienten sich früher die Brunnenmacher in Frankreich bei schwachen Wassermengen eines Mittels, welches darin besteht, daß sie den Strom durch ein dünnes Brett, in welchem auf einer und derselben Horizontallinie eine Reihe kreisförmiger Löcher von 1 Zoll (27 Millimeter) Durchmesser angebracht waren, aufhielten. Diese Löcher waren anfangs mit Zapfen verstopft und wurden successive und zwar in so großer Menge geöffnet, daß der obere Wasserspiegel constant wurde und genau in der Höhe einer über den Scheiteln der Oeffnungen gezogenen Linie stehen blieb, in welchem Falle dann eine jede Oeffnung etwa 14 Pinten von 48 Cubikzoll in der Minute oder $19^{m},195$ in 24 Stunden entströmen ließ.

Wasserzoll der Brunnenmacher; Wassermodel.

§. 72. Dieses Maaß ist es, welches man noch jetzt, wiewohl uneigentlich, den **Wasserzoll der Brunnenmacher** nennt, und welches man in 144 **Wasserlinien** eintheilt; indessen weichen die Bestimmungen desselben von Mariotti, Couplet und Bossut weit von einander und auch von der eben gegebenen, welche seit einiger Zeit ziemlich allgemein angenommen ist, bedeutend ab.

Diese Unsicherheiten über den Werth des Wasserzolles, welche hauptsächlich aus dem veränderlichen Einflusse der Wände der Oeffnung, wenn dieselbe nicht in einer Metallplatte angebracht ist, und aus der Schwierigkeit, so geringe Druckhöhen mit Genauigkeit zu messen, hervorgehen, haben Prony veranlaßt (s. das in §. 58 citirte Werk), zum **Wassermodel** eine Quantität von $10^{m.c.}$ anzunehmen, welches in 24 Stunden ausfließt, und wovon das Doppelte nach seinen eigenen Versuchen durch eine runde Oeffnung von $0^{m},02$ Durchmesser in einer Wand von $0^{m},017$ Stärke und bei einer Druckhöhe von $0^{m},05$ über ihrem Mittelpuncte geliefert wird. Vermöge dieser Verhältnisse gehört die Oeffnung, welche das Doppelte des Models gibt, zu den Ansatzröhren, aus denen sich das Wasser mit voller Oeffnung ergießt (§. 23).

Bestimmung der Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser bei dem Receptor ankommt.

§. 73. In §§. 59 ffg. hat man gesehen, wie man die mittlere Geschwindigkeit der Flüssigkeit in einem Abstande von der Oeffnung, welcher ihrer 2 oder 3 fachen Breite gleich ist, zu bestimmen hat; und es bleibt nun noch anzugeben, auf welche Weise man die absolute Geschwindigkeit, welche das Wasser bei seiner Ankunft an dem Receptor hat, ermitteln kann. Zu diesem Ende wollen wir im Folgenden die wichtigsten Fälle untersuchen, welche sich in der Praxis darbieten.

Betrachten wir zuvörderst ein Gerinne *mnpq* (Fig. 27), wie man es häufig bei den Hammerwerken findet, welches unter einem Winkel von 30° oder 40° geneigt und so kurz ist, daß man von dem Widerstande seiner Wände abstrahiren kann. Es sei *a* der Punct, in welchem das Wasser auf den Receptor trifft, und *h* die Tiefe dieses Punctes unter dem Mittelpuncte des Querschnittes *cd*, für welchen die mittlere Geschwindigkeit *U* nach dem oben §. 59 ffg. Gesagten ermittelt ist; alsdann hat man offenbar nach dem Principe der lebendigen Kräfte, wenn man mit V die gesuchte absolute Geschwindigkeit des Wassers im Puncte a bezeichnet:

$$V = \sqrt{U^2 + 2gh} = \sqrt{2g\left(\frac{U^2}{2g} + h\right)}.$$

Wenn das Gefälle des Gerinnes nicht steil genug und seine Länge nicht klein genug ist, um den Widerstand der Wände vernachlässigen zu können; so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Der erste ist der, wo man zu dem unteren Ende des Gerinnes gelangen kann; alsdann mißt man die Fläche Ω' des Wasserprofiles an diesem Ende, und zwar in einem Puncte, wo die Senkung des Wasserspiegels, welche einen Ueberfall charakterisirt (§. 55), anfängt bemerklich zu werden. Hat man nun die Ausflußmenge Q der Oeffnung in dem Behälter nach den oben angegebenen Methoden berechnet, so nimmt man näherungsweise:

$$U' = \frac{Q}{\Omega'}.$$

Hierauf mißt man die Höhe h des Mittelpunctes des Querschnittes Ω' über dem Angriffspuncte a des Wassers an dem Receptor, und erhält, wie oben, für die Geschwindigkeit, mit welcher dasselbe den Punct a erreicht:

$$V^2 = \sqrt{U'^2 + 2gh.}$$

Zur Prüfung der Werthe von Q und U' kann man in gewissen günstigen Fällen und besonders in denen, wo die Flüssigkeit auf einem großen Theile des Kanales einen gleichförmigen Stand angenommen hat, den Querschnitt Ω' wie den eines Ueberfalles betrachten und, indem man mit H' die Höhe des Wassers in diesem Querschnitte bezeichnet, nach der Formel in §. 56 die Ausflußmenge auf's neue berechnen, wobei man aber auf die oben erhaltene mittlere Geschwindigkeit U' Rücksicht zu nehmen hat; so hat man die Formel:

$$Q = 0{,}40\, lH' \sqrt{U'^2 + 2gH'},$$

welcher die bereits berechneten Werthe von Q und U' Genüge leisten müssen.

Der Fall, wo das Gerinne am unteren Ende unzugänglich ist.

§. 74. Der zweite Fall der langen Gerinne ist der, wo man nicht an das untere Ende desselben gelangen und daselbst die Profile direct messen kann; man muß sich alsdann mit folgenden Mitteln begnügen, welche an sich zwar sehr unvollkommen sind, aber zu keinen bedeutenden Fehlern führen werden.

Nachdem man durch die Formel des §. 59 den Werth:

$$U = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2}}$$

der mittleren Geschwindigkeit U in einem von der Ausflußöffnung um ihre doppelte Breite abstehenden Querschnitte bestimmt hat, so berechnet man einen ersten Näherungswerth für die mittlere Geschwindigkeit U' in dem nahe am Ende des Gerinnes liegenden Querschnitte Ω', indem man den Widerstand der Wände vernachlässigt und nur die Höhe h' des Gefälles zwischen diesen beiden Querschnitten berücksichtigt, wodurch man erhält:

$$U' = \sqrt{U^2 + 2gh'}.$$

Nimmt man darauf die Geschwindigkeit in dem Gerinne als gleichförmig an und setzt dafür:

$$u = \frac{U + U'}{2},$$

so kann man diesen Werth anwenden, um danach einen zweiten Werth U'' für die Geschwindigkeit am Ende des Gerinnes vermittelst der Gleichung:

$$dM\,(U''^2 - U^2) = 2g \cdot dM \cdot h' - 2\,dM \cdot \frac{\bar{\omega} L}{\Omega}\,(\alpha u + \beta u^2)$$

zu berechnen, woraus nach vorgängiger Division mit dM und wenn man das Glied αu vernachlässigt, für den genäherten Werth der Geschwindigkeit im Querschnitte Ω' folgt:

$$U'' = \sqrt{U^2 + 2gh - \frac{\bar{\omega} L}{\Omega}\,\beta u^2}.$$

In diesem Ausdrucke hat man übrigens $\beta = 0{,}0035$ zu setzen und für $\bar{\omega}$ und Ω die Werthe zu nehmen, welche der mittleren Geschwindigkeit u entsprechen und sich aus der Ausflußmenge Q und der Breite des Gerinnes leicht ergeben.

Vermittelst des Werthes von U'' kann man alsdann, wie in dem vorhergehenden Falle, leicht die absolute Geschwindigkeit V berechnen, mit welcher das Wasser den Receptor erreicht. Um noch mehr Genauigkeit zu erreichen, könnte man untersuchen, was in jeder unendlich dünnen Querschicht zwischen dem Profile Ω und dem nahe an der Ausflußöffnung gelegenen, für welchen die mittlere Geschwindigkeit gleich U ist, stattfindet und alsdann mit Hülfe der Integralrechnung und unter Berücksichtigung des Widerstandes der Wände den Werth für die Geschwindigkeit oder für das Profil in einem jeden Puncte als Function derer bestimmen, welche sich auf einen gegebenen Punct beziehen. Eine solche Strenge würde jedoch hier ohne Nutzen sein, und wir verweisen, was die Untersuchungen dieser Art betrifft, auf die Schlußbemerkungen zu diesem Abschnitte.

Nebenbehälter.

§. 75. Es ist hier noch einer Vorrichtung zu erwähnen, welche bei einigen Werken, namentlich bei Hammerwerken, zur Herbeiführung des Wassers zu dem Receptor in Gebrauch ist. Man bringt nämlich nahe vor dem Receptor einen kleinen Nebenbehälter (Fig. 29) an, welchen man mit dem Hauptbassin durch eine cylindrische oder prismatische Leitungsröhre in Verbindung setzt. Das Schützbrett befindet sich in mn; wenn dasselbe geschlossen ist, so steht das Wasser in beiden Behältern auf gleicher Höhe; sobald man dasselbe aber öffnet, um das

Rad in Gang zu setzen, so bewirken die Verluste an lebendiger Kraft, welche wir §. 30 zu bestimmen Gelegenheit hatten, eine Senkung des Wasserspiegels in dem vorderen Behälter, welche mit einer wirklichen Verminderung des gesammten Gefälles gleichbedeutend ist und in Rechnung gebracht werden muß.

Nehmen wir zur Vereinfachung der Formeln, und wie es in den meisten Fällen wirklich stattfindet, an, daß die Ein- und Ausgangsöffnungen der Leitungsröhre einander und dem constanten Querschnitte Ω dieser Röhre gleich seien, und bezeichnen wir mit

U die mittlere Geschwindigkeit in der Leitungsröhre, mit
m den Contractionscoefficienten für den Einfluß aus dem größeren Behälter, mit
m' den für die Ausflußöffnung mn des kleineren Behälters, mit
A die Fläche des Querschnittes des letzteren Behälters, mit
ω u. v die Fläche und die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers in der Oeffnung mn, mit
H die Höhe des Wasserspiegels im Hauptbehälter über dem Mittelpuncte der letzteren Oeffnung, mit
h die Höhe des Wasserspiegels im Nebenbehälter über demselben Puncte, und mit
$\tilde{\omega}$, L, α und β dieselben Größen, wie in den §§. 30 ffg.

Ist nun der Hauptbehälter so groß, daß die Geschwindigkeit des Wassers in demselben gleich Null gesetzt werden kann, so erhält man nach dem in §. 24 ffg. Gesagten, wenn man die Verluste an lebender Kraft beim Eintritte des Wassers in die Leitungsröhre und in den unteren Behälter, sowie die Widerstände der Röhrenwände gehörig berücksichtigt:

$$v^2 + U^2\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + U^2\left(1 - \frac{\Omega}{A}\right)^2 = 2gH - \frac{2\tilde{\omega}L}{\Omega}(\alpha U + \beta U^2).$$

Für den Ausfluß des Wassers aus dem unteren Behälter durch die Oeffnung mn hat man nun ferner (vgl. §. 81):

$$v^2\left(1 - m'^2\frac{\omega^2}{A^2}\right) = 2gh.$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen v, so erhält man eine Beziehung zwischen der Höhendifferenz $H - h$ der Wasserspiegel in den Behältern und der mittleren Geschwindigkeit U in der Leitungsröhre, welche übrigens auch aus der durch mn abfließenden Wassermenge abgeleitet werden kann.

In den meisten Fällen der Anwendung sind Ω und ω im Verhältnisse zu A so klein, daß man $\frac{\Omega}{A}$ und $\frac{\omega^2}{A^2}\,m^2$ gegen die Einheit vernachlässigen kann; die beiden vorstehenden Gleichungen reduciren sich demnach auf:

$$v^2 + U^2\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + U^2 = 2gH - \frac{2\tilde{\omega}L}{\Omega}(\alpha U + \beta U^2)$$

und:

$$v^2 = 2gh,$$

woraus die dritte Gleichung:

$$H - h = \frac{U^2}{2g}\left[\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + 1\right] + \frac{\omega L}{g\Omega}(\alpha U + \beta U^2)$$

folgt. Hiermit ist die Beziehung:

$$m'\omega v = \Omega U$$

zu verbinden, welche ausdrückt, daß die Ausflußmenge, welche sich durch die Oeffnung mn ergießt, gleich der ist, welche durch jeden Querschnitt der Röhre geht.

Eliminirt man zwischen den vorstehenden Gleichungen U und v, so erhält man den Werth von h durch H ausgedrückt. Um aber die Rechnung abzukürzen, kann man hier $\alpha = 0$ setzen und für β den Werth $\beta = 0{,}0035$ (§. 34) nehmen. Hierdurch gelangt man zu der Gleichung:

$$H - h = \left\{\frac{m'^2\omega^2}{\Omega^2}\left[\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + 1\right] + 2\beta m'^2 \, \frac{\omega L \omega^2}{\Omega^3}\right\} h,$$

welche bei gehöriger Entwickelung zur Bestimmung des Verlustes an Gefälle $H - h$ durch eine Function von H dienen kann.

Bemerkung über die Anwendung dieser Formeln in der Praxis.

§. 76. Man bemerkt, daß bei dieser Anwendung der Hypothese der parallelen Schichten und des Principes der lebendigen Kräfte nothwendig angenommen werden muß, daß die Dimensionen des unteren Behälters groß genug seien, damit sich der Parallelismus nach den bei der Ausmündung der Leitungsröhre stattfindenden Wirbeln vor der Oeffnung mn wiederherstellen könne. Hierzu ist erforderlich, daß die Breite dieses unteren Behälters in der Richtung der Bewegung wenigstens dreimal so groß sei, als der Durchmesser der Röhre.

Aus dem obigen Ausdrucke erkennt man den Nachtheil, welchen der untere Behälter hinsichtlich der Verminderung des Gefälles mit sich führt, sowie den Einfluß der Leitungsröhre, welche man so kurz und so breit als nur möglich machen muß.

Es wird hierbei noch angeführt, daß einige directe Messungen der Höhendifferenz $H - h$ die aus der vorstehenden Formel sich ergebenden Werthe bestätigt haben, so daß man die obigen Gleichungen in der Praxis mit Zuverlässigkeit awenden darf.

Verlust an lebendiger Kraft durch starke Biegungen und plötzliche Richtungsänderungen in den Röhrenleitungen und Kanälen.

§. 77. Bei der Aufstellung der Gleichungen für die Röhrenleitungen oder Kanäle haben wir bis jetzt vorausgesetzt, daß in denselben keine starken Biegungen oder plötzliche Richtungsänderungen, welche eine merkliche Verminderung der Geschwindigkeit verursachten, vorkommen. Kommen dergleichen vor, so kann man den daraus entspringenden Verlust an lebendiger Kraft durch folgende, von Navier aus Dubuat's Versuchen abgeleitete Formel in Rechnung bringen. Wenn man mit

c die Länge der Biegung, mit

r ihren Krümmungshalbmesser, mit
U die mittlere Geschwindigkeit in dem als constant angenommenen Querschnitte der Röhre

bezeichnet; so kann der Verlust an lebendiger Kraft, welchen diese Biegung erzeugt, durch:

$$dM \cdot U^2 (0{,}0039 + 0{,}0186\, r) \frac{c}{r}$$

dargestellt werden. Diesen Ausdruck hat man bei der Anwendung den übrigen Verlusten an lebendiger Kraft ebenso vielmal hinzuzufügen, als Biegungen in dem Kanale oder in der Röhrenleitung vorkommen.

Der Fall, wo sich vor dem Schützbrette ein offener Kanal befindet, der mit dem Behälter frei communicirt.

§. 78. Eine andere, der vorhin betrachteten ähnliche Einrichtung, welche ebenfalls einen Verlust an Gefälle herbeiführt, ist die (Fig. 30), wo ein offener Kanal oder ein schmales Gerinne den Behälter mit der Ausflußöffnung in Verbindung setzt. Sobald die Bewegung in diesem Kanale, dessen Neigung und Querschnitt als constant angenommen werden, gleichförmig geworden ist, nimmt der Wasserspiegel AC in demselben eine schwache Neigung gegen die Grundfläche an, welche dazu dient, den Widerstand der Wände zu überwinden; außerdem bildet sich beim Eintritte des Wassers bei AB ein Absatz oder ein kleines Gefälle von dem Spiegel im Behälter bis auf den im Kanale, welches nothwendig ist, um der Flüssigkeit die gleichbleibende Geschwindigkeit in dem Kanale mitzutheilen. Die Veränderungen dieser Geschwindigkeit für die verschiedenen Querschnitte werden hier als sehr gering vorausgesetzt, so daß man für dieselbe, sowie für die veränderliche Fläche der Querschnitte die mittleren Werthe nehmen kann. Hiernach kann man diesen Fall wie den vorhergehenden behandeln, indem man den Kanal wie eine Röhre betrachtet, in welcher die obere Fläche des Wassers keine Reibung erleidet und blos dem atmosphärischen Drucke ausgesetzt ist. Unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungen hat man daher:

$$v^2 + U^2 \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 = 2gH - \frac{2\,\bar{\omega}}{\Omega} L(\alpha U + \beta U^2)$$

und:

$$v^2 - U^2 = \left(1 - \frac{m'^2 \omega^2}{\Omega^2}\right) v^2 = 2gh, \quad m'\omega v = \Omega U = Q.$$

In diesen Gleichungen hat man für m den Werth zu nehmen, welcher dem Falle entspricht, wo die Contraction an einer Seite der Eintrittsöffnung AB, nämlich am Scheitel, gleich Null ist.

Was das Gefälle betrifft, welches sich beim Uebergange des Wassers in den Kanal bildet, so kann dasselbe nach §. 62 direct berechnet werden; denn denkt man sich den Wasserspiegel in dem Kanale bis A verlängert und bezeichnet mit H' die Höhe dieses Punctes über dem Mittelpuncte der Oeffnung mn; so hat man nach Dubuat (§. 62) für den Fall, daß die Grundfläche des Kanales die Fortsetzung von der des Behälters bildet:

$$U = 0{,}9 \sqrt{2g\,(H - H')} \text{ und danach } H - H' = 1{,}23 \frac{U^2}{2g}.$$

Diese Werthe sind übrigens nur sehr wenig von denen verschieden, welche man durch die Gleichung:

$$U^2\left[1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2\right]=2g\,(H-H'),$$

erhält, die sich aus der Gleichung des §. 32 durch die Substitution von $\omega = \Omega$ ergibt, wenn man in der vorstehenden $m = 0{,}67$ setzt.

Da hier ferner angenommen ist, daß das Gefälle $H' - h$ bloß zur Ueberwindung des Widerstandes an den Wänden des Kanales verwendet werde; so hat man auch:

$$2g\,(H'-h)=\frac{2\,\varpi}{\Omega}\,L\,(\alpha U+\beta U^2).$$

Verbindet man diese Gleichung mit der vorhergehenden, so erhält man die anfängliche wieder, wenn man bemerkt, daß $v^2 = U^2 + 2gH$ ist; man hat also auch:

$$H-h=\frac{U^2}{2g}\left[1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2\right]+\frac{\varpi L}{g\Omega}\,(\alpha U+\beta U^2),$$

unter welcher Form dieselbe mit der Gleichung übereinstimmt, welche in §. 75 für den Fall einer Leitungsröhre erhalten ist.

Dieses Resultat, welches man schon vorhersehen konnte, beweis't übrigens, daß es bei sonst gleichen Umständen gleichgültig ist, ob man die eine oder die andere dieser Vorrichtungen anwendet, indem man das Wasser aus dem oberen Behälter entweder am Grunde, wie im ersten Falle, oder von der Oberfläche, wie im zweiten Falle, ableitet; auch würde man zu demselben Schlusse gelangen, wenn sich vor der Oeffnung mn noch ein kleiner Behälter befände, welcher durch eine offene Leitung gespeis't würde, da man sowohl für diese, wie für eine ganz verschlossene Leitung dieselben Formeln findet.

Zusätze in Beziehung auf das veränderliche Regimen der Gewässer in den Kanälen und offenen Röhrenleitungen.

Vorläufige Bemerkung.

§. 79. Sobald das Regimen eines Wasserstromes in allen seinen Theilen gleichförmig ist, d. h. sobald seine Querprofile, sein Gefälle, seine Richtung und die Geschwindigkeiten aller seiner Fäden unveränderlich sind; so äußert die Trägheit bei der Bewegung des Wassers durchaus keine Wirkung und der Druck in seinen verschiedenen Puncten ist offenbar derselbe, als für den Zustand des Gleichgewichtes oder der gewöhnlichen Ruhe. Hieraus folgt, daß sich dieser Druck aus dem atmosphärischen und demjenigen Drucke zusammensetzt, welcher der verticalen Höhe der über dem betrachteten Puncte sich befindenden Wassersäule entspricht. Ferner bilden sich in Folge des Widerstandes des Flußbettes zwischen den Geschwindigkeiten der verschiedenen Puncte Beziehungen, welche für alle übrigen Querschnitte unveränderlich bleiben, so daß es gestattet ist, für alle diese Geschwindigkeiten eine einzige **mittlere Geschwindigkeit** zu substituiren und anzunehmen, daß die Bewegung in ebenen parallelen Schichten erfolge. Von einem

Flusse, welcher sich in einem solchen Zustande befindet, sagt Dubuat, er sei regulirt. Was die lebendige Kraft in einem jeden Querschnitte betrifft, so sieht man leicht ein, daß dieselbe nothwendig etwas größer ist, als die, welche sich aus der Betrachtung der mittleren Geschwindigkeit für die Ausflußmenge ergibt, was übrigens auf die Gleichungen in §. 65 keinen Einfluß hat, da dieselben von jener lebendigen Kraft ganz unabhängig sind.

Aber anders verhält es sich, sobald sich die Richtung, das Profil und das Gefälle des Flußbettes in jedem Puncte des Stromes ändern, oder wenn nur das letztere stärker oder schwächer ist, als das, welches dem gleichförmigen Regimen zukommt. Die Kraft der Trägheit und die Centrifugalkraft (Erster Abschnitt, §§. 13 u. 14) spielen alsdann eine ganz besondere Rolle, um die Geschwindigkeiten und Pressungen in jedem Puncte zu ändern; es entstehen hierdurch Hebungen und Senkungen in der freien Oberfläche des Stromes, welche zwischen den Pressungen der bewegenden Kräfte und denen, welche aus dem Gewichte der Flüssigkeit hervorgehen, das Gleichgewicht erhalten. Wenn die Aenderungen übrigens sehr langsam und allmählig stattfinden, so daß die Querschnitte und das Regimen auf eine ziemlich bedeutende Strecke des Stromes nur wenig variiren, wie es sich häufig, sowohl bei den Kanälen, wie bei den Flüssen ereignet; so wird man keinen merklichen Fehler begehen, wenn man auch dann noch annimmt, daß das Regimen regulirt und gleichförmig sei und daß der Druck in jedem Puncte auf die vorhin angegebene Weise gemessen werde. Betrachtet man aber die Bewegung unter der Voraussetzung, daß sie fortwährend in ebenen Schichten erfolge, welche auf der Richtung des Stromes normal sind und in allen ihren Puncten eine mittlere Geschwindigkeit haben, die sich durch die Division ihrer Fläche in die Ausflußmenge ergibt; so gelangt man durch die Anwendung des Principes der lebendigen Kräfte zu mehreren Resultaten, welche für die Praxis von Wichtigkeit sind und durch die Erfahrung vollkommen bestätigt werden.

Anwendung des Principes der lebendigen Kräfte auf die Ströme mit veränderlichem Regimen.

§. 80. Es seien AB, CD (Fig. 31) zwei Querschnitte eines solchen Stromes, senkrecht auf der Richtung BbD seines Bettes, deren Flächen resp. O und O' und deren mittlere Geschwindigkeiten U und U' sind. ab sei irgend ein dazwischenliegender Querschnitt, welcher ω zur Fläche, ϖ zum benetzten Umfange, u zur mittleren Geschwindigkeit habe und dessen Abstand Bb von AB, längs des Flußbettes gemessen, durch l ausgedrückt werde, indem die Entfernung BD des Querschnittes CD von AB durch L dargestellt wird. Außerdem bezeichne:

dM die flüssige Masse, welche während der Zeit dt durch jeden Querschnitt geht,

Π die Dichtigkeit oder das Gewicht der Volumeneinheit der Flüssigkeit,

Q die Ausflußmenge in der Secunde,

H und H' die Höhen der oberen Wasserspiegel A und C in den Querschnitten AB und CD über irgend einer unteren Horizontalebene,

H_1 und H_1' die Höhen der Schwerpuncte G und g von AB und CD über derselben Ebene,

h und h' ihre respectiven Tiefen unter den oberen Puncten A, C; so wird die Quantität der Wirkung oder Leistung, welche der Flüssigkeit zwischen den Querschnitten AB und CD während der Zeit dt von der Schwere mitgetheilt wird, offenbar ausgedrückt durch:

$$gdM\ (H_1 - H_1').$$

Außer der Schwere wirken aber auf diese Flüssigkeit auch noch Druckkräfte normal gegen die beiden Endschichten AB und CD, deren Summen resp. durch:

$$\Pi Oh \text{ und } \Pi O'h'$$

ausgedrückt werden und deren momentane Wirkungsquantitäten mithin resp. folgende sind:

$$\Pi Oh \cdot Udt = \Pi \cdot Qdt \cdot h = gdMh$$

$$\text{und } -\Pi O'h' \cdot U'dt = -\Pi \cdot Odt \cdot h = -gdMh',$$

also deren Summe, welche von oben nach unten wirkend gedacht wird, gleich:

$$gdM\ (h - h').$$

Addirt man diese Größe zu der, welche sich auf die Wirkung der Schwere bezieht; so erhält man für die Quantität der Wirkung aller dieser Kräfte:

$$gdM\ (H_1 + h - H_1' - h') \text{ oder } gdM\ (H - H'),$$

ein Resultat, welches, streng genommen, schon **a priori** eingesehen werden konnte.

Die Quantität Arbeit, welche während der Zeit dt durch den Widerstand der Wände des Kanales in der Querschicht bei ab aufgehoben wird, kann auch hier durch die Formel:

$$dM \cdot \frac{\tilde{\omega} dl}{\omega}\ (\alpha u + \beta u^2)$$

ausgedrückt werden (§. 29), und es leuchtet ein, daß man nach dem Principe der lebendigen Kräfte mit Auslassung des gemeinschaftlichen Factors dM die Gleichung hat:

$$\frac{U'^2 - U^2}{2} = \frac{U^2}{2}\left(\frac{O^2}{O'^2} - 1\right) = g\,(H - H') - \int_L^0 \frac{\tilde{\omega}}{\omega}\,(\alpha u + \beta u^2)\,dl,$$

deren beide Theile man größerer Genauigkeit wegen mit einem durch Versuche zu bestimmenden Factor multipliciren muß (§. 71), und welche, wenn man den Coefficienten α und β die in §. 66 angegebenen Werthe beilegt, U als Function von L geben würde, sobald das Gesetz bekannt wäre, welches die Größen $\tilde{\omega}$, ω, u und l untereinander verbindet, so daß man die Function unter dem Integralzeichen, welche die Wirkung der Widerstände ausdrückt, unmittelbar integriren könnte.

Um dieses Gesetz zu finden, braucht man nur zu bemerken, daß, wenn man für die beiden beliebigen Querschnitte AB und CD zwei ihnen unendlich nahe liegende ab und $a'b'$ substituirt, das Princip der lebendigen Kräfte ebenso die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} d\,(u^2) = udu = gdH - \frac{\tilde{\omega}}{\omega}\,(\alpha u + \beta u^2)\,dl$$

gibt, worin dH die verticale Höhe des Punctes a über dem Puncte a' des Wasserspiegels darstellt, so daß dieselbe negativ ist, sobald a tiefer liegt als a' und positiv, wenn das Umgekehrte stattfindet.

Differentialgleichung für die Bewegung der Querschichten und Bemerkung über diesen Gegenstand.

§. 81. Man bezeichne den Winkel, welchen das Element $bb' = dl$ (Fig. 32) der Richtung des Kanales mit der Horizontale bildet, mit φ und die Tiefe ab des Stromes über dem Puncte b, welche in senkrechter Richtung auf der Axe des Bettes gemessen ist, mit y. Zieht man nun durch den Punct a parallel zu bb' die Linie ac, welche die benachbarte Ordinate $a'b'$ in c schneidet, und durch den Punct a' die Horizontale $a'a_1'$, welche die Verticale des Punctes a in a_1' trifft; so hat man offenbar:

$$ac = dl,\ a'c = dy \text{ und } aa_1' = -dH.$$

Projicirt man ebenso den Punct c in c_1 auf die Verticale von a vermittelst der Horizontalen cc_1, so hat man auch:

$$\begin{aligned} -dH = aa_1' = a_1'c_1 - ac_1 &= a'c \cos. \varphi - ac \sin. \varphi \\ &= dy \cos. \varphi - dl \sin. \varphi \end{aligned}$$

und mithin:

$$udu = gdl \sin. \varphi - gdy \cos. \varphi - \frac{\tilde{\omega}}{\omega}\,(\alpha u + \beta u^2)\,dl.$$

Es ist aber auch:

$$Q = \omega u,\ u = \frac{Q}{\omega},\ du = -\frac{Qd\omega}{\omega^2},$$

und außerdem sind ω, $\tilde{\omega}$ und φ gegebene Functionen von l und y. Die vorhergehende Gleichung drückt also eine nothwendige Beziehung zwischen l, y, dl und dy aus, woraus sich in jedem besonderen Falle durch Integration die Form des Längenprofiles AaC (Fig. 31) des Wasserspiegels ergibt.

Diese Gleichung ist bis auf die Bezeichnungen dieselbe, welche Belanger in einem vortrefflichen Memoire: **Essai sur la solution numérique de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes, Paris 1828** erhalten hat und aus welcher er mehrere nützliche Folgerungen, die mit den Versuchen von Bidone über den Aufstau des Wassers in Strömen (**Mémoire de l'Académie de Turin, Tome 25, année 1820**) übereinstimmen, gezogen hat.

Integration der fraglichen Gleichung durch Näherung für den Fall, wo das Profil des Bettes und das Gefälle des Stromes constant sind.

§. 82. Nimmt man das Querprofil des Bettes als unveränderlich und das Gefälle gleichförmig an, so daß φ gegeben ist, und bezeichnet mit x die horizontale Breite des Bettes in der Höhe des Wasserspiegels im Querschnitte ω; so hat man offenbar:

$$d\omega = xdy \text{ und mithin: } du = -\frac{Qd\omega}{\omega^2} = -\frac{Q}{\omega^2}\,xdy = -\frac{u}{\omega}\,xdy.$$

Substituirt man diesen letzteren Werth von du in die obige allgemeine Gleichung, so folgt daraus:

$$dl = \frac{\frac{u^2}{\omega} x - g \cos. \varphi}{\frac{\tilde{\omega}}{\omega} (\alpha u + \beta u^2) - g \sin. \varphi} dy.$$

Um den zweiten Theil dieser Gleichung zu integriren, nimmt man für y eine Reihe gleich weit von einander abstehender Werthe an, von dem Werthe y' aus gerechnet, für welchen $l = 0$ ist und welcher als bekannt vorausgesetzt wird; hieraus wird man leicht die entsprechenden Werthe für ω, $\tilde{\omega}$, u und mithin die für den Bruch, in welchem dy multiplicirt ist, berechnen. Wendet man alsdann auf diese Resultate die Methode von Thomas Simpson (Abschnitt I., §. 9) an; so erhält man ohne Schwierigkeit die Werthe von l, welche denen von y zugehören, woraus denn das Gesetz der Bewegung selbst hervorgeht.

Wenn sich um einen Kanal mit rechteckigem und constantem Querschnitte handelt, dessen horizontale Breite gleich b ist; so hat man:

$$x = b,\ \omega = by,\ \tilde{\omega} = b + 2y,\ u = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{by},\ d\omega = bdy = -\frac{Qdu}{u^2}$$

und mithin:

$$dl = \frac{bQ^2 - g \cos. \varphi \omega^3}{Q (b^2 + 2\omega) (\alpha\omega + \beta Q) - g \sin. \varphi \beta \omega^3} d\omega$$

$$= \frac{bQ^2 - g \cos. \varphi b^3 y^3}{Q (b + 2y) (\alpha by + \beta Q) - g \sin. \varphi b^3 y^3} dy.$$

Das allgemeine Integral einer jeden dieser Gleichungen würde das Gesetz ergeben, durch welches die Werthe von l mit denen von ω oder von y verbunden sind. Was die Beziehung zwischen l und u anlangt, so würde dieselbe durch die Integration der Gleichung:

$$dl = \frac{Q (Qg \cos. \varphi - bu^3)}{u^2 \left\{ (b^2 u + 2Q) (\alpha u + \beta u^2) - g \sin. \varphi b Q \right\}} du$$

gegeben sein; da aber diese Integration, ebenso wie die vorhergehende, die Auflösung einer Gleichung vom dritten Grade erfordert, sobald nicht $\sin. \varphi$ oder das Gefälle Null ist; so wird es immer einfacher sein, den vorher angegebenen Weg der Näherung einzuschlagen.

Uebrigens findet man in der Abhandlung von Belanger verschiedene numerische Anwendungen, welche zeigen, daß die Rechnungen nicht so complicirt sind, wie es von vorn herein der Fall zu sein scheint.

Verschiedene Folgerungen aus der obigen Gleichung.

§. 83. Legt man in der allgemeinen Gleichung:

$$dl = \frac{\frac{u^2}{\omega} x - g \cos. \varphi}{\frac{\tilde{\omega}}{\omega} (\alpha u + \beta u^2) - g \sin. \varphi} dy$$

dem y verschiedene auf einander folgende Werthe bei, woraus sich denn auch die entsprechenden Werthe von ω, $\tilde{\omega}$ und u ergeben, und findet man, daß der Nenner des Bruches eher Null wird, als sein Zähler; so hat man gleichzeitig:

$$\frac{\tilde{\omega}}{\omega}(\alpha u + \beta u^2) - g \sin. \varphi = 0,\ \frac{dy}{dl} = 0.$$

Hieraus geht offenbar hervor (§. 65), daß das Regimen für den zugehörigen Werth von l gleichförmig oder daß der obere Wasserspiegel dem Grundbette parallel geworden ist; da dl aber vor diesem Augenblicke sehr große Werthe annimmt, so wächst auch l äußerst rasch, und, streng genommen, wird das Regimen erst in unendlicher Entfernung gleichförmig.

Wenn dagegen der Zähler des obigen Bruches eher verschwindet, als sein Nenner, so hat man zu gleicher Zeit:

$$\frac{u^2}{\omega} x - g \cos. \varphi = 0,\ \frac{dy}{dl} = \infty.$$

Hieraus folgt, daß der obere Wasserspiegel für den correspondirenden Werth von u oder l vertical geworden sei, und da die Werthe von dl von diesem Puncte aus das Zeichen wechseln; so sieht man, daß jener Wasserspiegel über sich selbst zurückkehren müßte, was eine Absurdität ist und anzeigt, daß die Hypothese der parallelen Schichten in der Nähe des fraglichen Punctes unzulässig wird und daß in dem Regimen des Stromes eine plötzliche Aenderung vor sich geht.

Bestätigung dieser Schlüsse durch die Erfahrung; Aufstau des Wassers durch Einbaue.

§. 84. Wenn man die vorstehenden Folgerungen mit dem Ergebnisse der Versuche von Bidone über aufgestaute Ströme vergleicht, in denen das Wasser gezwungen wird, sich bis zu einem gewissen stromaufwärts belegenen Puncte zu erheben oder aufzuschwillen, indem es daselbst sich plötzlich senkt und mit der überflüssigen Wassermenge einen Vorsprung bildet (Fig. 33); so findet man mit Belanger, daß die obige Formel auf eine sehr befriedigende Weise die verschiedenen Umstände jener Erscheinung darstellt.

Denn bezeichnet man mit U die mittlere Geschwindigkeit in dem stromaufwärts liegenden Querschnitte AB, welcher der plötzlichen Erhebung unmittelbar vorhergeht, mit U' die Geschwindigkeit des abwärts liegenden Querschnittes CD, mit $H - H'$ die Höhendifferenz zwischen den höchsten Puncten dieser Querschnitte; so hat man:

$$U'^2 - U^2 = 2g\,(H - H')\ \text{oder}\ \frac{U^2}{2g} - \frac{U'^2}{2g} = H' - H,$$

eine Beziehung, welche sich aus der Gleichung des §. 80 unmittelbar ergibt, wenn man auf die geringe Strecke des Kanales zwischen AB und CD die Widerstände vernachlässigt, und welche nach Belanger den Satz enthält, daß die Höhe der plötzlichen Erhebung gleich ist der Differenz zwischen den Fallhöhen, welche den Geschwindigkeiten des Stromes über und unter jener Erhebung entsprechen.

Da dieses Resultat durch die Beobachtungen von **Bidone** ziemlich genau bestätigt wird; so folgt, daß die Aenderung in dem Regimen des Stromes ohne merklichen Verlust an lebendiger Kraft vor sich geht, ein Umstand, der darin seinen Grund hat, daß hier keine Wirbel oder divergirende Ablenkungen in der Bewegung der Stromfäden stattfinden, wie dieses der Fall sein würde, wenn der Kanal selbst an der fraglichen Stelle eine plötzliche Einengung darböte (§. 24).

Bestimmung der Höhe des Vorsprunges oder der Erhebung.

§. 85. Nimmt man an, daß der Kanal rechtwinklig und sein Gefälle sehr schwach ist, bezeichnet mit h die Tiefe bei AB, mit h' die bei CD und endlich mit ξ die wirkliche Höhe $H'-H$ des Vorsprunges; so hat man sehr nahe:

$$\xi = h' - h,\ U'^2 = \frac{h^2}{h'^2}\,U^2 = \frac{h^2}{(\xi + h)^2}\,U^2,$$

und mithin:

$$H' - H = \xi = \frac{U^2}{2g}\left[1 - \frac{h^2}{(\xi + h)^2}\right],$$

woraus sich, wenn man $\frac{U^2}{2g} = \varepsilon$ setzt, die Formel ergibt:

$$\xi = \frac{\varepsilon}{2} - h + \sqrt{\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{4} + h\right)},$$

welche zur Berechnung von ξ dient, sobald h und U bekannt sind.

Bestimmung der Geschwindigkeit, des Querschnittes und der Ausflußmenge an der unteren Ausmündung des Stromes.

§. 86. Da das Regimen beim Einflusse in einen Kanal wesentlich von dem abhängt, welches er stromabwärts oder bei der Ausmündung annimmt, und da von jenem ersteren Regimen, wie man im §. 58 gesehen hat, auch die Ausflußmenge in der oberen Speiseöffnung abhängen kann; so muß man zuvörderst die Vorgänge bei der Ausmündung betrachten, um dadurch entweder die Ausflußmenge vermittelst der früheren Regeln direct zu berechnen, oder wenigstens die Höhe und die Geschwindigkeit der Querschnitte in diesem Puncte dergestalt zu ermitteln, daß man im Stande ist, nach und nach das Regimen des Kanales in den successiven höher liegenden Querschnitten bis zu der Einmündung hinauf zu bestimmen.

In dem Falle der obigen Fig. 33 z. B., wo der Kanal durch ein Ueberfallrohr geschlossen ist, hat man zur Bestimmung der Ausflußmenge oder der Wasserhöhe H' über dem Scheitel des Ueberfalles (§. 55 und 56) die Formel:

$$Q = 0{,}4\,lH'\sqrt{2g\left(H' + \frac{U'^2}{2g}\right)} = O'U',$$

wenn O' den Querschnitt $C'D'$ des Kanales bezeichnet, in welchem man die höchste Druckhöhe H' über dem Scheitel des Ueberfalles mißt und für welchen die mittlere Geschwindigkeit durch U' dargestellt wird.

Die letzte Gleichung gibt U' und mithin Q, wenn O' und H' direct gemessen sind, oder H' und U', wenn Q a priori bekannt ist, indem man beachtet, daß O' eine Function von H' und von der Höhe des Stauwerkes ist.

Dieselben Formeln sind übrigens anwendbar, welches auch diese Höhe des Stauwerkes sei, so daß die letztere auch $= 0$ werden kann, vorausgesetzt, daß der Kanal immer in die freie Luft ausmündet.

Wenn sich dagegen der Kanal in einen unteren Behälter oder Wasserstrom ergießt (Fig. 34), dessen allgemeiner Wasserstand bekannt ist; so erhält man zwar die Wassertiefe im Querschnitte O' der Einmündung, aber nicht U' und Q, welche man durch directe Beobachtungen an der Stelle des Wasserfanges oder an einem anderen Theile des Stromes, wo das Regimen ziemlich gleichförmig ist und die Ausflußmenge ermittelt werden kann (§. 66), bestimmen muß.

Erhebt sich endlich der Scheitel des Stauwerkes über den Wasserspiegel im Kanale und befindet sich die Oeffnung nahe am Grunde und ist daselbst durch ein Schützbrett abgeschlossen (Fig. 35); so kann man sich zu dem obigen Zwecke der Formeln:

$$Q = O'U' = m\omega V, \; V = \sqrt{\frac{2gH'}{1 - \frac{m^2\omega^2}{O'^2}}}$$

bedienen, worin ω, V und m resp. die Fläche, die Geschwindigkeit und den Contractionscoefficienten für die Ausflußöffnung bezeichnen, welche als frei in die Luft sich mündend angenommen wird.

Bestimmung des Regimens des Stromes von der unteren Ausmündung aufwärts.

§. 87. Nachdem nun die Größen O', U' für den Querschnitt O' des Kanales, welcher nahe über der Ausmündung liegt, bekannt sind, schreitet man zu der Berechnung der successiven Werthe für l, von dem erwähnten Querschnitte ausgehend, mit Hülfe der Formel des §. 82, in welcher man hier das Zeichen von dl oder des Factors von dy umkehren muß, weil man von den unteren Querschnitten des Kanales zu den oberen fortschreiten will; man hat also die Beziehung:

$$l = \int \frac{g\, cos.\, \varphi - \frac{u^2}{\omega}\, x}{\frac{\tilde{\omega}}{\omega}(\alpha u + \beta u^2) - g\, sin.\, \varphi}\, dy,$$

aus welcher sich die Gestalt des oberen Wasserspiegels bis an die Stelle der plötzlichen Erhebung, wenn eine solche wirklich vorkommt, oder bis an den Wasserfang bei AB ergibt, wenn dieser Spiegel eine stetige Fläche bildet, so daß der Ausdruck:

$$g\, cos.\, \varphi - \frac{u^2}{\omega}\, x$$

für den betrachteten Zwischenraum niemals Null wird.

Im ersten Falle wird die Lage, sowie die Höhe ξ der plötzlichen Erhebung des Wasserspiegels vermittelst der oben entwickelten Formeln bestimmt. Hierdurch erfährt man denn auch das Regimen in dem weiter aufwärts liegenden Querschnitte des Stromes und kann daraus das für die verschiedenen höher liegenden Querschnitte bis nahe an den Wasserfang ableiten, indem man immer auf dieselbe Weise die Formel für l in Anwendung bringt. Da sich dieser Fall im Allgemeinen nur bei einem Kanale mit sehr starkem Gefälle ereignet, wobei auch die Geschwindigkeit in der oberen Einmündung sehr bedeutend ist; so sieht man (§. 58), daß die Ausflußmenge daselbst fast ebenso groß sein wird, als wenn der Kanal ganz fehlte.

Einfluß des Regimens des Stromes auf die Ausflußmenge und das Gefälle, welches sich bei dem Wasserfange bildet.

§. 88. Das obige Integral setzt übrigens in den Stand, in gewissen Fällen vorherzusehen, ob die Widerstände des Kanales einen Einfluß auf die Ausströmung des Wassers aus der Speiseöffnung haben können; denn wenn die Werthe von l in der Nähe dieser Oeffnung in demselben Sinne wachsen, wie die von ω oder y, d. h. wenn der Factor von dy, nämlich:

$$\frac{g \cos. \varphi - \frac{u^2}{\omega} x}{\frac{\varpi}{\omega}(\alpha u + \beta u^2) - g \sin. \varphi}$$

an jenem Orte positiv ist; so ist dieses ein sicheres Zeichen, daß die Wirkung der Schwere zur Ueberwindung der Widerstände des Kanales hinreicht, so daß die Gegenwart des letzteren die Ausflußmenge durchaus nicht verändern kann, und selbst dann nicht, wenn derselbe die genaue Verlängerung der Seitenwände der Oeffnung bildete, noch viel weniger aber in allen den Fällen, wo er nach allen Seiten von der Oeffnung getrennt ist. Findet jene Bedingung aber nicht statt, so kann die Ausflußmenge, wie man in §. 58 gesehen hat, nach einem Gesetze geändert werden, welches noch ermittelt werden muß.

Was den Fall betrifft, wo die Rechnung anzeigte, daß die plötzliche Erhebung des Wasserspiegels viel weiter von der Ausmündung des Kanales zurückläge, als die Speiseöffnung, wo also der Wasserstrahl und diese Oeffnung entweder ganz oder theilweise von der Anschwellung des Kanales um eine Höhe bedeckt wird, welche sich durch die Rechnung ergibt; so kann das Gefälle, welches sich unterhalb des Wasserfanges bildet, vermittelst der Formeln des §. 78 bestimmt werden.

Aus dieser Untersuchung sieht man, wie man a priori und nach und nach den Zustand des Regimens eines Wasserstromes in seinen verschiedenen Theilen und die Höhe des Gefälles an den Stellen ermitteln kann, wo dasselbe eine plötzliche Aenderung erleidet; man muß hierbei aber beachten, daß es zu diesem Ende durchaus erforderlich ist, daß die Ausflußmenge oder die Geschwindigkeit und der Querschnitt entweder a priori oder durch Beobachtung in einem gewissen Puncte gegeben sei, wo das Regimen constant geworden ist.

Fallhöhen, welche verschiedenen Geschwindigkeiten entsprechen, in Metern ausgedrückt.

Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.
0m,01	0,00001	0m,43	0,0094	0m,85	0,0368	1m,27	0,0822	1m,69	0,1456
0,02	0,00002	0,44	0,0098	0,86	0,0377	1,28	0,0835	1,70	0,1473
0,03	0,00005	0,45	0,0103	0,87	0,0386	1,29	0,0848	1,71	0,1490
0,04	0,00009	0,46	0,0108	0,88	0,0395	1,30	0,0861	1,72	0,1508
0,05	0,00013	0,47	0,0112	0,89	0,0404	1,31	0,0875	1,73	0,1525
0,06	0,00019	0,48	0,0117	0,90	0,0413	1,32	0,0888	1,74	0,1543
0,07	0,00026	0,49	0,0122	0,91	0,0422	1,33	0,0901	1,75	0,1561
0,08	0,00034	0,50	0,0127	0,92	0,0431	1,34	0,0915	1,76	0,1579
0,09	0,00043	0,51	0,0132	0,93	0,0441	1,35	0,0929	1,77	0,1597
0,10	0,00051	0,52	0,0138	0,94	0,0450	1,36	0,0943	1,78	0,1615
0,11	0,00062	0,53	0,0143	0,95	0,0460	1,37	0,0957	1,79	0,1633
0,12	0,00074	0,54	0,0148	0,96	0,0470	1,38	0,0970	1,80	0,1651
0,13	0,00087	0,55	0,0154	0,97	0,0480	1,39	0,0984	1,81	0,1670
0,14	0,00101	0,56	0,0160	0,98	0,0490	1,40	0,0999	1,82	0,1688
0,15	0,00115	0,57	0,0165	0,99	0,0500	1,41	0,1013	1,83	0,1707
0,16	0,00131	0,58	0,0171	1,00	0,0510	1,42	0,1028	1,84	0,1726
0,17	0,00148	0,59	0,0177	1,01	0,0520	1,43	0,1042	1,85	0,1745
0,18	0,00166	0,60	0,0184	1,02	0,0530	1,44	0,1057	1,86	0,1763
0,19	0,00185	0,61	0,0190	1,03	0,0541	1,45	0,1072	1,87	0,1782
0,20	0,00204	0,62	0,0196	1,04	0,0551	1,46	0,1086	1,88	0,1801
0,21	0,00225	0,63	0,0202	1,05	0,0562	1,47	0,1101	1,89	0,1820
0,22	0,00247	0,64	0,0209	1,06	0,0573	1,48	0,1116	1,90	0,1840
0,23	0,00270	0,65	0,0215	1,07	0,0584	1,49	0,1131	1,91	0,1859
0,24	0,00294	0,66	0,0222	1,08	0,0595	1,50	0,1147	1,92	0,1878
0,25	0,00319	0,67	0,0229	1,09	0,0606	1,51	0,1162	1,93	0,1898
0,26	0,00345	0,68	0,0236	1,10	0,0617	1,52	0,1177	1,94	0,1918
0,27	0,00372	0,69	0,0243	1,11	0,0628	1,53	0,1193	1,95	0,1938
0,28	0,00400	0,70	0,0250	1,12	0,0639	1,54	0,1209	1,96	0,1958
0,29	0,00429	0,71	0,0257	1,13	0,0651	1,55	0,1225	1,97	0,1978
0,30	0,00459	0,72	0,0264	1,14	0,0662	1,56	0,1241	1,98	0,1998
0,31	0,00490	0,73	0,0272	1,15	0,0674	1,57	0,1257	1,99	0,2018
0,32	0,00522	0,74	0,0279	1,16	0,0686	1,58	0,1273	2,00	0,2039
0,33	0,00555	0,75	0,0287	1,17	0,0698	1,59	0,1289	2,01	0,2059
0,34	0,00589	0,76	0,0295	1,18	0,0710	1,60	0,1305	2,02	0,2080
0,35	0,00624	0,77	0,0302	1,19	0,0722	1,61	0,1321	2,03	0,2100
0,36	0,00660	0,78	0,0310	1,20	0,0734	1,62	0,1337	2,04	0,2121
0,37	0,00697	0,79	0,0318	1,21	0,0746	1,63	0,1354	2,05	0,2142
0,38	0,00735	0,80	0,0326	1,22	0,0758	1,64	0,1371	2,06	0,2163
0,39	0,00775	0,81	0,0334	1,23	0,0771	1.65	0,1388	2,07	0,2184
0,40	0,00816	0,82	0,0343	1,24	0,0783	1,66	0,1405	2,08	0,2205
0,41	0,0086	0,83	0,0351	1,25	0,0797	1,67	0,1422	2,09	0,2226
0,42	0,0090	0,84	0,0360	1,26	0,0809	1,68	0,1439	2,10	0,2248

Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.
2^m,11	0,2269	2^m,55	0,3315	2^m,99	0,4557	3^m,43	0,5997	3^m,87	0,7634
2,12	0,2291	2,56	0,3341	3,00	0,4588	3,44	0,6032	3,88	0,7674
2,13	0,2313	2,57	0,3367	3,01	0,4618	3,45	0,6067	3,89	0,7713
2,14	0,2234	2,58	0,3393	3,02	0,4649	3,46	0,6102	3,90	0,7753
2,15	0,2356	2,59	0,3419	3,03	0,4680	3,47	0,6138	3,91	0,7763
2,16	0,2378	2,60	0,3446	3,04	0,4711	3,48	0,6173	3,92	0,7803
2,17	9,2400	2,61	0,3472	3,05	0,4742	3,49	0,6209	3,93	0,7843
2,18	0,2422	2,62	0,3499	3,06	0,4773	3,50	0,6244	3,94	0,7883
2,19	0,2444	2,63	0,3526	3,07	0,4804	3,51	0,6280	3,95	0,7953
2,20	0,2467	2,64	0,3553	3,08	0,4835	3,52	0,6316	3,96	0,7993
2,21	0,2490	2,65	0,3580	3,09	0,4866	3,53	0,6352	3,97	0,8034
2,22	0,2512	2,66	0,3607	3,10	0,4899	3,54	0,6388	3,98	0,8074
2,23	0,2535	2,67	0,3634	3,11	0,4930	3,55	0,6424	3,99	0,8115
2,24	0,2557	2,68	0,3661	3,12	0,4962	3,56	0,6460	4,00	0,8156
2,25	0,2580	2,69	0,3688	3,13	0,4994	3,57	0,6497	4,01	0,8197
2,26	0,2603	2,70	0,3716	3,14	0,5026	3,58	0,6533	4,02	0,8238
2,27	0,2626	2,71	0,3744	3,15	0,5058	3,59	0,6569	4,03	0,8279
2,28	0,2649	2,72	0,3771	3,16	0,5090	3,60	0,6606	4,04	0,8320
2,29	0,2673	2,73	0,3799	3,17	0,5122	3,61	0,6643	4,05	0,8361
2,30	0,2696	2,74	0,3827	3,18	0,5155	3,62	0,6680	4,06	0,8402
2,31	0,2720	2,75	0,3855	3,19	0,5187	3,63	0,6717	4,07	0,8444
2,32	0,2743	2,76	0 3883	3,20	0,5220	3,64	0,6754	4,08	0,8485
2,33	0,2767	2,77	0,3911	3,21	0,5252	3,65	0,6791	4,09	0,8527
2,34	0,2791	2,78	0,3939	3,22	0,5285	3,66	0,6828	4,10	0,8569
2,35	0,2815	2,79	0,3967	3,23	0,5318	3,67	0,6866	4,11	0,8611
2,36	0,2839	2,80	0,3996	3,24	0,5351	3,68	0,6903	4,12	0,8653
2,37	0,2863	2,81	0,4025	3,25	0,5384	3,69	0,6940	4,13	0,8695
2,38	0,2887	2,82	0,4054	3,26	0,5417	3,70	0,6978	4,14	0,8737
2,39	0,2911	2,83	0,4082	3,27	0,5450	3,71	0,7016	4,15	0,8779
2,40	0,2936	2,84	0,4111	3,28	0,5484	3,72	0,7054	4,16	0,8821
2,41	0,2960	2,85	0,4140	3,29	0,5517	3,73	0,7092	4,17	0,8864
2,42	0,2985	2,86	0,4169	3,30	0,5551	3,74	0,7130	4,18	0,8906
2,43	0,3010	2,87	0,4198	3,31	0,5585	3,75	0,7168	4,19	0,8949
2,44	0,3034	2,88	0,4228	3,32	0,5618	3,76	0,7206	4,20	0,8992
2,45	0,3060	2,89	0,4257	3,33	0,5652	3,77	0,7245	4,21	0,9035
2,46	0,3085	2,90	0,4287	3,34	0,5686	3,78	0,7283	4,22	0,9078
2,47	0,3110	2,91	0,4316	3,35	0,5721	3,79	0,7322	4,23	0,9121
2,48	0,3135	2,92	0,4346	3,36	0,5755	3,80	0,7361	4,24	0,9164
2,49	0,3160	2,93	0,4376	3,37	0,5789	3,81	0,7400	4,25	0,9207
2,50	0,3186	2,94	0,4406	3,38	0,5823	3,82	0,7438	4,26	0,9251
2,51	0,3211	2,95	0,4436	3,39	0,5858	3,83	0,7478	4,27	0,9294
2,52	0,3237	2,96	0,4466	3,40	0,5893	3,84	0,7517	4,28	0,9337
2,53	0,3263	2,97	0,4496	3,41	0,5927	3,85	0,7556	4,29	0,9381
2,54	0,3289	2,98	0,4526	3,42	0,5962	3,86	0,7595	4,30	0,9425

Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.
4^{m},31	0,9469	4^{m},75	1,1501	5^{m},19	1,3730	5^{m},63	1,6157	6^{m},07	1,8782
4,32	0,9513	4,76	1,1549	5,20	1,3784	5,64	1,6215	6,08	1,8843
4,33	0,9557	4,77	1,1598	5,21	1,3837	5,65	1,6272	6,09	1,8905
4,34	0,9601	4,78	1,1647	5,22	1,3890	5,66	1,6330	6,10	1,8968
4,35	0,9646	4,79	1,1695	5,23	1,3943	5,67	1,6388	6,11	1,9030
4,36	0,9690	4,80	1,1744	5,24	1,3996	5,68	1,6446	6,12	1,9092
4,37	0,9734	4,81	1,1793	5,25	1,4050	5,69	1,6503	6,13	1,9155
4,38	0,9779	4,82	1,1842	5,26	1,4103	5,70	1,6562	6,14	1,9217
4,39	0,9823	4,83	1,1891	5,27	1,4157	5,71	1,6620	6,15	1,9280
4,40	0,9869	4,84	1,1941	5,28	1,4211	5,72	1,6678	6,16	1,9343
4,41	0,9913	4,85	1,1990	5,29	1,4265	5,73	1,6736	6,17	1,9405
4,42	0,9958	4,86	1,2040	5,30	1,4319	5,74	1,6795	6,18	1,9468
4,43	1,0003	4,87	1,2090	5,31	1,4373	5,75	1,6854	6,19	1,9531
4,44	1,0048	4,88	1,2139	5,32	1,4427	5,76	1,6912	6,20	1,9595
4,45	1,0094	4,89	1,2189	5,33	1,4481	5,77	1,6971	6,21	1,9658
4,46	1,0140	4,90	1,2239	5,34	1,4535	5,78	1,7030	6,22	1,9721
4,47	1,0185	4,91	1,2289	5,35	1,4590	5,79	1,7089	6,23	1,9785
4,48	1,0231	4,92	1,2339	5,36	1,4645	5,80	1,7148	6,24	1,9848
4,49	1,0276	4,93	1,2389	5,37	1,4699	5,81	1,7207	6,25	1,9912
4,50	1,0322	4,94	1,2440	5,38	1,4754	5,82	1,7266	6,26	1,9976
4,51	1,0368	4,95	1,2490	5,39	1,4809	5,83	1,7326	6,27	2,0039
4,52	1,0414	4,96	1,2541	5,40	1,4864	5,84	1,7385	6,28	2,0103
4,53	1,0460	4,97	1,2591	5,41	1,4919	5,85	1,7445	6,29	2,0167
4,54	1,0507	4,98	1,2642	5,42	1,4975	5,86	1,7505	6,30	2,0232
4,55	1,0553	4,99	1,2693	5,43	1,5030	5,87	1,7564	6,31	2,0296
4,56	1,0599	5,00	1,2744	5,44	1,5085	5,88	1,7624	6,32	2,0361
4,57	1,0646	5,01	1,2795	5,45	1,5141	5,89	1,7684	6,33	2,0425
4,58	1,0692	5,02	1,2846	5,46	1,5196	5,90	1,7744	6,34	2,0490
4,59	1,0739	5,03	1,2897	5,47	1,5252	5,91	1,7805	6,35	2,0554
4,60	1,0786	5,04	1,2948	5,48	1,5308	5,92	1,7865	6,36	2,0619
4,61	1,0833	5,05	1,3000	5,49	1,5364	5,93	1,7925	6,37	2,0684
4,62	1,0880	5,06	1,3051	5,50	1,5420	5,94	1,7986	6,38	2,0749
4,63	1,0927	5,07	1,3103	5,51	1,5476	5,95	1,8046	6,39	2,0814
4,64	1,0974	5,08	1,3155	5,52	1,5532	5,96	1,8107	6,40	2,0879
4,65	1,1022	5,09	1,3206	5,53	1,5588	5,97	1,8168	6,41	2,0945
4,66	1,1069	5,10	1,3258	5,54	1,5645	5,98	1,8229	6,42	2,1010
4,67	1,1117	5,11	1,3311	5,55	1,5701	5,99	1,8290	6,43	2,1075
4,68	1,1164	5,12	1,3363	5,56	1,5758	6,00	1,8351	6,44	2,1141
4,69	1,1212	5,13	1,3415	5,57	1,5815	6,01	1,8412	6,45	2,1207
4,70	1,1260	5,14	1,3467	5,58	1,5872	6,02	1,8473	6,46	2,1273
4,71	1,1308	5,15	1,3520	5,59	1,5929	6,03	1,8535	6,47	2,1388
4,72	1,1356	5,16	1,3572	5,60	1,5986	6,04	1,8596	6,48	2,1404
4,73	1,1404	5,17	1,3625	5,61	1,6043	6,05	1,8658	6,49	2,1471
4,74	1,1452	5,18	1,3678	5,62	1,6100	6,06	1,8720	6,50	2,1537

Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.
6m,51	2,1603	6m,95	2,4622	7m,39	2,7838	7m,83	3,1252	8m,27	3,4863
6,52	2,1670	6,96	2,4693	7,40	2,7914	7,84	3,1332	8,28	3,4947
6,53	2,1736	6,97	2,4764	7,41	2,7989	7,85	3,1412	8,29	3,5032
6,54	2,1803	6,98	2 4835	7,42	2,8065	7,86	3,1492	8,30	3,5116
6,55	2,1869	6,99	2,4906	7,43	2,8140	7,87	3,1572	8,31	3,5201
6,56	2,1936	7,00	2,4978	7,44	2,8216	7,88	3,1652	8,32	3,5286
6,57	2,2003	7,01	2,5049	7,45	2,8292	7,89	3,1733	8,33	3,5371
6,58	2,2070	7,02	2,5121	7,46	2,8368	7,90	3,1813	8,34	3,5455
6,59	2,2137	7,03	2,5192	7,47	2,8444	7,91	3,1894	8,35	3,5541
6,60	2,2205	7,04	2,5264	7,48	2,8521	7,92	3,1974	8,36	3,5626
6,61	2,2272	7,05	2,5336	7,49	2,8597	7,93	3,2055	8,37	3,5711
6,62	2,2339	7,06	2,5408	7,50	2,8673	7,94	3,2136	8,38	3,5796
6,63	2,2407	7,07	2,5480	7,51	2,8750	7,95	3,2217	8,39	3,5882
6,64	2,2474	7,08	2,5552	7,52	2,8826	7,96	3,2298	8,40	3,5968
6,65	2,2542	7,09	2,5624	7,53	2,8903	7,97	3,2380	8,41	3,6053
6,66	2,2610	7,10	2,5696	7,54	2,8980	7,98	3,2461	8,42	3,6139
6,67	2,2678	7,11	2,5769	7,55	2,9057	7,99	3,2542	8,43	3,6225
6,68	2,2746	7,12	2,5841	7,56	2,9134	8,00	3,2624	8,44	3,6311
6,69	2,2814	7,13	2,5914	7,57	2,9211	8,01	3,2705	8,45	3,6397
6,70	2,2883	7,14	2,5987	7,58	2,9288	8,02	3,2787	8,46	3,6483
6,71	2,2951	7,15	2,6060	7,59	2,9365	8,03	3,2869	8,47	3,6570
6,72	2,3019	7,16	2,6132	7,60	2 9443	8,04	3,2951	8,48	3,6656
6,73	2,3088	7,17	2,6205	7,61	2,9520	8,05	3,3033	8,49	3,6743
6,74	2,3156	7,18	2,6279	7,62	2,9598	8,06	3,3115	8,50	3,6829
6,75	2,3225	7,19	2,6352	7,63	2,9676	8,07	3,3197	8,51	3,6916
6,76	2,3294	7,20	2,6425	7,64	2,9754	8,08	3,3280	8,52	3,7003
6,77	2,3363	7,21	2,6499	7,65	2,9832	8,09	3,3362	8,53	3,7090
6,78	2,3432	7,22	2,6572	7,66	2,9910	8,10	3,3445	8,54	3,7177
6,79	2,3501	7,23	2,6646	7,67	2,9988	8,11	3,3527	8,55	3,7264
6,80	2,3571	7,24	2,6720	7,68	3,0066	8,12	3,3610	8,56	3,7351
6,81	2,3640	7,25	2,6794	7,69	3,0144	8,13	3,3693	8,57	3,7438
6,82	2,3709	7,26	2,6868	7,70	3,0223	8,14	3,3736	8,58	3,7526
6,83	2,3779	7,27	2,6942	7,71	3,0301	8,15	3,3859	8,59	3,7613
6,84	2,3849	7,28	2,7016	7,72	3,0380	8,16	3,3942	8,60	3,7701
6,85	2,3919	7,29	2,7090	7,73	3,0459	8,17	3,4025	8,61	3,7789
6,86	2,3989	7,30	2,7164	7,74	3,0538	8,18	3,4108	8,62	3,7876
6,87	2,4059	7,31	2,7239	7,75	3,0617	8,19	3,4192	8,63	3,7964
6,88	2,4129	7,32	2,7313	7,76	3,0696	8,20	3,4275	8,64	3,8052
6,89	2,4199	7,33	2,7388	7,77	3,0775	8,21	3,4359	8,65	3,8141
6,90	2,4269	7,34	2,7463	7,78	3,0854	8,22	3,4443	8,66	3,8229
6,91	2,4339	7,35	2,7538	7,79	3,0933	8,23	3,4526	8,67	3,8317
6,92	2,4410	7,36	2,7613	7,80	3,1013	8,24	3,4610	8,68	3,8405
6,93	2,4481	7,37	2,7688	7,81	3,1092	8,25	3,4695	8,69	3,8494
6,94	2,4551	7,38	2,7763	7,82	3,1172	8,26	3,4779	8,70	3,8583

Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.	Geschwindigkeit.	entsprechende Höhe.
8^m,71	3,8671	8^m,82	3,9654	8^m,93	4,0650	9^m,04	4,1657	9^m,15	4,2677
8,72	3,8760	8,83	3,9744	8,94	4,0741	9,05	4,1750	9,16	4,2771
8,73	3,8849	8,84	3,9834	8,95	4,0832	9,06	4,1832	9,17	4,2864
8,74	3,8938	8,85	3,9925	8,96	4,0923	9,07	4,1924	9,18	4,2958
8,75	3,9028	8,86	4,0015	8,97	4,1015	9,08	4,2017	9,19	4,3051
8,76	3,9117	8,87	4,0105	8,98	4,1106	9,09	4,2109	9,20	4,3145
8,77	3,9206	8,88	4,0196	8,99	4,1198	9,10	4,2212	9,21	4,3238
8,78	3,9295	8,89	4,0286	9,00	4,1290	9,11	4,2305	9,22	4,3333
8,79	3,9385	8,90	4,0377	9,01	4,1381	9,12	4,2398	9,23	4,3426
8,80	3,9475	8,91	4,0468	9,02	4,1473	9,13	4,2491	9,24	4,3520
8,81	3,9565	8,92	4,0559	9,03	4,1565	9,14	4,1584		

Tafel der hyperbolischen Logarithmen, von Hundertstel zu Hundertstel der Einheit für die Zahlen von 1 bis 10 und von Einheit zu Einheit für die Zahlen von 10 bis 100 berechnet.

Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.
1,00	0,0000000	1,22	0,1988508	1,44	0,3646431	1,66	0,5068175
1,01	0,0099503	1,23	0,2070141	1,45	0,3715635	1,67	0,5128236
1,02	0,0198026	1,24	0,2151113	1,46	0,3784364	1,68	0,5187937
1,03	0,0295588	1,25	0,2231435	1,47	0,3852624	1,69	0,5247285
1,04	0,0392207	1,26	0,2311117	1,48	0,3920420	1,70	0,5306282
1,05	0,0487902	1,27	0,2390169	1,49	0,3987761	1,71	0,5364933
1,06	0,0582689	1,28	0,2468600	1,50	0,4054651	1,72	0,5423242
1,07	0,0676586	1,29	0,2546422	1,51	0,4121096	1,73	0,5481214
1,08	0,0769610	1,30	0,2623642	1,52	0,4187103	1,74	0,5538851
1,09	0,0861777	1,31	0,2700271	1,53	0,4252677	1,75	0,5596157
1,10	0,0953102	1,32	0,2776317	1,54	0,4317824	1,76	0,5653138
1,11	0,1043600	1,33	0,2851789	1,55	0,4382549	1,77	0,5709795
1,12	0,1133287	1,34	0,2926696	1,56	0,4446858	1,78	0,5766133
1,13	0,1222176	1,35	0,3001045	1,57	0,4510756	1,79	0,5822156
1,14	0,1310283	1,36	0,3074846	1,58	0,4574248	1,80	0,5877866
1,15	0,1397619	1,37	0,3148107	1,59	0,4637340	1,81	0,5933268
1,16	0,1484200	1,38	0,3220834	1,60	0,4700036	1,82	0,5988365
1,17	0,1570037	1,39	0,3293037	1,61	0,4762341	1,83	0,6043159
1,18	0,1655144	1,40	0,3364722	1,62	0,4824261	1,84	0,6097655
1,19	0,1739533	1,41	0,3435897	1,63	0,4885800	1,85	0,6151856
1,20	0,1823215	1,42	0,3506568	1,64	0,4946962	1,86	0,6205764
1,21	0,1906203	1,43	0,3576744	1,65	0,5007752	1,87	0,6259384

Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.
1,88	0,6312717	2,32	0,8415671	2,76	1,0152306	3,20	1,1631508
1,89	0,6365768	2,33	0,8458682	2,77	1,0188473	3,21	1,1662709
1,90	0,6418538	2,34	0,8501509	2,78	1,0224509	3,22	1,1693813
1,91	0,6471032	2,35	0,8544153	2,79	1,0260415	3,23	1,1724821
1,92	0,6523251	2,36	0,8586616	2,80	1,0296194	3,24	1,1755733
1,93	0,6575200	2,37	0,8628899	2,81	1,0331844	3,25	1,1786549
1,94	0,6626879	2,38	0,8671004	2,82	1,0367368	3,26	1,1817271
1,95	0,6678293	2,39	0,8712933	2,83	1,0402766	3,27	1,1847899
1,96	0,6729444	2,40	0,8754687	2,84	1,0438040	3,28	1,1878434
1,97	0,6780335	2,41	0,8796267	2,85	1,0473189	3,29	1,1908875
1,98	0,6830968	2,42	0,8837675	2,86	1,0508216	3,30	1,1939224
1,99	0,6881346	2,43	0,8878912	2,87	1,0543120	3,31	1,1969481
2,00	0,6931472	2,44	0,8919980	2,88	1,0577902	3,32	1,1999647
2,01	0,6981347	2,45	0,8960880	2,89	1,0612564	3,33	1,2029722
2,02	0,7030974	2,46	0,9001613	2,90	1,0647107	3,34	1,2059707
2,03	0,7080357	2,47	0,9042181	2,91	1,0681530	3,35	1,2089603
2,04	0,7129497	2,48	0,9082585	2,92	1,0715836	3,36	1,2119409
2,05	0,7178397	2,49	0,9122826	2,93	1,0750024	3,37	1,2149127
2,06	0,7227059	2,50	0,9162907	2,94	1,0784095	3,38	1,2178757
2,07	0,7275485	2,51	0,9202827	2,95	1,0818051	3,39	1,2208299
2,08	0,7323678	2,52	0,9242589	2,96	1,0851892	3,40	1,2237754
2,09	0,7371640	2,53	0,9282193	2,97	1,0885619	3,41	1,2267122
2,10	0,7419373	2,54	0,9321640	2,98	1,0919233	3,42	1,2296405
2,11	0,7466879	2,55	0,9360933	2,99	1,0952733	3,43	1,2325605
2,12	0,7514160	2,56	0,9400072	3,00	1,0986123	3,44	1,2354714
2,13	0,7561219	2,57	0,9439058	3,01	1,1019400	3,45	1,2383742
2,14	0,7608058	2,58	0,9477893	3,02	1,1052568	3,46	1,2412685
2,15	0,7654678	2,59	0,9516578	3,03	1,1085626	3,47	1,2441545
2,16	0,7701082	2,60	0,9555114	3,04	1,1118575	3,48	1,2470322
2,17	0,7747271	2,61	0,9593502	3,05	1,1151415	3,49	1,2499017
2,18	0,7793248	2,62	0,9631743	3,06	1,1184149	3,50	1,2527629
2,19	0,7839015	2,63	0,9669838	3,07	1,1216775	3,51	1,2556160
2,20	0,7884573	2,64	0,9707789	3,08	1,1249295	3,52	1,2584609
2,21	0,7929925	2,65	0,9745596	3,09	1,1281710	3,53	1,2612978
2,22	0,7975071	2,66	0,9783261	3,10	1,1314021	3,54	1,2641266
2,23	0,8020015	2,67	0,9820784	3,11	1,1346227	3,55	1,2669475
2,24	0,8064758	2,68	0,9858167	3,12	1,1378330	3,56	1,2697605
2,25	0,8109302	2,69	0,9895411	3,13	1,1410330	3,57	1,2725655
2,26	0,8153648	2,70	0,9932517	3,14	1,1442227	3,58	1,2753627
2,27	0,8197798	2,71	0,9969486	3,15	1,1474024	3,59	1,2781521
2,28	0,8241754	2,72	1,0006318	3,16	1,1505720	3,60	1,2809338
2,29	0,8285518	2,73	1,0043015	3,17	1,1537315	3,61	1,2837077
2,30	0,8329091	2,74	1,0079579	3,18	1,1568811	3,62	1,2864740
2,31	0,8372475	2,75	1,0116008	3,19	1,1600209	3,63	1,2892326

Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.
3,64	1,2919836	4,08	1,4060969	4,52	1,5085119	4,96	1,6014057
3,65	1,2947271	4,09	1,4085449	4,53	1,5107219	4,97	1,6034198
3,66	1,2974631	4,10	1,4109869	4,54	1,5129269	4,98	1,6054298
3,67	1,3001916	4,11	1,4134230	4,55	1,5151272	4,99	1,6074358
3,68	1,3029127	4,12	1,4158531	4,56	1,5173226	5,00	1,6094379
3,69	1,3056264	4,13	1,4182774	4,57	1,5195132	5,01	1,6114359
3,70	1,3083328	4,14	1,4206957	4,58	1,5216990	5,02	1,6134300
3,71	1,3110318	4,15	1,4231083	4,59	1,5238800	5,03	1,6154200
3,72	1,3137236	4,16	1,4255150	4,60	1,5260563	5,04	1,6174060
3,73	1,3164082	4,17	1,4279160	4,61	1,5282278	5,05	1,6193882
3,74	1,3190856	4,18	1,4303112	4,62	1,5303947	5,06	1,6213664
3,75	1,3217558	4,19	1,4327007	4,63	1,5325568	5,07	1,6233408
3,76	1,3244189	4,20	1,4350845	4,64	1,5347143	5,08	1,6253119
3,77	1,3270749	4,21	1,4374626	4,65	1,5368672	5,09	1,6272778
3,78	1,3297240	4,22	1,4398351	4,66	1,5390154	5,10	1,6292405
3,79	1,3323660	4,23	1,4422020	4,67	1,5411590	5,11	1,6311994
3,80	1,3350010	4,24	1,4445632	4,68	1,5432981	5,12	1,6331544
3,81	1,3376291	4,25	1,4469189	4,69	1,5454325	5,13	1,6351056
3,82	1,3402504	4,26	1,4492691	4,70	1,5475625	5,14	1,6370530
3,83	1,3428648	4,27	1,4516138	4,71	1,5496879	5,15	1,6389967
3,84	1,3454723	4,28	1,4539530	4,72	1,5518087	5,16	1,6409365
3,85	1,3480731	4,29	1,4562867	4,73	1,5539252	5,17	1,6428726
3,86	1,3506671	4,30	1,4586149	4,74	1,5560371	5,18	1,6448050
3,87	1,3532544	4,31	1,4609379	4,75	1,5581446	5,19	1,6467336
3,88	1,3558351	4,32	1,4632553	4,76	1,5602476	5,20	1,6486586
3,89	1,3584091	4,33	1,4655675	4,77	1,5623462	5,21	1,6505798
3,90	1,3609765	4,34	1,4678743	4,78	1,5644405	5,22	1,6524974
3,91	1,3635373	4,35	1,4701758	4,79	1,5665304	5,23	1,6544112
3,92	1,3660916	4,36	1,4724720	4,80	1,5686159	5,24	1,6563214
3,93	1,3686394	4,37	1,4747630	4,81	1,5706971	5,25	1,6582280
3,94	1,3711807	4,38	1,4770487	4,82	1,5727739	5,26	1,6601310
3,95	1,3737156	4,39	1,4793292	4,83	1,5748464	5,27	1,6620303
3,96	1,3762440	4,40	1,4816045	4,84	1,5769147	5,28	1,6639260
3,97	1,3787661	4,41	1,4838746	4,85	1,5789787	5,29	1,6658182
3,98	1,3812818	4,42	1,4861396	4,86	1,5810384	5,30	1,6677068
3,99	1,3837912	4,43	1,4883995	4,87	1,5830939	5,31	1,6695918
4,00	1,3862943	4,44	1,4906543	4,88	1,5851452	5,32	1,6714733
4,01	1,3887912	4,45	1,4929040	4,89	1,5871923	5,33	1,6733512
4,02	1,3912818	4,46	1,4951487	4,90	1,5892352	5,34	1,6752256
4,03	1,3937663	4,47	1,4973883	4,91	1,5912739	5,35	1,6770965
4,04	1,3962446	4,48	1,4996230	4,92	1,5933085	5,36	1,6789639
4,05	1,3987168	4,49	1,5018527	4,93	1,5953389	5,37	1,6808278
4,06	1,4011829	4,50	1,5040774	4,94	1,5973653	5,38	1,6826882
4,07	1,4036429	4,51	1,5062971	4,95	1,5993875	5,39	1,6845453

Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.
5,40	1,6863989	5,84	1,7647308	6,28	1,8373699	6,72	1,9050881
5,41	1,6882491	5,85	1,7664416	6,29	1,8389610	6,73	1,9065751
5,42	1,6900958	5,86	1,7681496	6,30	1,8405496	6,74	1,9080600
5,43	1,6919391	5,87	1,7698546	6,31	1,8421356	6,75	1,9095425
5,44	1,6937790	5,88	1,7715567	6,32	1,8437191	6,76	1,9110228
5,45	1,6956155	5,89	1,7732559	6,33	1,8453002	6,77	1,9125011
5,46	1,6974487	5,90	1,7749523	6,34	1,8468787	6,78	1,9139771
5,47	1,6992786	5,91	1,7766458	6,35	1,8484547	6,79	1,9154509
5,48	1,7011051	5,92	1,7783364	6,36	1,8500283	6,80	1,9169226
5,49	1,7029282	5,93	1,7800242	6,37	1,8515994	6,81	1,9183921
5,50	1,7047481	5,94	1,7817091	6,38	1,8531680	6,82	1,9198594
5,51	1,7065646	5,95	1,7833912	6,39	1,8547342	6,83	1,9213247
5,52	1,7083778	5,96	1,7850704	6,40	1,8562979	6,84	1,9227877
5,53	1,7101878	5,97	1,7867469	6,41	1,8578592	6,85	1,9242486
5,54	1,7119944	5,98	1,7884205	6,42	1,8594181	6,86	1,9257074
5,55	1,7137979	5,99	1,7900914	6,43	1,8609745	6,87	1,9271641
5,56	1,7155981	6,00	1,7917594	6,44	1,8625285	6,88	1,9286186
5,57	1,7173950	6,01	1,7934247	6,45	1,8640801	6,89	1,9300710
5,58	1,7191887	6,02	1,7950872	6,46	1,8656293	6,90	1,9315214
5,59	1,7209792	6,03	1,7967470	6,47	1,8671761	6,91	1,9329696
5,60	1,7227666	6,04	1,7984040	6,48	1,8687205	6,92	1,9344157
5,61	1,7245507	6,05	1,8000582	6,49	1,8702625	6,93	1,9358598
5,62	1,7263316	6,06	1,8017098	6,50	1,8718021	6,94	1,9373017
5,63	1,7281094	6,07	1,8033586	6,51	1,8733394	6,95	1,9387416
5,64	1,7298840	6,08	1,8050047	6,52	1,8748743	6,96	1,9401794
5,65	1,7316555	6,09	1,8066481	6,53	1,8764069	6,97	1,9416152
5,66	1,7334238	6,10	1,8082887	6,54	1,8779371	6,98	1,9430489
5,67	1,7351891	6,11	1,8099267	6,55	1,8794650	6,99	1,9444805
5,68	1,7369512	6,12	1,8115621	6,56	1,8809906	7,00	1,9459101
5,69	1,7387100	6,13	1,8131947	6,57	1,8825138	7,01	1,9473376
5,70	1,7404661	6,14	1,8148247	6,58	1,8840347	7,02	1,9487632
5,71	1,7422189	6,15	1,8164520	6,59	1,8855533	7,03	1,9501866
5,72	1,7439687	6,16	1,8180767	6,60	1,8870696	7,04	1,9516080
5,73	1,7457155	6,17	1,8196988	6,61	1,8885837	7,05	1,9530275
5,74	1,7474591	6,18	1,8213182	6,62	1,8900954	7,06	1,9544449
5,75	1,7491998	6,19	1,8229351	6,63	1,8916048	7,07	1,9558604
5,76	1,7509374	6,20	1,8245493	6,64	1,8931119	7,08	1,9572739
5,77	1,7526720	6,21	1,8261608	6,65	1,8946168	7,09	1,9586853
5,78	1,7544036	6,22	1,8277699	6,66	1,8961194	7,10	1,9600947
5,79	1,7561323	6,23	1,8293763	6,67	1,8976198	7,11	1,9615022
5,80	1,7578579	6,24	1,8309801	6,68	1,8991179	7,12	1,9629077
5,81	1,7595805	6,25	1,8325814	6,69	1,9006138	7,13	1,9643112
5,82	1,7613002	6,26	1,8341801	6,70	1,9021075	7,14	1,9657127
5,83	1,7630170	6,27	1,8357763	6,71	1,9035989	7,15	1,9671123

Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.
7,16	1,9685099	7,60	2,0281482	8,04	2,0844290	8,48	2,1377104
7,17	1,9699056	7,61	2,0294631	8,05	2,0856720	8,49	2,1388889
7,18	1,9712993	7,62	2,0307763	8,06	2,0869135	8,50	2,1400661
7,19	1,9726911	7,63	2,0320878	8,07	2,0881534	8,51	2,1412419
7,20	1,9740810	7,64	2,0333976	8,08	2,0893918	8,52	2,1424163
7,21	1,9754689	7,65	2,0347056	8,09	2,0906287	8,53	2,1435893
7,22	1,9768549	7,66	2,0360119	8,10	2,0918640	8,54	2,1447609
7,23	1,9782390	7,67	2,0373166	8,11	2,0930984	8,55	2,1459312
7,24	1,9796212	7,68	2,0386195	8,12	2,0943306	8,56	2,1471001
7,25	1,9810014	7,69	2,0399207	8,13	2,0955613	8,57	2,1482676
7,26	1,9823798	7,70	2,0412203	8,14	2,0967905	8,58	2,1494339
7,27	1,9837562	7,71	2,0425181	8,15	2,0980182	8,59	2,1505987
7,28	1,9851308	7,72	2,0438143	8,16	2,0992444	8,60	2,1517622
7,29	1,9865035	7,73	2,0451088	8,17	2,1004691	8,61	2,1529243
7,30	1,9878743	7,74	2,0464016	8,18	2,1016923	8,62	2,1540851
7,31	1,9892432	7,75	2,0476928	8,19	2,1029140	8,63	2,1552445
7,32	1,9906103	7,76	2,0489823	8,20	2,1041341	8,64	2,1564026
7,33	1,9919754	7,77	2,0502701	8,21	2,1053529	8,65	2,1575593
7,34	1,9933387	7,78	2,0515563	8,22	2,1065702	8,66	2,1587147
7,35	1,9947002	7,79	2,0528408	8,23	2,1077861	8,67	2,1598687
7,36	1,9960599	7,80	2,0541237	8,24	2,1089998	8,68	2,1610215
7,37	1,9974177	7,81	2,0554049	8,25	2,1102128	8,69	2,1621729
7,38	1,9987736	7,82	2,0566845	8,26	2,1114243	8,70	2,1633230
7,39	2,0001278	7,83	2,0579624	8,27	2,1126343	8,71	2,1644718
7,40	2,0014800	7,84	2,0592388	8,28	2,1138428	8,72	2,1656192
7,41	2,0028305	7,85	2,0605135	8,29	2,1150499	8,73	2,1667653
7,42	2,0041790	7,86	2,0617866	8,30	2,1162555	8,74	2,1679101
7,43	2,0055258	7,87	2,0630580	8,31	2,1174596	8,75	2,1690536
7,44	2,0068708	7,88	2,0643278	8,32	2,1186622	8,76	2,1701959
7,45	2,0082140	7,89	2,0655961	8,33	2,1198634	8,77	2,1713367
7,46	2,0095553	7,90	2,0668627	8,34	2,1210632	8,78	2,1724763
7,47	2,0108949	7,91	2,0681277	8,35	2,1222615	8,79	2,1736146
7,48	2,0122327	7,92	2,0693911	8,36	2,1234584	8,80	2,1747507
7,49	2,0135687	7,93	2,0706530	8,37	2,1246539	8,81	2,1758874
7,50	2,0149030	7,94	2,0719132	8,38	2,1258479	8,82	2,1770218
7,51	2,0162354	7,95	2,0731719	8,39	2,1270405	8,83	2,1781550
7,52	2,0175661	7,96	2,0744290	8,40	2,1282317	8,84	2,1792868
7,53	2,0188950	7,97	2,0756845	8,41	2,1294214	8,85	2,1804174
7,54	2,0202221	7,98	2,0769384	8,42	2,1306098	8,86	2,1815467
7,55	2,0215475	7,99	2,0781907	8,43	2,1317967	8,87	2,1826747
7,56	2,0228711	8,00	2,0794415	8,44	2,1329822	8,88	2,1838015
7,57	2,0241929	8,01	2,0806907	8,45	2,1341664	8,89	2,1849270
7,58	2,0255131	8,02	2,0819384	8,46	2,1353491	8,90	2,1860512
7,59	2,0238315	8,03	2,0831845	8,47	2,1365304	8,91	2,1871742

Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.
8,92	2,1882959	9,36	2,2364452	9,80	2,2823823	34,0	3,5263605
8,93	2,1894163	9,37	2,2375130	9,81	2,2834022	35,0	3,5553481
8,94	2,1905355	9,38	2,2385797	9,82	2,2844211	36,0	3,5835189
8,95	2,1916535	9,39	2,2396452	9,83	2,2854389	37,0	3,6109179
8,96	2,1927702	9,40	2,2407096	9,84	2,2864556	38,0	3,6375862
8,97	2,1938856	9,41	2,2417729	9,85	2,2874714	39,0	3,6635616
8,98	2,1949998	9,42	2,2428350	9,86	2,2884861	40,0	3,6888794
8,99	2,1961128	9,43	2,2438960	9,87	2,2894998	41,0	3,7135720
9,00	2,1972245	9,44	2,2449559	9,88	2,2905124	42,0	3,7376696
9,01	2,1983350	9,45	2,2460147	9,89	2,2915241	43,0	3,7612000
9,02	2,1994443	9,46	2,2470723	9,90	2,2925347	44,0	3,7841896
9,03	2,2005523	9,47	2,2481288	9,91	2,2935443	45,0	3,8066625
9,04	2,2016591	9,48	2,2491843	9,92	2,2945529	46,0	3,8286414
9,05	2,2027647	9,49	2,2502386	9,93	2,2955604	47,0	3,8501475
9,06	2,2038691	9,50	2,2512917	9,94	2,2965670	48,0	3,8712010
9,07	2,2049722	9,51	2,2523438	9,95	2,2975725	49,0	3,8918203
9,08	2,2060741	9,52	2,2533948	9,96	2,2985770	50,0	3,9120230
9,09	2,2071748	9,53	2,2544446	9,97	2,2995806	51,0	3,9318256
9,10	2,2082744	9,54	2,2554934	9,98	2,3005831	52,0	3,9512437
9,11	2,2093727	9,55	2,2565411	9,99	2,3015846	53,0	3,9702919
9,12	2,2104697	9,56	2,2575877	10,0	2,3025851	54,0	3,9889840
9,13	2,2115656	9,57	2,2586332	11,0	2,3978953	55,0	4,0073332
9,14	2,2126603	9,58	2,2596776	12,0	2,4849066	56,0	4,0253517
9,15	2,2137538	9,59	2,2607209	13,0	2,5649493	57,0	4,0430513
9,16	2,2148461	9,60	2,2617631	14,0	2,6390573	58,0	4,0604430
9,17	2,2159372	9,61	2,2628042	15,0	2,7080502	59,0	4,0775373
9,18	2,2170272	9,62	2,2638442	16,0	2,7725887	60,0	4,0943446
9,19	2,2181160	9,63	2,2648832	17,0	2,8332133	61,0	4,1108738
9,20	2,2192034	9,64	2,2659211	18,0	2,8903718	62,0	4,1271344
9,21	2,2202898	9,65	2,2669579	19,0	2,9444390	63,0	4,1431347
9,22	2,2213750	9,66	2,2699936	20,0	2,9957323	64,0	4,1588331
9,23	2,2224590	9,67	2,2690282	21,0	3,0445224	65,0	4,1743873
9,24	2,2235418	9,68	2,2700618	22,0	3,0910425	66,0	4,1896547
9,25	2,2246235	9,69	2,2710944	23,0	3,1354942	67,0	4,2046926
9,26	2,2257040	9,70	2,2721258	24,0	3,1780538	68,0	4,2195077
9,27	2,2267835	9,71	2,2731562	25,0	3,2188758	69,0	4,2341065
9,28	2,2278615	9,72	2,2741856	26,0	3,2580965	70,0	4,2484952
9,29	2,2289385	9,73	2,2752138	27,0	3,2958369	75,0	4,3174881
9,30	2,2300144	9,74	2,2762411	28,0	3,3322045	80,0	4,3820266
9,31	2,2310890	9,75	2,2772673	29,0	3,3672958	85,0	4,4426512
9,32	2,2321626	9,76	2,2782924	30,0	3,4011974	90,0	4,4998097
9,33	2,2332350	9,77	2,2793165	31,0	3,4339872	95,0	4,5538769
9,34	2,2343062	9,78	2,2803395	32,0	3,4657359		
9,35	2,2353763	9,79	2,2813614	33,0	3,4965076		

Siebenter Abschnitt.

Von den vorzüglichsten Motoren und Receptoren.

Allgemeine Theorie der hydraulischen Receptoren durch das Princip der lebendigen Kräfte.

Allgemeine Betrachtungen über die hydraulischen Receptoren.

§. 89. Man besitzt eine große Anzahl von Mitteln, um die Wirkung des Wassers auf die Maschinen nutzbar zu machen; unter diesen sind besonders die Wasserräder hervorzuheben, welche die continuirliche Rotationsbewegung um eine feste Axe unmittelbar hervorbringen und welche aus diesen und mehreren anderen Gründen bei industriellen Maschinen gewöhnlich angewandt werden.

Welches auch die Art und Weise sei, die man zur Uebertragung der Wirkung des Wassers auf die Maschinen annimmt, immer ergibt das Princip der lebendigen Kräfte allgemeine Bedingungen, welche erfüllt werden müssen, damit der übertragene Nutzeffect sich so viel als möglich der absoluten Quantität Arbeit nähere, welche durch die Einwirkung der Schwere auf das bewegende Wasser bei seinem Herabfallen von dem Niveau des oberen Behälters bis zu dem des unteren Ableitungskanales hervorgebracht wird. Da diese allgemeine Betrachtungsweise viel Licht über die Anwendungen des Principes der lebendigen Kräfte auf die mannichfaltigen Wirkungen des Wassers in den Maschinen verbreitet; so wird es nicht unzweckmäßig sein, hierbei einen Augenblick zu verweilen, ehe zu dem besonderen Falle der Wasserräder, dem einzigen, welcher hier speciell untersucht werden soll, geschritten wird.

Verlust an lebendiger Kraft bei dem Eintritte des Wassers in den Receptor.

§. 90. Wenn eine gewisse Wassermasse fortwährend und in derselben Weise auf eine Maschine wirkt, so kommt dieselbe bei der letzteren mit einer vorher erlangten Geschwindigkeit V an, welche abhängig ist von der gesammten Höhe des Gefälles von dem Spiegel des oberen Behälters bis zu dem Puncte, in welchem sie die Maschine erreicht, ferner von dem Widerstande und den Verlusten an lebendiger

Kraft aller Art, welche sie nach ihrem Heraustritte aus dem Behälter erlitten hat; da diese Verluste, welche mit einer wahren Verminderung des Gefälles gleichbedeutend sind, nach dem in §. 73 ffg. des sechsten Abschnittes Gesagten näherungsweise bestimmt werden können; so beschäftigen wir uns jetzt damit nicht mehr und betrachten nur die Fallhöhe h, welche der Geschwindigkeit V entspricht und welche allein für den Punct, in welchem das Wasser die Maschine erreicht, disponibel bleibt. Hat nun dieser Punct eine Geschwindigkeit v, welche entweder der Intensität oder Richtung nach von V verschieden ist; so findet fast in allen Fällen eine Zerlegung der Geschwindigkeit V und mithin ein Verlust an lebendiger Kraft statt. Bezeichnet man die Wassermasse, welche in der Zeiteinheit gleichförmig der Maschine zufließt, mit M, so kann jener Verlust durch einen Ausdruck von der Form:

$$Mu^2$$

dargestellt werden, wenn man die Bewegung während der Zeiteinheit betrachtet, oder durch:

$$dM \cdot u^2 dt$$

für das Zeitelement dt, wo die Geschwindigkeit u eine Function von V und v, sowie von der Masse und der Form der Maschine ist.

Verlust an lebendiger Kraft beim Austritte des Wassers aus der Maschine; Leistung der Schwere.

§. 91. Nach dem Stoße kann es sich ereignen, daß das Wasser entweder sogleich die Maschine ganz verläßt, oder daß dasselbe darin noch eine gewisse Zeit lang festgehalten wird, indem es die Geschwindigkeit v annimmt und behält oder, indem es sich auf den beweglichen Theilen der Maschine bewegt und in Kanälen fortgleitet u. s. w. Im ersten Falle wird es während der Dauer des Stoßes seine ganze Wirkung auf die Maschine ausgeübt haben; im zweiten und dritten Falle wird es fortfahren, durch seine Trägheit und sein Gewicht zu wirken. Im Allgemeinen wird es die Maschine mit einer absoluten Geschwindigkeit w verlassen, und die Schwere wird auf dasselbe bei seinem Herabfallen in der Maschine von dem Eintrittspuncte A bis zum Austrittspuncte B (Fig. 36), oder genauer, bis zum Spiegel des unteren Behälters oder Ableitungskanales, wo es aus der Maschine entweicht, eine gewisse Quantität der Wirkung ausgeübt haben, welche leicht zu bestimmen ist, sobald man die Höhe h' kennt, von welcher es unterhalb des Punctes A herabgefallen ist.

Verlust an Arbeitsquantität, dessen Einfluß man in den gewöhnlichen Fällen unberücksichtigt lassen kann.

§. 92. Es kann auch vorkommen, daß das Wasser bei seiner Bewegung im Innern der Maschine neue Stöße erleidet, welche einen abermaligen Verlust an lebendiger Kraft herbeiführen; endlich wird es, wenn die Geschwindigkeit längs der Wände der Gänge, worin es sich bewegt, sehr groß ist, von Seiten dieser Wände einen Widerstand erfahren, auf den in manchen Fällen Rücksicht genommen werden muß, der aber meistens ganz vernachläßigt werden kann. Wollte man die

Rechnung übrigens mit aller Strenge ausführen, so müßte man auch den Verlust an lebendiger Kraft mit in Anschlag bringen, welcher durch den Widerstand verursacht wird, den die Maschine bei ihrer Bewegung in der atmosphärischen Luft erfährt; wegen der geringen Dichtigkeit dieser Luft und der unbedeutenden Geschwindigkeit der gewöhnlichen Bewegung der Maschine kann man jedoch fast immer den Einfluß dieses Widerstandes außer Acht setzen.

Die Bewegung der Receptoren wird nur von dem Augenblicke an betrachtet, wo dieselbe permanent, wenn auch nicht gleichförmig geworden ist, und wo man die Trägheit ihrer Theile vernachlässigen kann.

§. 93. Nun ist aber wohl zu bemerken, daß, sobald das Schützbrett geöffnet wird, welches dem Wasser den Zutritt zu der in Ruhe befindlichen Maschine eröffnet, die letztere nicht augenblicklich die zur Arbeit erforderliche Geschwindigkeit annehmen kann; diese Geschwindigkeit nimmt also von Null an allmählig zu, wie bereits im ersten Abschnitte (§. 28 ffg.) im Allgemeinen auseinandergesetzt ist. Nach einer gewissen Anzahl von Perioden, Umdrehungen oder Oscillationen erreicht die Bewegung nahezu ihre Grenze, sie regulirt sich und bleibt gleichförmig oder wenigstens permanent; vor diesem Zeitpuncte ist jede Rechnung in irgend einer Beziehung unmöglich und nur auf diesen regelmäßigen Zustand der Bewegung darf das Nachfolgende angewandt werden.

Da nun die Geschwindigkeit der Maschinentheile am Ende einer jeden Oscillation wieder denselben Werth annimmt, so kann man, wenn in ihrer Bewegung keine plötzlichen Unterbrechungen vorkommen, den Einfluß der Trägheit dieser Theile unbeachtet lassen, d. h. annehmen, daß ihre lebendige Kraft in allen Augenblicken der Bewegung constant bleibt, oder daß ihr Zuwachs zwischen zwei hinreichend weit auseinander liegenden Augenblicken $= 0$ ist.

Der Widerstand kann wie ein Gewicht angesehen werden, welches vermittelst des Receptors gehoben werden soll.

§. 94. Den Nutzeffect der Maschine kann man immer mit der Arbeit vergleichen, welche in der Hebung eines Gewichtes auf eine gewisse Höhe besteht, während die Wassermasse dM oder M consumirt wird, und es ist verstattet, dieses Gewicht durch einen gewissen Druck P zu ersetzen, welcher in der Richtung der Geschwindigkeit v des Angriffs- oder Eintrittspunctes des Wassers in der Maschine wirkt, so daß die von dem Drucke P hervorgebrachte Quantität Arbeit im entgegengesetzten Sinne der Bewegung für die Zeiteinheit, wenn die Geschwindigkeit v und der Druck P als constant angesehen werden dürfen, durch:

$$Pv^{k.m},$$

oder für das Zeitelement dt, wenn v und P veränderlich sind, durch:

$$Pvdt$$

gemessen wird.

Gleichung der lebendigen Kräfte für den vorliegenden Fall.

§. 95. Wenn man bemerkt, daß sich hier dieselben Betrachtungen anwenden lassen, welche früher zur Auffindung der Gesetze der constanten Bewegung einer flüssigen Masse dienten, vorausgesetzt, daß sich die Flüssigkeit vor ihrem Eintritte in das Rad und nach ihrem Heraustritte in den Ableitungskanal nahezu in ebenen und parallelen Schichten bewegt; so hat man nach dem Principe der lebendigen Kräfte in jedem Zeitelemente dt für die zwischen A und B (Fig. 36) befindliche Masse:

$$dM\,(w^2 - V^2) = 2g \cdot dM \cdot h' - 2Pvdt - dM \cdot u^2,$$

wobei von den passiven Widerständen, welche die Flüssigkeit im Innern der Maschine erfährt, abstrahirt wird.

Wenn die Eintrittsgeschwindigkeit V, und mithin auch die Austrittsgeschwindigkeit w des Wassers nahezu constant sind; so kann man die Bewegung während irgend eines beliebigen Zeitraumes, z. B. während einer Secunde, als Zeiteinheit betrachten, und die Gleichung wird alsdann:

$$M\,(w^2 - V^2) = 2gMh' - 2Pv - Mu^2,$$

woraus folgt:

$$Pv = Mgh' + \frac{MV^2}{2} - \frac{Mw^2}{2} - \frac{Mu^2}{2},$$

und mithin, wegen $V^2 = 2gh$:

$$Pv = Mg\,(h + h') - \frac{M}{2}\,(w^2 + u^2).$$

In dieser Gleichung bezeichnet Mg das Gewicht des in einer Secunde ausgeflossenen Wassers, $Mg\,(h + h')$ die Quantität der Wirkung, welche die Schwere diesem Wasser bei seinem Herabfallen von der Höhe $h + h'$ des wirklich disponibelen Gefälles mittheilt, Mw^2 die lebendige Kraft, welche das Wasser bei seinem Heraustritte aus der Maschine noch besitzt, Mu^2 die lebendige Kraft, welche dasselbe durch den Stoß beim Eintritte verliert, und Pv den Nutzeffect oder die übertragene Quantität Arbeit. Die vorstehende Gleichung drückt also aus: daß der Nutzeffect der gesammten Wirkungsquantität, welche dem disponibelen Gefälle entspricht, weniger der Hälfte der lebendigen Kraft, welche das Wasser bei seinem Heraustritte aus der Maschine noch behält, und der Hälfte von derjenigen lebendigen Kraft, welche dasselbe beim Eintritte durch den Stoß verliert, gleich ist.

Bedingungen für das absolute Maximum des Nutzeffectes.

§. 96. Hieraus folgt also, daß, wenn die Maschine das absolute Maximum des Nutzeffectes oder der Arbeit übertragen soll, man

$$Pv = Mg\,(h + h')$$ k. m

oder:

$$w^2 + u^2 = 0$$

haben muß, woraus sich die beiden Bedingungen:

$$w = 0 \text{ und } u = 0$$

ergeben, d. h. das Wasser muß auf der Maschine ohne Stoß ankommen und ohne Geschwindigkeit aus derselben heraustreten. Außerdem ist es zur Erlangung des größtmöglichen Effectes noch erforderlich, daß das Wasser das Rad im tiefsten Puncte oder im Niveau des unteren Behälters oder Ableitungskanale verläßt, daß dasselbe nichts von seiner lebendigen Kraft in dem Zuflußgerinne verliert und endlich, daß die Summe $h + h'$ so wenig als möglich von dem ganzen disponibelen Gefälle H verschieden ist. Die beiden obigen Bedingungen können zuweilen durchaus nicht erfüllt werden, zuweilen schließen sie sich sogar gegenseitig aus und sind unvereinbar mit einander; unter solchen Umständen ist man genöthigt, sich damit zu begnügen, daß die Einrichtung der Maschine die Bedingungen für ein relatives Maximum des Effectes erfüllt. Diese Bedingungen erhält man durch die bekannten Methoden, indem man nämlich den Differentialcoefficienten des Nutzeffectes Pv in Beziehung auf die veränderlichen Größen, über welche man bei der Einrichtung der Maschine disponiren kann, $= 0$ setzt. Wir werden im Folgenden wiederholt Beispiele dieser Art kennen lernen und kehren jetzt noch einmal zu den Bedingungen des absoluten Maximums des Nutzeffectes zurück.

Vortheile der gleichförmigen Bewegung.

§. 97. Aus dieser allgemeinen Untersuchung sieht man zuvörderst, wie vortheilhaft es ist, die hydraulischen Receptoren so einzurichten, daß die Geschwindigkeit ihrer Theile gleichförmig werden kann; denn wenn v und w vermöge der Einrichtung der Maschine fortwährend veränderlich sind, so wird es offenbar unmöglich, die Verluste an lebendiger Kraft zu vermeiden. Diese Bedingung wird aber durch die Wasserräder mit stetiger Rotationsbewegung vollständig erreicht, und ihr Vorzug vor den hydraulischen Balanciers und anderen Maschinen mit abwechselnder Bewegung ist mithin im Voraus für alle die Fälle nachgewiesen, wo die Maschine eine gewisse Geschwindigkeit haben muß. Ist aber die Geschwindigkeit gleichgültig, so erhält man auch noch sehr genäherte Resultate für das absolute Maximum des Effectes, wenn man die Geschwindigkeiten V, v und w gleichzeitig vermindert, weil alsdann die Reaction nahezu $= 0$ wird. Diese Verminderung aller Geschwindigkeiten ist also die allgemeine Bedingung für die Einrichtung der Motoren mit abwechselnder Bewegung.

Ausdruck des Verlustes an lebendiger Kraft, welcher in dem Augenblicke entsteht, wo die Flüssigkeit auf den Receptor trifft.

§. 98. Betrachten wir die Bedingung:

$$u = 0$$

und nehmen wir an, daß das Wasser bei seiner Ankunft auf der Maschine auf eine ebene Schaufel AB (Fig. 37) stoße, welche sich mit der Geschwindigkeit v in der Richtung Cv, die mit der Schaufel den Winkel $BCv = \beta$ bildet, fortbewegt und daß die Flüssigkeit in parallelen Fäden mit der Geschwindigkeit V in einer Richtung DC oder CV, welche mit AB den Winkel BCD oder $ACV = \alpha$ bildet, ankomme; so kann man sich jede der Geschwindigkeiten v und V in zwei andere zerlegt denken, von denen die eine in die Richtung von AB und die andere in die Richtung des Perpendikels auf AB falle, und alsdann hat man resp. für die Componenten

parallel zu AB: $v \cos. \beta$ und $V \cos. \alpha$,
senkrecht auf AB: $v \sin. \beta$ und $V \sin. \alpha$.

Hiernach ist einleuchtend, daß ein Stoß oder eine Reaction der Flüssigkeit gegen die Schaufel stattfinden wird, wenn $v \sin. \beta$ von $V \sin. \alpha$ verschieden ist, d. h. die Flüssigkeit wird auf die Schaufel einen Stoß ausüben, wenn man hat:

$$V \sin. \alpha > v \sin. \beta,$$

wogegen die Flüssigkeit von der Schaufel gestoßen wird, wenn man hat:

$$V \sin. \alpha < v \sin. \beta,$$

indem sich die Schaufel gegen die Wasserfäden bewegt. Nimmt man nun an, daß die Schaufel eine solche Ausdehnung habe, daß die Fäden der Flüssigkeit parallel zu ihrer Richtung aus derselben treten, was auf die Voraussetzung hinausläuft, daß die Molecüle der Flüssigkeit den gesammten Ueberschuß ihrer eigenen Geschwindigkeit über die der Schaufel in normaler Richtung gegen die Ebene der letzteren verloren haben; so wird ein jedes Massenelement dM des Strahles während der ganzen Zeit der Reaction eine Quantität der Bewegung gleich:

$$dM\,(V \sin. \alpha - v \sin. \beta)$$

verloren haben, und aus dem Principe der Gleichheit und Entgegengesetztheit der Wirkung und Gegenwirkung folgt, daß die Masse der Schaufel und des Systemes, wovon dieselbe einen Theil ausmacht, eine gleiche und dem Zeichen nach entgegengesetzte Quantität der Bewegung gewonnen habe.

Stellt nun dM die Masse der Flüssigkeit dar, welche die Schaufel in jedem Zeitelemente dt trifft oder verläßt, so ist es nach einem oft angewandten Raisonnement (vergl. besonders Abschnitt 6, §. 6) begreiflich, daß der obige Ausdruck auch den Werth der Quantität der Bewegung gibt, welchen die ganze mit der Schaufel in Berührung befindliche Masse der Flüssigkeit während des Augenblickes dt verliert. Hieraus folgt ohne Weiteres, daß der Verlust an lebendiger Kraft, welcher sowohl der Flüssigkeit, wie der Schaufel entspricht, durch den Ausdruck:

$$dM\,(V \sin. \alpha - v \sin. \beta)^2 \text{ *)}$$

*) Um diese Folgerung in dem vorliegenden Falle a priori zu beweisen, wollen wir mit P die Summe der auf die Ebene AB wirkenden Normaldruckkräfte bezeichnen; aber abgesehen von der Wirkung der Schwere auf die Flüssigkeit und von den Widerständen, welche sie in dem Sinne und von Seiten dieser Ebene erfährt. Ferner bezeichne Ω die Fläche der gleichen Querschnitte des Wasserstrahles vor dem Augenblicke, worin derselbe die Schaufel erreicht, Π die Dichtigkeit des Wassers, $g = 9^m,8088$ die Intensität der Schwere, $ds = vdt$ für einen beliebigen Augenblick die virtuelle Geschwindigkeit des Angriffspunctes der Kraft P auf die Schaufel AB, dm ein beliebiges Massenelement des festen oder starren Systemes, wozu die Schaufel gehört, Kds die virtuelle Geschwindigkeit, wo

gemessen wird; denn hier hat sowohl die Flüssigkeit, wie die Schaufel am Ende des Zeitelementes dt dieselbe normale Geschwindigkeit in

---

K für dieselbe Masse ein constantes Verhältniß ist, aber sich von einem Elemente zum andern ändern kann; so wird die virtuelle Geschwindigkeit von dm in dem betrachteten Augenblicke auch durch Kv ausgedrückt, die bewegende Kraft von dm, oder vielmehr der Widerstand, welchen dm der Wirkung von P entgegenstellt, durch $dmK \cdot \frac{dv}{dt}$ und das virtuelle Moment dieser Kraft durch:

$$Kdm \frac{dv}{dt} \cdot Kds = K^2 dm \frac{dv}{dt} ds,$$

folglich für die ganze Ausdehnung des Körpers durch das Integral:

$$\frac{dv}{dt} ds \int SK^2 dm = M_1 \frac{dv}{dt} ds,$$

wo M_1 gewissermaßen die auf den Wirkungspunct der Flüssigkeit bezogene Masse dieses Körpers bezeichnet.

Es muß aber zwischen den verschiedenen bewegenden oder Trägheitskräften $dmK \frac{dv}{dt}$ und dem Drucke P, dessen virtuelles Moment $= Pds \sin. \beta$ ist, jeden Augenblick das Gleichgewicht stattfinden; folglich hat man auch jeden Augenblick:

$$Pds \sin. \beta = M_1 \frac{dv}{dt} ds \text{ oder } Pdt = \frac{M_1}{\sin. \beta} dv,$$

wodurch offenbar die von dem Systeme der Schaufel während des Zeitelementes dt gewonnene Totalquantität Bewegung ausgedrückt wird, und da diese Größe nach dem Principe der Gleich- und Entgegengesetztheit der Wirkung und Gegenwirkung der in derselben Zeit von der wirkenden Flüssigkeitsmasse aufgehobenen Quantität Bewegung gleich sein muß; so hat man die Gleichung:

$$Pdt = \frac{M_1}{\sin. \beta} dv = dM (V \sin. \alpha - v \sin. \beta),$$

welche den in jedem Augenblicke des Stoßes stattfindenden Druck P gibt, wenn man die Flüssigkeitsmasse bestimmen kann, welche in jedem Zeitelemente gegen die Schaufel trifft.

Zur Bestimmung des Verlustes an lebendiger Kraft, welcher durch den Stoß der Flüssigkeitsmasse dM gegen die Schaufel veranlaßt wird, bemerke man, daß vor dem Augenblicke dt die lebendige Kraft der erstern durch:

$$dMV^2 \cos.^2\alpha + dMV^2 \sin^2\alpha$$

und die der letztern durch:

$$v^2 \int K^2 dm = M_1 v^2$$

ausgedrückt wird, und daß, wenn beide Massen nach der Normale die gemeinschaftliche Geschwindigkeit $(v + dv) \sin. \beta$ angenommen haben, die lebendige Kraft der Masse dM gleich:

$$dMV^2 \cos.^2\alpha + dM (v + dv)^2 \sin.^2\beta = dMV^2 \cos.^2\alpha + dMv^2 \sin.^2\beta$$

ist, wenn man bemerkt, daß die Geschwindigkeit $V \cos. \alpha$ in der Richtung der Schaufel nach der Voraussetzung sich nicht geändert hat, und die lebendige Kraft der Masse M_1 gleich:

$$M_1 (v + dv)^2$$

ist. Zieht man nun die Summe der lebendigen Kräfte nach dem Stoße von der vor dem Stoße ab und vernachlässigt die unendlich kleinen Größen perpendicularer Richtung gegen die Schaufel erlangt, und die wirkende Masse der ersteren ist unendlich klein gegen die Masse der letzteren,

der zweiten Ordnung gegen die der ersten; so wird der gesuchte Verlust ausgedrückt durch:

$$dMV^2 \sin.^2\alpha - dMv^2 \sin.^2\beta - 2M_1vdv;$$

aber weiter oben haben wir gefunden:

$$M_1dv = dM (V \sin.\alpha - V \sin.\beta) \sin.\beta,$$

und folglich haben wir endlich für den Ausdruck des gesuchten Verlustes an lebendiger Kraft:

$$dM (V \sin.\alpha - v \sin.\beta)^2.$$

Nach dem Vorhergehenden kann man auch leicht den Druck P bestimmen, welchen die Flüssigkeit in normaler Richtung gegen die Schaufel ausübt. Denn wenn die Flüssigkeit nur auf eine einzige Schaufel wirkt, so weicht letztere mit einer Geschwindigkeit $v \cos (\alpha + \beta)$ in der Richtung von V zurück, und folglich wird die Flüssigkeitsmasse dM, welche in jedem Augenblicke die Schaufel erreicht, durch:

$$dM = \frac{\Pi}{g}\, \Omega\, [V - v \cos.(\alpha + \beta)]\, dt$$

ausgedrückt, woraus folgt:

$$P = \frac{\Pi}{g}\, \Omega\, [V - v \cos.(\alpha + \beta)] \,.\, [V \sin.\alpha - v \sin.\beta].$$

Für $\alpha = \beta = 90°$ ist folglich:

$$P = \frac{\Pi}{g}\, \Omega\, (V - v)^2,$$

und für $v = 0$ ist:

$$P = 2\,\Pi\Omega \,.\, \frac{V^2}{2g}.$$

Da aber in den Wasserrädern jede Schaufel an derselben Stelle durch eine andere ersetzt wird, so werden sie successive von der Flüssigkeit getroffen und die Masse dM, welche in jedem Zeitelemente die Geschwindigkeit $V \sin.\alpha - v \sin.\beta$ verliert, wird ausgedrückt durch:

$$dM = \frac{\Pi}{g}\, \Omega V dt,$$

folglich ist:

$$P = \frac{\Pi}{g}\, \Omega V\, [V \sin.\alpha - v \sin.\beta].$$

Hieraus ergibt sich für $\alpha = \beta = 90°$:

$$P = \frac{\Pi}{g}\, \Omega V\, (V - v),$$

und für $v = 0$:

$$P = \frac{\Pi}{g}\, \Omega V^2 = 2\,\Pi\Omega \,.\, \frac{V^2}{2g}.$$

Diese letzte, bereits für eine einzelne Schaufel gefundene Formel wird durch die Versuche von Bossut und Dubuat für den Fall bestätigt, wo die unbewegliche Ebene eine solche Ausdehnung hat, daß die Flüssigkeit ihre ganze relative Normalgeschwindigkeit verliert, und außerdem lehrt die Beobachtung, daß, wenn die Fläche der Schaufel sehr wenig von der des Querschnittes des Wasserstrahles verschieden ist, sich der Werth des Druckes auf die Hälfte desjenigen reducirt, welcher die obige Formel gibt.

welche mit dem ganzen Systeme, wovon sie einen Theil ausmacht, als vereinigt gedacht wird. (Siehe die vorläufigen Betrachtungen im fünften Abschnitte.)

Ausdruck des Verlustes an lebendiger Kraft in der Secunde.

§. 99. Nimmt man an, daß sich die einzelnen Stöße fortwährend und mit derselben Intensität in jedem Zeitelemente entweder auf derselben Schaufel, oder auf anderen ähnlichen wiederholen; so wird der Verlust an lebendiger Kraft am Ende einer Secunde durch:

$$\int dM\,(V\,sin.\,\alpha - v\,sin.\,\beta)^2 = M\,(V\,sin.\,\alpha - v\,sin.\,\beta)^2$$

ausgedrückt.

In dem Falle, wo α, β und v unveränderlich sind, während die Schaufel AB in Thätigkeit ist, kann man, wenn diese Aenderungen nur gering sind, den Verlust an lebendiger Kraft nehmen, welcher ihren mittleren Werthen während des Stoßes entspricht; aber wenn diese Veränderungen bedeutend sind, so muß man natürlich integriren, da α, β und v, ebenso wie dM Function der Zeit werden, welche letztere Größe man durch eine Function von der Form $\frac{\Pi}{g} AVdt$, worin Π die Dichtigkeit der Flüssigkeit bezeichnet, darstellen kann; in der Praxis ist dieses jedoch selten nöthig.

Der Fall, wo der Verlust an lebendiger Kraft beim Eintritte Null ist.

§. 100. Der Verlust an lebendiger Kraft wird $= 0$, wenn man hat:

$$V\,sin.\,\alpha = v\,sin\,\beta,$$

d. h. es wird zwischen der Schaufel und der Flüssigkeit keine Reaction stattfinden, wenn man die Geschwindigkeit V in zwei andere zerlegen kann, von denen die eine gleich v ist und die andere in die Richtung der Schaufel fällt, oder wenn in dem über v und der Verlängerung von V construirten Parallelogramme die Seite vV parallel zu AB ist, denn alsdann sind offenbar die Componenten von v und V in perpendicularer Richtung gegen die Ebene AB einander gleich.

Der Bedingung $V\,sin.\,\alpha = v\,sin.\,\beta$ wird ein Genüge geleistet, wenn V gleich v und außerdem $sin.\,\alpha = sin.\,\beta$, also $\alpha = \beta$ oder auch $\alpha = 180^\circ - \beta$ ist. Im ersten Falle bilden V und v auf beiden Seiten der Schaufel gleiche Winkel, im zweiten fällt v der Größe und Richtung nach mit V zusammen und alsdann haben Schaufel und Flüssigkeit eine gemeinschaftliche Bewegung.

Hätte man endlich $sin.\,\alpha = 0$ und $sin.\,\beta = 0$, so würde die Bedingung immer noch erfüllt werden. Dieser Fall findet statt, wenn die Flüssigkeit auf der Schaufel in der Richtung ihrer Verlängerung ankommt und wo beide eine in derselben Richtung liegende Geschwindigkeit haben, wie bei Rädern mit gekrümmten Schaufeln.

Weitere Belehrung über diesen Gegenstand findet man in Coriolis Lehrbuch der Mechanik fester Körper und der Berechnung des Effectes der Maschinen.

Verlust an lebendiger Kraft, wenn sich die Schaufel der Flüssigkeit entgegen bewegt.

§. 101. Wenn sich die Schaufel der Flüssigkeit entgegenbewegte, so müßte man das Zeichen von $sin.\ \beta$ oder von v in dem Ausdrucke für den Verlust an lebendiger Kraft ändern, so daß derselbe für die Zeiteinheit in folgenden überginge:

$$M\ (V\ sin.\ \alpha + v\ sin.\ \beta)^2.$$

Dieser Ausdruck kann nur verschwinden, wenn $V = 0$ und $v = 0$ oder $sin.\ \alpha = 0$ und $sin.\ \beta = 0$ ist.

Relative Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser auf der Schaufel fließt.

§. 102. Was die relative Geschwindigkeit der Flüssigkeit auf der Schaufel anlangt, so ist dieselbe, je nach der Richtung von v, $V\ cos.\ \alpha + v\ cos.\ \beta$, oder $V\ cos.\ \alpha - v\ cos.\ \beta$, und mit dieser relativen Geschwindigkeit beginnt die Flüssigkeit nach dem Stoße auf der Schaufel zu fließen.

Wenn man $sin.\ \alpha = 0$ und $sin.\ \beta = 0$ hat, so folgt aus §. 12, daß die durch den Stoß verrichtete lebendige Kraft Null ist. In diesem auf Räder mit gekrümmten Schaufeln bezüglichen Falle, wo V und v einerlei Sinn haben, ist $cos.\ \alpha = 1$ und $cos.\ \beta = 1$ und mithin die anfängliche relative Geschwindigkeit:

$$V - v.$$

Betrachtungen über den Einfluß der Dimensionen des Wasserstrahles und der Schaufel.

§. 103. Man darf nicht vergessen, daß die vorhergehenden Sätze auf der Annahme beruhen, daß die Schaufel völlig frei oder isolirt ist, oder vielmehr daß die Flüssigkeit bei ihrem Durchgange frei entweichen könnte, und daß die letztere allen Ueberschuß an normaler Geschwindigkeit verloren habe, wozu erforderlich ist, daß die Schaufel eine angemessene Größe hat. Ist die Oberfläche der Schaufel nur wenig von dem Querschnitte des zufließenden Strahles verschieden, so behält letzterer noch einen Theil seiner normalen Geschwindigkeit, der Verlust an lebendiger Kraft ist demnach geringer, als der senkrecht gegen die Schaufel ausgeübte Druck und die lebendige Kraft, welche die Flüssigkeit noch behält, wenn sie die Oberfläche der Schaufel verläßt, ist größer.

Der Fall, wo sich die Schaufel in einem Gerinne befindet.

§. 104. Wenn die Schaufel zu beiden Seiten durch ebene Wände begrenzt, oder in einem Kanale eingeschlossen ist, so daß die Flüssigkeit nicht seitwärts entweichen kann uud gezwungen ist, auf der Schaufel entlang zu fließen; so verliert sie in der That fast alle ihre normale relative Geschwindigkeit:

$$V\ sin.\ \alpha - v\ sin.\ \beta,$$

und der Verlust an lebendiger Kraft in der Zeiteinheit ist nach §. 11:

$$M\ (V\ sin.\ \alpha - v\ sin.\ \beta)^2,$$

wenn M die in der Zeiteinheit ausfließende Wassermasse bezeichnet und die Schaufeln ohne Unterbrechung immer an derselben Stelle auf einander folgen.

Der Fall, wo V und v zu einander parallel sind.

§. 105. Wenn sich die Schaufel bei geringem Spielraume in einem Gerinne mit der Geschwindigkeit v bewegt, welche dieselbe Richtung, wie die Geschwindigkeit V des zufließenden Wassers hat, und es ereignet sich, daß sich das Wasser vor und hinter der Schaufel nur mit der Geschwindigkeit v bewegt, wobei dasselbe eigentlich nicht mehr die Schaufel selbst, sondern die davorliegende aufgestauete Masse stößt (Fig. 38); so verliert dasselbe die ganze relative Geschwindigkeit:

$$V - v$$

und mithin die lebendige Kraft:

$$M\ (V - v)^2,$$

wie man bei der Bewegung des Wassers in den Röhrenleitungen gesehen hat. Man bemerkt, daß dieser Umstand bis zu einem gewissen Grade von der Neigung der Schaufel AB unabhängig ist, vorausgesetzt, daß die Flüssigkeit nicht ganz über die Schaufel her treten oder sich merklich über den Wasserspiegel unterhalb derselben erheben könne. Dieser Fall entspricht den Rädern mit ebenen Schaufeln, mit denen wir uns weiter unten beschäftigen werden.

Der Fall, wo die Flüssigkeit nach und nach gegen die verschiedenen Wände eines Behälters trifft.

§. 106. Wenn die Flüssigkeit, nachdem sie die Schaufel AB gestoßen hat, auf eine andere Schaufel BC (Fig. 39) oder auf eine in der Maschine bereits vorhandene flüssige Masse trifft und sich demnach in einer Art von Gefäße oder Zelle befindet; so entsteht ein neuer Verlust an lebendiger Kraft, alle relative Bewegung wird nach einigen Wirbeln erloschen sein und die Flüssigkeit wird nur die Geschwindigkeit der Zelle beibehalten. Bezeichnet nun wieder V und v die Geschwindigkeit des Wasserfadens bei seinem Eintritte und die der Zelle, und γ den Winkel, welchen beide mit einander bilden; so wird die relative oder verlorene Geschwindigkeit:

$$mn = u = \sqrt{V^2 + v^2 - 2\,Vv\ \cos.\ \gamma}$$

sein und der Verlust an lebendiger Kraft in der Zeiteinheit wird ausgedrückt durch:

$$M\,[V^2 + v^2 - 2\,Vv\ \cos.\ \gamma],$$

welche Größe im Allgemeinen nur gleich Null sein kann, wenn man hat:

$$\gamma = 0 \text{ und } V = v,$$

d. h. wenn die Geschwindigkeiten sowohl der Richtung wie der Größe nach einander gleich sind.

Untersuchung der Bedingung $w = 0$.

§. 107. Untersuchen wir jetzt, ob man auch der zweiten Bedingung für das Maximum des Effectes ein Genüge leisten, d. h. bewirken kann, daß die Austrittsgeschwindigkeit der Flüssigkeit:

$$w = 0$$

werde.

Nach dem, was wir im §. 102 gesehen haben, wird die Flüssigkeit nach dem Stoße auf der Schaufel mit einer anfänglichen relativen Geschwindigkeit:

$$V \cos. \alpha \mp v \cos. \beta,$$

je nach dem besonderen Falle, zu fließen beginnen; alsdann wirken die beschleunigenden oder verzögernden Kräfte auf dieselbe ein und sie wird die Schaufel mit einer anderen relativen Geschwindigkeit u' verlassen, deren Richtung die Verlängerung des letzten Elementes der Schaufel ist (Fig. 40). Bezeichnet nun:

v' die Geschwindigkeit der Schaufel im Ausgangspuncte A,
φ den Winkel zwischen u' und v',

so ist die absolute Austrittsgeschwindigkeit der Flüssigkeit:

$$w = \sqrt{u'^2 + v'^2 - 2u'v' \cos. \varphi},$$

welche im Allgemeinen nur dann den Werth Null annehmen kann, wenn man gleichzeitig:

$$u' = v' \text{ und } \varphi = 0$$

hat. Diese Bedingung drückt aus, daß die relative Geschwindigkeit der Flüssigkeit beim Austritte gleich der Geschwindigkeit der Schaufel und nach der entgegengesetzten Seite gerichtet sein muß. Nun ist es aber wegen der Hindernisse, welche das Wasser beim Entweichen aus dem Receptor finden würde, nicht möglich, der vorstehenden Bedingung ganz und gar zu genügen; besonders scheint es nicht thunlich zu sein, den Winkel φ kleiner als 30° anzunehmen. Außerdem besteht zwischen v' und V eine nothwendige Beziehung, welche von derjenigen abhängig ist, die man zwischen v und V und zwischen der Einrichtung der einzelnen Maschinentheile getroffen hat. Man sieht also, daß es im Allgemeinen nicht möglich ist, gleichzeitig:

$$u = 0 \text{ und } w = 0$$

zu haben, und daß man darauf angewiesen ist, ein **relatives Maximum** der Größe Pv oder ein **relatives Minimum** des Gliedes:

$$\frac{M\,(u^2 + w^2)}{2}$$

nach den Daten der Aufgabe, über die man verfügen kann, z. B. die Geschwindigkeiten v und V, zu suchen. Dieses relative Maximum ist es, welches wir im Nachfolgenden für die verschiedenen gebräuchlichsten Receptoren bestimmen werden.

Verticale Räder mit geraden Schaufeln.

Kurze Beschreibung derselben.

§. 108. Diese Räder sind, ungeachtet ihrer sehr großen Mängel, immer noch bei den Maschinenwerken wegen der Einfachheit ihrer Construction und der Macht der Gewohnheit am meisten in Gebrauch. Sie bestehen gewöhnlich (Fig. 41) aus zwei oder mehreren hölzernen Kränzen, welche durch vier, sechs oder acht Arme, die mit der Welle verbunden sind, durch dieselbe hindurch gehen, oder dieselbe von außen umschließen, unterstützt werden. In den äußeren Umfang der Kränze oder Felgen sind ebene Schaufeln eingesetzt, welche auf den Verlängerungen der Arme oder auf Tragstücken, die mit den Felgen verbunden sind, befestigt werden. Man gibt diesen Schaufeln in der Richtung des Radhalbmessers gewöhnlich $0^m,3$ bis $0^m,4$ Breite, setzt sie auf dem äußeren Umfange $0^m,3$ bis $0^m,4$ weit auseinander und läßt ihre Länge nach der Kraft des Wasserstromes oder nach der, welche man durch den Receptor erlangen will, variiren. Ein gewöhnlich geradliniges Gerinne schließt die Schaufeln am unteren Theile des Rades ein, wobei man den letzteren an den Seiten und nach unten einen Spielraum von $0^m,01$ bis $0^m,02$ läßt, den die Mühlenbauer aber sehr unzweckmäßig, zuweilen bis auf $0^m,05$ und $0^m,06$ vergrößern. Das Gefälle des Gerinnes wechselt zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{15}$.

Die Dicke des Wasserstrahles, welcher unter dem Schützbrette hervortritt, oder vielmehr die, welche sich im unteren Theile des Gerinnes bilden würde, wenn man das Rad hinwegnähme, darf nur $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4}$ der Höhe der Schaufeln in der Richtung des Radhalbmessers betragen, damit der Stau, welcher sich vor dem Rade erzeugt, die innere Seite der Schaufeln nicht überschreiten kann.

Das Schützbrett ist gewöhnlich vertical und in einer gewissen Entfernung vom Rade angebracht, seine Breite ist in den meisten Fällen gleich der des Gerinnes und aus den früheren Untersuchungen (Abschnitt 6, §. 58 ffg.) geht hervor, daß bei dieser Einrichtung ein Verlust an lebendiger Kraft entsteht, den man ebenso wie die Geschwindigkeit V, mit welcher das Wasser die erste Schaufel trifft, berechnen kann.

Gleichung für die unterschlächtigen Räder mit geraden Schaufeln.

§. 109. Unter Beibehaltung der vorhergehenden Bezeichnungen, nach welchen

P den mittleren Druck der Flüssigkeit am Umfange des Rades durch die Mitte des eingetauchten Theiles der Schaufeln oder den zu überwindenden Nutzwiderstand,

v die Geschwindigkeit dieses mittleren Umfanges,

V die Geschwindigkeit des Wassers vor den Schaufeln,

M die in einer Secunde ausfließende Wassermasse

darstellte, hat man für die vorhin beschriebenen Räder nach §. 105 offenbar:

$$u = V - v, \quad w = v,$$

und da wir annehmen, daß das Wasser das Rad in seinem unteren Theile trifft:

$$h' = 0.$$

Die allgemeine Gleichung in §. 95 wird also in dem vorliegenden Falle unter der Voraussetzung, daß die Bewegung des Rades gleichförmig geworden ist:

$$Pv = \tfrac{1}{2} MV^2 - \tfrac{1}{2} M (V - v)^2 - \tfrac{1}{2} Mv^2$$

oder, nach gehöriger Reduction:

$$Pv = M(V - v)\, v^{k \cdot m}.$$

Bedingung für das Maximum des Nutzeffectes.

§. 110. Da der Werth des Nutzeffectes Pv sowohl für

$$V = v, \text{ wie für } v = 0$$

Null wird; so muß zwischen diesen Größen eine Beziehung stattfinden, welche jenen Effect zu einem Maximum macht. Hier ist V durch die Höhe des disponibelen Gefälles gegeben, also eine constante Größe, und wenn man daher nach v differenziirt; so findet man für den Fall eines Maximums:

$$v = \tfrac{1}{2} V,$$

und demnach für den Werth des Maximums des Nutzeffectes:

$$Pv = \tfrac{1}{2} M \cdot \frac{V^2}{2} = \tfrac{1}{2} Mgh^{k \cdot m}.$$

Das Product Mgh des Gewichtes der verbrauchten Wassermenge in die Höhe des disponibelen Gefälles ist die Größe, welche man die disponibele Quantität der Arbeit oder den disponibelen Effect nennt, eine Größe, welche selbst bloß eine Function von dem Effecte ist, der dem gesammten Gefälle zwischen dem oberen Niveau des Behälters und dem Puncte des Gerinnes, wo das Wasser aus dem Rade tritt, entspricht, und welchen letzteren man auch den absoluten Nutzeffect des Wasserstromes nennt. Aus dem Vorhergehenden sieht man also, daß selbst in dem Falle des Maximums der Nutzeffect der Räder mit ebenen Schaufeln theoretisch nur die Hälfte von dem beträgt, welcher in dem Augenblicke, wo das Wasser das Rad erreicht, disponibel ist.

Erfahrungsresultate und practische Formeln.

§. 111. Die Versuche von Bossut und Smeaton haben gezeigt, daß das Maximum des Effectes in der Praxis der Geschwindigkeit des Rades:

$$v = \tfrac{2}{5} V = 0{,}4 \cdot V$$

entspricht und den Werth:

$$0{,}3\, Mgh$$

hat, so daß sich der Nutzeffect auf 0,6 des theoretischen Effectes reducirt. Dasselbe Verhältniß findet auch in dem Falle statt, wo die Geschwindigkeiten v und V nicht in der obigen Beziehung zu einander stehen, wofern diese Beziehung sich nur nicht zu sehr von der entfernt, welche dem Maximum des Effectes entspricht. Hiernach hat man allgemein:

$$Pv = 0{,}6 \cdot M(V - v)\, v^{k \cdot m}$$

und für das Maximum, wo $v = 0{,}4\, V$ ist:

$$Pv = 0{,}3 \cdot Mgh^{k \cdot m}.$$

Wir werden in der Folge mit Q die in der Secunde verbrauchte Wassermenge in Cubikmetern bezeichnen und demnach:

$$1000\ Q^{kil.} = Mg$$

setzen. Hiernach werden die obigen practischen Formeln:

für den allgemeinen Fall: $$Pv = \frac{0{,}6 \times 1000}{g} Q (V - v) v^{k \cdot m},$$

für den Fall des Maximums: $$Pv = 0{,}3 \times 1000\, Q \cdot h^{k \cdot m},$$

woraus für den Werth des Wasserdruckes an dem mittleren Umfange der Schaufeln und in der Richtung des bewegenden Stromes resp.:

$$P = \frac{600\ Q}{g} (V - v)^{kil.} \text{ oder } P = \frac{300\ Q \cdot h}{v}^{kil.}$$

folgt.

Der Fall, wo der Spielraum der Schaufeln im Gerinne sehr groß ist.

§. 112. Wenn die Schaufeln viel schmaler sind, als das Gerinne, in welchem sie sich bewegen, so entweicht eine beträchtliche Menge Wasser unterhalb und an den Seiten derselben ohne Wirkung und der Nutzeffect wird bedeutend vermindert. Um in diesem Falle die Rechnung mit einiger Genauigkeit auszuführen, muß man in die obigen Formeln nur das Gewicht der Wassermenge einführen, welche direct auf das Rad wirkt. Kennt man zu diesem Ende nach den im sechsten Abschnitte, §. 73 ffg. aufgestellten Regeln die Ausflußmenge Q der Schützöffnung und die Geschwindigkeit V des Wassers beim Eintritte in das Rad, so gibt der Quotient:

$$\frac{Q}{V}$$

näherungsweise die Fläche des Querschnittes $abcd$ (Fig. 42) des Wassers im Gerinne und mithin die Höhe ab des mittleren Wasserspiegels unter dem Rade während der Bewegung, eine Höhe, welche man noch besser direct messen kann, wenn die Schaufeln entfernt sind. Ist nun ab und der untere Spielraum der Schaufeln im Gerinne bekannt, so ergibt sich die Fläche $a'b'c'd'$, welche der Wirkung des Stromes direct ausgesetzt ist. Bezeichnet man diese Fläche mit A' und die Fläche $abcd$ mit A, so hat man $A = \frac{Q}{V}$ und $\frac{A'}{A} = \frac{A'V}{Q}$, und die theoretischen Formeln des §. 110 werden für den allgemeinen Fall:

$$Pv = \frac{1000\ A'V}{g} (V - v)\, v^{k \cdot m} \text{ und } P = \frac{1000\ A'V}{g} (V - v)^{kil.}.$$

Versuche von Christian*) lehren, daß auch in diesem Falle die Geschwindigkeit des Rades, welche dem Maximum des Effectes entspricht:

$$v = 0{,}4\, V$$

ist, und daß alsdann der wirkliche Nutzeffect ungefähr 0,75 von dem

*) Mécanique industrielle, Tome 1, page 329.

beträgt, welchen die obige Formel gibt, wenn die Schaufeln ganz in den Strom getaucht sind.

Verbesserungen, welche von verschiedenen Schriftstellerrn vorgeschlagen sind.

§. 113. Hiernach übertragen diese Räder in der Praxis und unter den vortheilhaftesten Umständen weniger als den dritten Theil der absoluten Leistung der bewegenden Kraft, und bei den gewöhnlichen Einrichtungen ist der Nutzeffect noch viel geringer und erreicht selten 0,2 oder 0,25 von dieser Größe.

Mehrere Schriftsteller haben Mittel zur Vergrößerung des Nutzeffectes der Räder mit geraden Schaufeln angegeben. Deparcieux und Bossut haben durch eine Neigung der Schaufeln gegen den Strom unter einem Winkel von etwa 25° mit der Verlängerung des Halbmessers bei Rädern, welche sich in geneigten Gerinnen bewegen, eine geringe Vermehrung des Effectes erhalten *). Fabre **) hat empfohlen, unter der Axe des Rades in dem Gerinne eine Schwelle und eine Verbreitung anzubringen, um den Durchgang des Wassers zu erleichtern; auch hat man vorgeschlagen, den Wänden der Ausflußöffnung die Form des Wasserstrahles zu geben und das Schützbrett so weit als möglich unter das Rad zu neigen, wodurch, wie man im Abschnitt 6, §. 64 gesehen hat, die Contraction und der Verlust an lebendiger Kraft, sowie der Effect des Widerstandes der Wände vermindert wird. Endlich hat man nach Morosi an den verticalen Seiten der Schaufeln Ränder von $0^m,05$ bis $0^m,08$ Vorsprung angebracht. Die beiden ersten Mittel sind von ziemlich gutem Erfolge, was die Ränder betrifft, so geht aus den Beobachtungen, welche Poncelet an einer Stampfmühle in der Pulverfabrik zu Metz gemacht hat, hervor, daß die dadurch erzielte Vermehrung $\frac{1}{15}$ bis $\frac{1}{12}$ des übertragenen Nutzeffectes, welcher stattfindet, wenn die Schaufeln keine Ränder haben, betragen kann. Alle diese Mittel zur Vervollkommnung der vorliegenden Räder sind jedoch nicht im Stande, das Maximum des Nutzeffectes über 0,35 des absoluten Effectes zu erheben. Dieselben können also die Mängel nicht beseitigen, welche an den Rädern mit geraden Schaufeln haften, indem durch die Stöße und durch die Geschwindigkeit, welche das Wasser, nachdem es gewirkt hat, noch besitzt, ein so großer Verlust an lebendiger Kraft entsteht, daß nur ein kleiner Theil der bewegenden Kraft auf diese Räder übertragen wird. Dessenungeachtet haben diese Räder für die Industrie einige wichtige Eigenschaften und die vorzüglichste derselben ist die Fähigkeit, eine große Geschwindigkeit annehmen zu können, ohne daß sich der Nutzeffect von dem ihnen zukommenden Maximum entfernt, eine Eigenschaft, wodurch man in vielen Fällen der Anwendung zusammengesetzter Zahnräderwerke überhoben wird. Um die erwähnten Verluste an lebendiger Kraft zu vermeiden und dabei doch den verticalen Schaufelrädern diesen schätzbaren Vorzug zu bewahren, hat Poncelet die Räder mit gekrümmten Schaufeln erfunden, deren Theorie im Folgenden vorgetragen werden wird.

---

*) Traité d'hydrodynamique, Tome II, Nr. 812 et suivans.

**) Essai sur la construction des machines hydrauliques.

Verticale Räder mit gekrümmten Schaufeln.

Kurze Beschreibung derselben.

§. 114. Diese Räder, welche dazu bestimmt sind, überall die alten Schaufelräder mit Vortheil zu ersetzen, und von denen schon eine große Anzahl in Frankreich und in andern Ländern existiren, verdanken ihre besseren Eigenschaften der Form der Schaufeln und einigen anderen Einrichtungen, wobei die Resultate der Theorie und der Erfahrung zum Grunde gelegt sind und welche zuvor kurz beschrieben werden sollen.

Die Schützöffnung ist folgendermaßen eingerichtet: Der Boden des Gerinnes (Fig. 43) und der des Behälters liegen ziemlich in der gegenseitigen Verlängerung oder gehen durch eine tangentielle Krümmung in einander über, die verticalen Seiten sind nach den Vorschriften des sechsten Abschnittes, §. 64 mit gekrümmten Wänden versehen, um dadurch die Contraction an den Seiten aufzuheben; das Schützbrett neigt sich unter dem Rade gewöhnlich so, daß einer Basis von 1 oder 2 eine Höhe von 2 entspricht. Hieraus folgt, daß die Contraction bedeutend vermindert wird und daß der Ausflußcoefficient je nach der größeren oder geringeren Neigung des Schützbrettes 0,75 oder 0,80 beträgt. (Sechster Abschnitt, §. 64.)

Da ferner das Gerinne genau die Breite der Schützöffnung hat, so behält das Wasser ziemlich genau dieselben Dimensionen, wie beim Ausflusse und es entsteht fast gar kein Verlust an lebendiger Kraft bei seinem Eintritte in das Gerinne.

Das Gefälle des Gerinnes von der Schützöffnung bis unter das Rad ist $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{15}$, um dadurch dem Wasser alle Geschwindigkeit zu erhalten, welche es beim Heraustritte aus jener Oeffnung besaß, eine Einrichtung, die übrigens nicht ganz unerläßlich ist.

Der Boden des Gerinnes ist tangent an dem äußeren Umfange des Rades, wobei jedoch ein geringer Spielraum gelassen werden muß. Unter dem Rade und von dem Halbmesser aus, welcher auf jenem geradlinigen Theile des Gerinnes rechtwinklig steht, sind die Schaufeln von einem Kreisstücke umgeben, welches mit dem Rade concentrisch ist und dessen Ausdehnung die Länge eines Zwischenraumes zwischen zwei Schaufeln plus $0^m,05$ bis $0^m,06$ beträgt, damit dasselbe wenigstens zwei Schaufeln umfaßt und verhindert, daß das Wasser durch den freien Raum entweichen kann, welcher in gewissen Lagen des Rades zwischen den Schaufeln und dem Boden des Gerinnes bleiben würde, wenn letzterer ganz gerade wäre.

Dieses kreisbogenförmige Stück endigt mit einem plötzlichen Absatze, dessen Scheitel im Niveau des mittleren Wassers im Freigerinne liegen muß und der den Zweck hat, die Entladung des Rades zu erleichtern; aus demselben Grunde gibt man dem Freigerinne die ganze Breite und Tiefe, welche sich bei jeder Localität unmittelbar hinter dem Absatze erreichen läßt.

Die Schaufeln sind zwischen zwei kreisförmigen Kränzen eingeschoben, welche verhindern, daß sich das Wasser seitwärts ausbreite, statt auf die Schaufeln zu wirken. Die Breite dieser Kränze in der Richtung des Halbmessers muß wenigstens den vierten Theil der Höhe des Gefälles betragen, wie man weiter unten sehen wird. Der innere Abstand der Radkränze ist gewöhnlich um $0^m,06$ bis $0^m,10$ größer, als die Breite der Oeffnung und des Gerinnes, damit das Wasser leicht in die Schaufeln eintreten kann. Die verticalen Wangen des Gerinnes haben unterhalb des Rades einen kreisförmigen und mit den Kränzen concentrischen Ausschnitt, damit sich dieselben frei drehen können, ohne dem Wasser einen Austritt an den Seiten des Rades zu gestatten.

Die Krümmung der Schaufeln ist gleichgültig, wenn sie nur stetig ist und sich fast tangentiell an den äußeren Umfang und rechtwinklig an den inneren Umfang anschließt. Man macht sie gewöhnlich kreisförmig, und errichtet, um ihren Mittelpunct zu finden, im Puncte b (Fig. 43), wo die Oberfläche des Wasserstrahles den äußeren Umfang des Rades trifft, ein Perpendikel auf dieser Oberfläche ab und nimmt alsdann auf dieser Linie den Mittelpunct O nahe an dem inneren Umfange des Kranzes, und zwar außerhalb dieses Umfanges, wenn die Kränze sehr breit, und innerhalb, wenn sie sehr schmal sind, um den Schaufeln keine unnütze Ausdehnung und ihrem letzten Elemente möglichst die Richtung des Halbmessers zu geben. Aus dieser Construction sieht man, daß die Schaufeln an dem äußeren Umfange nicht vollkommen tangent werden, wodurch auch der Austritt des Wassers erschwert werden würde, und der Aufriß zeigt, daß die Neigung der beiden Curven oder ihrer Tangenten für Wasserstrahlen von $0^m,2$ bis $0^m,3$ Höhe ungefähr 30° beträgt.

Was die Anzahl der Schaufeln anlangt, so erhält ein Rad von 3 bis 4 Meter Durchmesser gewöhnlich deren 36 und ein Rad von 6 bis 7 Meter 48. Man fertigt sie aus Eisenblech von 4 bis 6 Millimeter Stärke, oder aus Holz, wie die Dauben einer Tonne. Die Ränder der hölzernen Schaufeln müssen sich mit einem dünnen Blechstreifen endigen, um den Stoß des Wassers gegen die Stärke des Holzes zu vermeiden.

Gleichung für die Räder mit gekrümmten Schaufeln.

§. 115. Nach dieser Beschreibung ist es leicht, die Modificationen anzugeben, welche mit der allgemeinen Gleichung in §. 95 vorgenommen werden müssen, um dieselbe auf die vorliegenden Räder anzuwenden. Es sei:

V die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser im äußeren Umfange des Rades ankommt und welche nach der in §. 114 beschriebenen Einrichtung der Schützöffnung und des Gerinnes sehr nahe gleich der ist, welche der Druckhöhe über dem Fachbaume der Oeffnung entspricht, und

v die Geschwindigkeit des äußeren Radumfanges.

Da die Geschwindigkeiten V und v fast in derselben Richtung liegen, so leuchtet zuvörderst ein, daß bei dem Eintritte des Wassers in das Rad kein Stoß stattfindet und daß man hat:

$$u = 0.$$

Ferner ist auch $h' = 0$, weil das Wasser im unteren Theile des Rades und ziemlich genau im Niveau des unteren Behälters eintritt.

Die relative Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers in die Schaufeln ist offenbar:

$$V - v,$$

und mit dieser Geschwindigkeit erhebt sich das Wasser längs der krummen Fläche der Schaufeln. Seine Bewegung wird zuvörderst durch die Schwere und die Centrifugalkraft verzögert, aber ohne jetzt, wie dies später geschehen wird, die Wirkungen dieser beiden Kräfte zu untersuchen, sieht man leicht ein, daß auf das Wasser, nachdem es in dem höchsten Puncte seiner Bahn angekommen ist, beim Herabsteigen dieselben Kräfte wirken, welche ihm für eine jede Lage dieselbe Geschwindigkeit wieder ersetzen, welche dasselbe beim Hinaufsteigen besaß. Das Wasser wird also mit einer relativen Geschwindigkeit aus der Schaufel treten, die an der Krümmung der Letzteren im Endpuncte und auch sehr nahe an dem Umfange des Rades tangent und seiner Eintrittsgeschwindigkeit:

$$V - v$$

gleich ist. Da dasselbe aber außerdem in Folge der fortschreitenden Bewegung, welche es mit der Schaufel gemein hat, die Geschwindigkeit v in entgegengesetzter Richtung von V hat; so folgt, daß die absolute Austrittsgeschwindigkeit des Wassers gleich:

$$w = V - 2v$$

ist.

Hiernach wird die allgemeine Gleichung in §. 95 für dieses Rad:

$$Pv = \tfrac{1}{2} MV^2 - \tfrac{1}{2} M (V - 2v)^2$$

oder:

$$Pv = 2M(V - v)\, v.$$

Diese Gleichung zeigt, daß der theoretische Nutzeffect dieses Rades doppelt so groß ist, als der für die gewöhnlichen Räder mit geraden Schaufeln.

Bedingung für das Maximum des Effectes.

§. 116. Da die Bedingung für das Maximum des Effectes $w = 0$ ist, welche sich hier auf:

$$V - 2v = 0 \text{ oder } v = \tfrac{1}{2} V$$

reducirt; so sieht man, daß es dieselbe ist, wie für die Räder mit gewöhnlichen Schaufeln; aber das Maximum des Nutzeffectes ist doppelt so groß und hat den Werth:

$$Pv = \tfrac{1}{2} MV^2 = MgH,$$

wenn man mit H die Druckhöhe des Wassers über dem Mittelpuncte der Schützöffnung bezeichnet. Aus dieser Formel geht hervor, daß das vorliegende Maximum gleich dem größten aller möglichen Effecte ist und daß dieses Rad theoretisch die gesammte Quantität der Arbeit überträgt, welche die Schwere dem Wasser bei seinem Herabfalle mittheilt.

Dimensionen, welche den Kränzen zu geben sind. Wirkungen der Centrifugalkraft.

§. 117. Die Höhe, bis zu welcher sich das Wasser erheben kann, indem es auf den Schaufeln fortgleitet, bestimmt die den Kränzen zu gebende Breite; es ist also von Wichtigkeit, seine aufsteigende Bewegung längs dieser krummen Fläche, welche vorhin nur kurz erwähnt ist, etwas genauer zu untersuchen.

Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß der Weg, welchen jeder Punct des Rades in der ziemlich kurzen Zeit beschreibt, worin das Wasser mit derselben Schaufel in Berührung bleibt, fast geradlinig und horizontal ist, und daß man deshalb ohne merklichen Fehler von der allgemeinen fortschreitenden Bewegung der letzteren abstrahiren kann, um sich nur mit der des darauf hingleitenden Wassers zu beschäftigen, wofern man auf die Wirkungen der Centrifugalkraft Rücksicht nimmt, welche der Rotation der Schaufel entspricht.

Betrachten wir also ein Element dM der Masse eines Wasserfadens, welcher auf dieser Schaufel emporsteigt. Es sei:

ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades und

r der Abstand des Elementes dM vom Mittelpuncte des Rades;

so ist die Rotationsgeschwindigkeit des Elementes dM:

$$\omega r$$

und die Centrifugalkraft, welche das Aufsteigen zu verhindern strebt:

$$\frac{dM \cdot \omega^2 r^2}{r} = dM \cdot \omega^2 r.$$

Wenn nun diese Masse in dem Zeitelemente dt den Raum dr in der Richtung des Halbmessers des Rades durchläuft, so ist die entsprechende Quantität der Wirkung der Centrifugalkraft:

$$dM \cdot \omega^2 r \cdot dr^{\,k.\,m}.$$

Bezeichnet man mit R und R' den äußeren und inneren Halbmesser des Radkranzes, so wird die gesammte von der Centrifugalkraft auf jenes Element ausgeübte Quantität der Wirkung vom Eintrittspuncte in das Rad bis in die Entfernung R' von dessen Mittelpuncte:

$$Md\omega^2 \frac{(R^2 - R'^2)^{\,k.\,m}}{2}$$

sein.

Was die Wirkung der Schwere betrifft, so ist der Weg, welchen das Wasser in ihrer Richtung durchläuft, einfach gleich:

$$R - R'$$

und die gesammte Quantität der Arbeit bei dieser Bewegung ist:

$$gdM\ (R - R')^{\,k.\,m}.$$

Wenn das Massenelement dM, auf dieser Höhe ankommend, alle seine Geschwindigkeit verloren hat, so ist die Aenderung seiner lebendigen Kraft:

$$dM\ (V - v)^2,$$

weil dasselbe beim Eintritte die Geschwindigkeit $(V - v)$ hatte.

Vernachlässigt man bei dieser Bewegung den Widerstand der Wände, welcher von sehr geringem Einflusse sein muß; so gibt das Princip der lebendigen Kräfte:

$$dM\ (V - v)^2 = dM\omega^2\ (R^2 - R'^2) + 2\,gdM\ (R - R')\ ^{*}),$$

*) Wenn man ganz streng verfahren will, so muß man bemerken, daß die der relativen Tangentialbewegung des Molecules dM auf der Curve der

woraus folgt:

$$\frac{(V-v)^2}{2g} = \omega^2 \frac{(R^2-R'^2)}{2g} + R - R'.$$

Schaufeln entsprechende bewegende oder Trägheitskraft, welche wir durch $dM \frac{d^2 s}{dt^2} = dM \frac{du}{dt}$ ausdrücken wollen, wo s der von dM auf dieser Curve beschriebene Bogen und u die relative Geschwindigkeit am Ende einer gewissen Zeit ist, der Summe aus der Componente der Centrifugalkraft $\omega^2 r dM$ nach dem Curvenelemente ds und aus der Componente des Gewichtes gdM nach derselben Richtung gleich ist. Bezeichnet man also die veränderlichen Winkel, welche die Richtung der Schwere und die der Centrifugalkraft mit der des Elementes ds bilden, mit ψ und φ; so hat man für die relative Bewegung auf der Curve, wenn die des Rades gegeben ist:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \omega^2 r \cos. \psi + g \cos. \psi = \omega^2 r \,.\, \frac{dr}{ds}\, g \cos. \varphi,$$

weil $ds \cos. \psi = dr$ ist und die Normalcomponenten der Kräfte auf die Bewegung längs der Curve keinen Einfluß haben und als durch die Reaction des Rades aufgehoben oder gegen die bewegenden Kräfte der verschiedenen Molecule unbeachtbar angesehen werden.

Multiplicirt man diese Gleichung mit ds und integrirt von R bis R' oder von $u = V - r$ bis zu einem $r = R'$ entsprechenden beliebigen Werthe $u = u'$; so erhält man:

$$u^2 - u'^2 = \omega^2 (R^2 - R'^2) + 2g \int_{R'}^{R} \cos. \varphi ds.$$

Um das letzte Glied im zweiten Theile dieser Gleichung integriren zu können, müßte φ als Function von s bekannt sein, was nicht der Fall ist, weil s selbst eine Function von t ist und von dem Gesetze der relativen Bewegung auf der Curve abhängt, während dieses Gesetz die Integration der obigen Differentialgleichung voraussetzt, welche folglich vorher auf eine andere zurückgeführt werden muß, worin nur zwei Veränderliche, wie die Zeit und den von der Curve um die Axe des Rades beschriebene Winkel enthält.

Aber wenn man annimmt, wie es hier der Fall ist, daß die Richtung des veränderlichen Halbmessers r sehr wenig von der des verticalen Halbmessers des Rades während der ganzen auf- und niedersteigenden Bewegung von dM längs der Curve verschieden ist; so ist auch φ sehr wenig von ψ oder $\cos. \varphi ds$ sehr wenig von dr verschieden, so daß man näherungsweise hat:

$$\int_{R'}^{R} \cos. \varphi dr = R - R',$$

wie im Texte angenommen ist.

Allgemein, wenn der Winkel, welchen das Rad beschreibt, während sich das Molecul dM von einem Ende der Curve bis zum andern bewegt, sehr klein ist, so daß diese Curve nahezu als zu ihrer mittleren Lage parallel bleibend betrachtet werden kann; so kann man das Integral $\int \cos. \varphi ds$ für diese mittlere Lage berechnen, ohne auf die allgemeine Bewegung Rücksicht zu nehmen. Da aber $ds \cos. \varphi ds$ die Projection von ds auf die Verticale ist, so drückt $\int_{R'}^{R} \cos. \varphi ds$ nahezu die verticale Höhe zwischen den Puncten der Curve aus, welche den Entfernungen R, R' von der Axe des Wasserrades entsprechen.

In dieser Gleichung kennt man V, $v = \omega R$, ω und R; es ist also leicht, daraus den Werth für R' und also auch den für die Breite $R - R'$ der Radkränze abzuleiten. Man findet:

$$R' = \frac{-g + \sqrt{(g + \omega^2 R)^2 - (V - v)^2 \omega^2}}{\omega^2}.$$

Da die Centrifugalkraft dem Aufsteigen des Wassers entgegenstrebt, so ist klar, daß, wenn man von dieser Ursache der Verzögerung abstrahirte, man für $R - R'$ einen etwas zu großen Werth finden würde, welcher dem allgemeinen Falle:

$$R - R' = \frac{(V - v)^2}{2g}$$

und in dem Falle des Maximums des Nutzeffectes, wofür

$$v = \tfrac{1}{2} V$$

ist, wäre

$$R - R' = \frac{V^2}{8g} = \tfrac{1}{4} H.$$

Gibt man also den Kränzen eine Breite gleich dem vierten Theile des disponibelen Gefälles, so ist man sicher, daß das Wasser bei seiner Erhebung in den Schaufeln in dem vorliegenden Falle dieselben nicht überschreiten kann. Es ereignet sich jedoch oft, daß sich das Rad mit einer etwas geringeren Geschwindigkeit, als die dem Maximum des Effectes entsprechende, bewegt, und in der Wirklichkeit reducirt sich auch der Wasserstrahl nicht auf einen einzelnen Faden, wie bei der vorhergehenden Untersuchung angenommen ist, und die ersten in das Rad tretenden Wassertheilchen werden von den dahinterliegenden fortgestoßen, so daß sich das Wasser etwas höher erhebt, als die obigen Formeln angeben. Aus diesem Grunde muß man den Kränzen etwas mehr Breite geben, als man durch jene Formeln gefunden hat. Für Gefälle von $0^m,6$ bis $0^m,8$ nimmt man dieselbe gleich $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{2}$ und für größere gleich $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{3}$ der Höhe des Gefälles.

Hinsichtlich des Herabsteigens der Flüssigkeit in den Schaufeln bemerkt man, daß dieselbe in jedem Puncte eben denselben Kräften unterworfen ist, welche also beim Herabsteigen genau dieselbe Quantität der Wirkung auf dieselbe ausüben, die sie beim Hinaufsteigen hervorbrachten, und daß die Flüssigkeit bei der abermaligen Ankunft an dem unteren Umfange des Rades die relative Eintrittsgeschwindigkeit $V - v$ aber in entgegengesetzter Richtung wieder erlangt haben wird. Die absolute Austrittsgeschwindigkeit des Wassers aus dem Rade in der Richtung des Wasserstromes ist demnach $= -(V - v) + v = 2v - V$, welche für den Fall des Maximums, wo $v = \frac{1}{2} V$ ist, gleich Null wird, wie es auch die Bedingungen für das Maximum des Effectes verlangen.

Erfahrungsresultate und practische Formeln.

§. 118. Beobachtungen, welche zuerst an einem Modelle und darauf an wirklich ausgeführten größeren Rädern *) gemacht sind, leh-

*) Mémoire sur les roues hydrauliques à aubes courbes par *Poncelet*.

ren, daß die dem Maximum des Nutzeffectes entsprechende Geschwindigkeit im Mittel:

$$v = 0{,}55\, V$$

ist, und daß für Gefälle von 2^m und darüber bei Schützöffnungen von $0^m,08$ bis $0^m,12$ Höhe der practische Nutzeffect 0,65 von dem theoretischen Effecte beträgt; man hat also:

für den allgemeinen Fall:

$$Pv = 1{,}30 \cdot M\,(V - v)\,v = 1{,}30\, \frac{1000\, Q}{g}\,(V - v)\,v^{\,k \cdot m}$$

und für den des Maximums:

$$Pv = 0{,}65\, MgH = 0{,}65 \cdot 1000\, QH^{\,k \cdot m}.$$

Für Gefälle von $1^m,5$ und darunter, bei Oeffnungen von $0^m,2$ bis $0^m,3$ Höhe ist der practische Nutzeffect 0,75 des theoretischen und die Formel wird

für den allgemeinen Fall:

$$Pv = 1{,}50 \cdot M\,(V - v)\,v = 1{,}50 \cdot \frac{1000\, Q}{g}\,(V - v)\,v^{\,k \cdot m}$$

und für den des Maximums:

$$Pv = 0{,}75\, MgH = 750\, QH^{\,k \cdot m}.$$

Dividirt man auf beiden Seiten dieser Gleichungen mit v, so folgt daraus respective:

$$P = 1{,}50 \cdot \frac{1000\, Q}{g}\,(V - v)^{\,kil.} \quad \text{oder} \quad P = 750\, \frac{QH}{v}^{\,kil.}$$

für den Werth des mittleren Druckes, welcher das Wasser in horizontaler Richtung gegen den äußeren Umfang des Rades ausübt.

Man sieht, daß die Räder mit gekrümmten Schaufeln $\frac{2}{3}$ bis $\frac{3}{4}$ der von der Schwere hervorgebrachten absoluten Quantität Arbeit, also immer mehr als das Doppelte von der übertragen, welche man durch die besten Räder mit geraden Schaufeln erhält, indem sie dabei ebenfalls den Vortheil behalten, sich mit großen Geschwindigkeiten bewegen zu können, ohne sich von ihrem Maximum des Effectes sehr zu entfernen. Diese Resultate sind an mehreren Rädern mit gekrümmten Schaufeln, welche in verschiedenen Gegenden von Frankreich und in anderen Ländern ausgeführt sind, bestätigt worden. Der reine Nutzeffect, d. h. abgesehen von allen Verlusten durch den Widerstand der Zapfreibungen, der Luft u. s. f. ist oft auf $\frac{2}{3}$ des absoluten Maximums des Effectes gestiegen, welches der gesammten Höhe des Gefälles von dem Niveau des Behälters bis zu dem Absatze des Gerinnes unter dem Rade entspricht.

Mittelschlächtige Räder mit geraden Schaufeln, welche sich in einem kreisförmigen Gerinne bewegen.

Kurze Beschreibung derselben.

§. 119. Mittelschlächtige Räder (Fig. 44) nennt man gewöhnlich solche, deren Schaufeln bis auf die halbe Höhe des Rades von einem kreisförmigen Kropfgerinne mit verticalen Seitenwänden eingeschlossen sind und welche das Wasser etwa in der Höhe ihrer Axe empfangen.

zwischen dem Boden des Gerinnes und den Seitenwänden läßt man dem Rade nur einen sehr kleinen Spielraum, den man mindestens auf $0^m,01$ zu reduciren suchen muß, um das nutzlose Entweichen des Wassers zu vermeiden. Aus demselben Grunde schließt man auch den Raum zwischen zwei Schaufeln nach dem inneren Umfange zu, läßt aber zwischen diesem Boden und der vorhergehenden Schaufel eine Lücke von $0^m,04$ bis $0^m,08$ Breite, damit die zwischen zwei Schaufeln enthaltene Luft beim Eindringen des Wassers entweichen kann.

Aus dieser Einrichtung sieht man, daß das Wasser bei seinem Eintritte gegen die Schaufeln stößt, daß dasselbe alsdann nach dem unteren Theile des Gerinnes herabsinkt und daselbst fast mit der Geschwindigkeit des Rades selbst austritt. Man muß übrigens auch hier, wie bei den Rädern mit gekrümmten Schaufeln, zur Erleichterung der Entladung des Rades unter demselben in dem Gerinne einen Absatz und eine Erweiterung anbringen.

Gleichung für die mittelschlächtigen Räder.

§. 120. Man bringt die Schützöffnung gewöhnlich so an, daß die Eintrittsgeschwindigkeit V die Richtung der Tangente an dem äußeren Umfange der Schaufeln oder der Geschwindigkeit v hat; unter dieser Voraussetzung leuchtet ein, daß die von irgend einer Wassermasse bei ihrem Eintritte verlorene Geschwindigkeit:

$$u = V - v$$

ist. Hierauf sinkt das Wasser von seinem Eintritte bis zu seinem Austritte um die Höhe h' herab und entweicht alsdann mit der Geschwindigkeit:

$$w = v.$$

Die allgemeine Gleichung für die Wasserräder wird demnach in dem vorliegenden Falle:

$$Pv = \tfrac{1}{2} MV^2 + Mgh' - \frac{M(V-v)^2}{2} - \frac{Mv^2}{2},$$

oder wenn man reducirt:

$$Pv = Mgh' + M(V-v)v.$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung ist genau der Nutzeffect, welcher dem Stoße des Wassers entspricht, wie man bei den gewöhnlichen unterschlächtigen Rädern (§. 109) gesehen hat, und das erste Glied ist die Quantität der Arbeit, welche die Schwere dem Wasser bei seinem Falle von der Höhe h' mittheilt.

Man kann bei diesen Rädern kein absolutes Maximum des Nutzeffectes erhalten.

§. 121. Um den Nutzeffect Pv mit der absoluten Quantität der Arbeit der bewegenden Kraft zu vergleichen, setze man $2gh$ für V^2; so wird die vorhergehende Gleichung:

$$Pv = Mg(h + h') - \tfrac{1}{2} M\left[(V-v)^2 + v^2\right]^{k.m}.$$

Da nun die gesammte Höhe $h + h'$ in jedem Falle gegeben und constant ist, so wird das Maximum des Effectes stattfinden, wenn man hat:

$$(V-v)^2 + v^2 = 0,$$

d. h.

$$V = v \text{ und } v = 0.$$

Hieraus sieht man, daß sich in dem vorliegenden Falle das absolute Maximum des Nutzeffectes nicht erreichen läßt, daß man sich demselben aber um so mehr nähert, je geringer sowohl die Geschwindigkeit v des Rades, wie die Geschwindigkeit V des Wassers wird.

Bedingungen für das relative Maximum des Nutzeffectes.

§. 122. Bei dem Mangel eines absoluten Maximums muß man wenigstens ein relatives Maximum zu erreichen suchen, und es bieten sich zwei verschiedene Fälle dar, welche wir sogleich untersuchen wollen.

Wenn die Schützöffnung und das Rad gegeben sind, so ist es auch die Eintrittsgeschwindigkeit V und nur v bleibt veränderlich; setzt man daher den Differentialcoefficienten des Ausdruckes von Pv in Beziehung auf v gleich Null, so erhält man für die Bedingung des Maximums:

$$v = \tfrac{1}{2} V,$$

wie für die Räder mit geraden oder gekrümmten Schaufeln, wo die Geschwindigkeit V ebenfalls durch die Natur der Aufgabe gegeben war. Die Gleichung für das Rad wird alsdann:

$$Pv = Mgh' + \tfrac{1}{2} Mgh = Mg\left(h' + \frac{h}{2}\right).$$

Wenn man dagegen aus gewissen Gründen, welche sich aus der zum Dienste der Maschine nothwendigen Geschwindigkeit ergeben haben, den Werth von v **a priori** festgestellt hat; so kommt es auf die Bestimmung von V an. Da aber die gesammte Höhe des Gefälles $h + h'$ constant ist, obgleich h und h' einzeln variiren können; so gibt die Differentiation des ersten Theiles der Gleichung:

$$Pv = Mg\,(h + h') - \frac{M}{2}\left[(V - v)^2 + v^2\right]$$

für die Bedingung des relativen Maximums des Nutzeffectes:

$$V = v$$

und für diesen Nutzeffect selbst:

$$Pv = Mg\,(h + h') - \frac{M}{2}\,v^2.$$

In diesem Falle wird also der Verlust an lebendiger Kraft oder an Nutzeffect nur durch die Geschwindigkeit herbeigeführt, welche das Wasser bei seinem Austritte aus dem Rade noch behält, und man sieht, wie vorhin, daß es vortheilhaft ist, v so klein zu machen, wie es der Dienst der Maschine und die Gleichförmigkeit der Bewegung nur erlaubt.

Erfahrungsresultate über die Geschwindigkeit.

§. 123. Die Erfahrung lehrt, daß man bei gut centrirten eisernen Rädern, in denen also die Dichtigkeit der einzelnen Theile nicht sehr variirt und deren Trägheitsmoment beträchtlich ist, der Geschwindigkeit v selten einen Werth unter

$$v = 0^m{,}6 \text{ oder } v = 0^m{,}8 \text{ in der Secunde}$$

geben kann, und daß man bei den gewöhnlichen hölzernen Rädern, welche sich vermöge der Porosität des Materials nicht so gut centriren lassen, v nicht kleiner als

$$v = 1^m \text{ oder } v = 1^m,5 \text{ in der Secunde}$$

annehmen kann. Ist v bekannt, so findet man daraus V und mithin die der Geschwindigkeit V zukommende Druckhöhe h. In dem Falle, wo $v = V = 1^m$ ist, ergibt sich h ungefähr $= 0^m,05$, woraus man sieht, daß die Druckhöhe des Wassers immer sehr gering sein muß; auch wendet man alsdann Schützbretter in Form der Ueberfälle an, welche nach unten gezogen werden, wenn das Wasser zutreten soll.

Man kann nicht immer in den obigen Grenzen bleiben, ohne genöthigt zu sein, den Rädern in der Richtung ihrer Axe eine übermäßige Breite zu geben; indessen gibt man doch dem Wasserstrahle über dem Schützbrette selten mehr als $0^m,20$ oder $0^m,25$ Höhe und vergrößert die Breite des Rades parallel zur Axe, wenn man über eine beträchtliche Wassermenge verfügen kann und ein Rad von einer beträchtlichen Kraft aufzustellen hat. Man sieht oft solche mittelschlächtige Räder, welche eine horizontale Breite von 6 bis 7 Metern haben.

Der Fall, wo die Richtuugen der Geschwindigkeiten V und v einen merklichen Winkel einschließen.

§. 124. Im Vorhergehenden ist angenommen, daß die Geschwindigkeit V dieselbe Richtung habe, wie die Geschwindigkeit v und daß mithin die verlorene Geschwindigkeit $= V - v$ sei. Oft findet diese Voraussetzung jedoch nicht statt und man hat alsdann nach der allgemeinen Theorie der hydraulischen Motoren, §. 18, wenn man mit γ den Neigungswinkel der beiden Geschwindigkeiten V und v gegen einander bezeichnet, für den Verlust an lebendiger Kraft, welcher dem Stoße beim Eintritte des Wassers entspricht:

$$M\,[V^2 + v^2 - 2\,Vv\cos.\gamma],$$

und wenn der Winkel γ ein rechter, also $\cos.\gamma = 0$ ist

$$M\,[V^2 + v^2].$$

Diesen Werth findet man auch direct, wenn man bemerkt, daß die Flüssigkeit bei ihrer Ankunft an dem Rade zuvörderst ihre Geschwindigkeit V und mithin die lebendige Kraft MV^2 verliert und daß alsdann die nächstfolgende Schaufel mit einer Geschwindigkeit v in senkrechter Richtung auf der der früheren Geschwindigkeit V dieser Flüssigkeit gegen letztere stößt, was denselben Effect hervorbringt, als wenn die Flüssigkeit die Schaufel mit derselben Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung der Bewegung träfe, wodurch ein neuer Verlust an lebendiger Kraft gleich Mv^2 verursacht wird, so daß der gesammte Verlust gleich:

$$M\,(V^2 + v^2)$$

ist. Man muß also zur Bestimmung des Verlustes an lebendiger Kraft beim Eintritte des Wassers in das Rad auf diesen Umstand immer Rücksicht nehmen, wenn die Höhe $h = \frac{V^2}{2g}$ und die Geschwindigkeit des Rades bedeutend genug sind, um bei dem Eintritte des Wassers einen merklichen Verlust an lebendiger Kraft zu verursachen.

Erfahrungsresultate und practische Formeln.

§. 125. Da der theoretische Nutzeffect im Allgemeinen

$$Pv = Mgh' + M(V - v)v$$

ist, so bleiben noch die Modificationen anzugeben, welche der Erfahrung gemäß mit dieser Formel vorzunehmen sind.

Die Beobachtungen, welche im Jahre 1828 mit Hülfe der Prony-schen Bremse an großen gußeisernen Rädern der Gewehrfabrik zu Chatelleraut, der Gießerei zu Toulouse und der Pulverfabrik zu Metz *) angestellt sind, zeigen, daß für die Geschwindigkeiten zwischen $v = 0{,}7$ und $v = 2{,}3$ das Verhältniß des wirklichen Nutzeffectes zu dem disponibelen Effecte 0,74 beträgt, und daß sich dieses Verhältniß nicht sehr ändert, sobald das von v zu V zwischen 0,33 und 0,66 bleibt. Hiernach hat man für die practische Formel dieser Räder:

$$Pv = 0{,}74\left[Mgh' + M(V - v)v\right]^{k \cdot m}.$$

Man bemerkt, daß bei diesen Rädern, wie bei allen andern derselben Art, welche mit Sorgfalt und mit einem sehr geringen Spielraum construirt sind, die Höhe des Wasserspiegels im Behälter über dem Eintrittspuncte des Wassers nur ein kleiner Bruch des ganzen Gefälles ist, wodurch der Einfluß des Gliedes $M(V - v)v$ auf die Resultate vermindert wird. Die Räder, mit welchen die obigen Versuche angestellt sind, befinden sich in diesem Falle; die Schaufeln dreheten sich in den Gerinnen mit einem Spielraume von höchstens $0^m{,}01$ auf dem Boden und an den Seiten, das Wasser konnte unterhalb leicht entweichen, und dem Zusammentreffen aller dieser Umstände muß man die günstigen Resultate zuschreiben. In der gewöhnlichen Praxis, wo alle Einzelheiten bei der Ausführung nicht so sorgfältig berücksichtigt werden, reducirt sich der Coefficient des Gliedes Mgh' auf 0,65 und auf einen noch geringeren Werth, wenn der Spielraum im Gerinne mehr als $0^m{,}02$ beträgt; man muß daher die Größe jenes Coefficienten nach der Einrichtung der Maschine modificiren.

Da $Mg = 1000\,Q^{kil.}$ ist, worin Q die in der Secunde sich ergießende Wassermenge bezeichnet; so wird die vorstehende Formel:

$$Pv = 740\,Q\left[h' + \frac{(V - v)v}{g}\right]^{k \cdot m}.$$

Man muß die Capacität der Zellen nach der eintretenden Wassermenge einrichten.

§. 126. Ein Umstand, der vor der Anwendung dieser Formel beachtet werden muß, ist das Verhältniß der Capacität der Zellen oder des Zwischenraumes zwischen zwei Schaufeln zu der Wassermenge, welche eingeführt werden muß; denn man muß versichert sein, daß die gesammte Flüssigkeit, welche sich ergießt oder aus der Schützöffnung sich ergießen soll, auf dem Rade zugelassen werden kann. Hierzu gelangt man leicht, wenn man bemerkt, daß, wenn

n die Anzahl der Zellen des Rades,

*) Expériences sur les roues hydrauliques par A. Morin.

q die disponibele Capacität des Raumes zwischen zwei Schaufeln, ihrem Boden und dem kreisförmigen Gerinne, und
μ die Anzahl der Umdrehungen des Rades in einer Minute

bezeichnet, alsdann $\frac{n\mu q}{60}$ die Wassermenge ist, welche in einer Secunde in das Rad eintreten kann. Da aber Q die nach den bekannten Formeln berechnete Ausflußmenge der Schützöffnung ist; so muß man immer:

$$Q < \frac{n\mu q}{60} \text{ oder höchstens} = \frac{n\mu q}{60}$$

haben.

Findet man dagegen $Q > \frac{n\mu q}{60}$, so wird die in das Rad tretende oder aus der Oeffnung sich ergießende Wassermenge nicht mehr Q, sondern $\frac{n\mu q}{60}$ sein, und man hat alsdann:

$$M = \frac{1000}{g} \cdot \frac{n\mu q}{60}.$$

Außerdem bildet sich in diesem Falle vor der Ausflußöffnung ein Stau oder eine Aufschwellung, welche den Ausfluß verändert und nicht mehr gestattet, die Ausflußmenge so zu berechnen, als wenn die Oeffnung in die freie Luft mündete. (Vergl. Abschnitt 6, §. 58 ffg.)

Unter diesen Umständen kann man das Glied $M(V - v)v$ der allgemeinen Gleichung, welches sich auf die Wirkung des Stoßes des Wassers gegen die Schaufeln bezieht, vernachlässigen, und blos:

$$Pv = 0{,}74 \cdot \frac{1000}{60} n\mu q\, h' = 12{,}3\, n\mu q h'$$

setzen, wenn man überzeugt ist, daß das Wasser den disponibelen Zwischenraum zwischen den Schaufeln wirklich erfüllt.

Oberschlächtige Zellenräder.

Kurze Beschreibung derselben.

§. 127. Diese Räder unterscheiden sich von den früheren darin, daß das Wasser, welches sie in Bewegung setzt, statt zwischen den Schaufeln, den Wänden und dem Boden eines Gerinnes enthalten zu sein, in Zellen aufgenommen wird, die an ihrem Umfange angebracht sind (Fig. 45). Das Wasser tritt gewöhnlich in dem oberen Theile des Rades in dieselben ein, nimmt die Geschwindigkeit des Rades an und sinkt mit den Zellen, in denen es enthalten ist, bis zu einer gewissen Tiefe herab, wo sein Niveau den Rand der Schaufel erreicht. Von dieser Lage an beginnt das Wasser wieder auszutreten und der Ausfluß dauert fast bis gegen den unteren Theil des Rades. Bei den großen Rädern, welche sich langsam bewegen, ist die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus den Zellen tritt, nahezu der des Rades gleich und außerdem beginnt der Ausguß erst sehr tief. Aus diesem Grunde nimmt man in der gewöhnlichen Theorie dieser Räder an, daß das Wasser dieselben erst dann verlasse, wenn es von der ganzen Höhe h' des Eintrittspunctes über dem Spiegel des unteren Gerinnes oder dem tiefsten Puncte des Rades herabgesunken sei.

Gleichung für die großen oberschlächtigen Zellenräder mit geringen Geschwindigkeiten.

§. 128. Unter diesen Voraussetzungen ist die Theorie dieser Receptoren dieselbe, wie die der mittelschlächtigen Räder.

Wenn die Geschwindigkeiten V und v einerlei Richtung haben, so ist die durch den Stoß vernichtete Geschwindigkeit $= V - v$ und der Verlust an lebendiger Kraft gleich:

$$M\,(V - v)^2;$$

die Austrittsgeschwindigkeit ist:

$$w = v,$$

und demnach die Gleichung für das Zellenrad:

$$Pv = \tfrac{1}{2}\,MV^2 + Mgh' - \frac{M\,(V - v)^2}{2} - \frac{Mv^2}{2},$$

oder wenn man reducirt:

$$Pv = Mgh' + M\,(V - v)\,v,$$

und wenn man den Nutzeffect des Rades mit der absoluten Quantität der Wirkung der bewegenden Kraft vergleichen will, so kann man, indem man für V^2 seinen Werth $2gh$ setzt, die Gleichung auf die Form:

$$Pv = Mg\,(h + h') - \tfrac{1}{2}\,M\left[(V - v)^2 + v^2\right]$$

bringen.

Diese Gleichungen, in denen übrigens für den Verlust an lebendiger Kraft, welcher durch den Stoß des Wassers beim Eintritte entsteht, $M\,(V^2 + v^2 - 2\,Vv\,cos.\,\gamma)$ statt $M\,(V - v)^2$ gesetzt werden muß (§. 124), wenn die Richtung der Geschwindigkeit V mit dem Umfange des Rades oder mit der Richtung der Geschwindigkeit v einen ziemlich großen Winkel bildete, sind identisch mit denen für die mittelschlächtigen Räder, und wenn man das Maximum des Effectes sucht; so findet man auch hier, daß das absolute Maximum nur für

$$V = v \text{ und } v = 0$$

stattfinden kann. Hierdurch wird angezeigt, daß dasselbe nicht existiren kann, daß man sich demselben aber um so mehr nähert, je langsamer man das Rad gehen läßt.

Bedingung für das relative Maximum des Effectes.

§. 129. Für das relative Maximum des Effectes findet man ebenso wie in §. 122:

$$v = \tfrac{1}{2}\,V,$$

wenn V gegeben ist, und:

$$v = V,$$

wenn man V nach Belieben einrichten kann, wobei alsdann v immer sehr klein sein muß.

Erfahrungsresultate und practische Formeln für große und gut eingerichtete Räder.

§. 130. Die großen Zellenräder, welche in der jetzigen Zeit gebaut werden, erfüllen ziemlich genau die Hypothesen, auf welche sich die vorstehende Theorie gründet; sie lassen das durch die Schützöffnung sich ergießende Wasser leicht zu und dieses verliert beim Eintritte wirklich die lebendige Kraft $M(V-v)^2$, und da ferner die Bewegung ziemlich langsam ist, so ist auch die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser das Rad verläßt, gleich der des Rades, und das Glied $M(V-v)v$ stellt genau die Effecte dar, welche der Ein- und Austrittsgeschwindigkeit des Wassers entsprechen. Die einzige bemerkenswerthe Differenz kann nur von dem Ausgusse des Wassers aus den Zellen, welcher etwas über dem tiefsten Puncte des Rades erfolgt, herrühren, so daß offenbar die Höhe, welche das Wasser im Rade durchlaufen hat, nicht ganz gleich h' ist. Es leuchtet ein, daß der Ausguß um so eher erfolgen wird, je größer die in die Zellen eingeführte Wassermenge im Verhältniß zu ihrer Capacität und je kleiner der Halbmesser des Rades ist. Deshalb trägt man bei guter Construction dafür Sorge, daß in die Zellen höchstens die Hälfte von der Wassermenge eintritt, welche sie überhaupt fassen können, und vergrößert den Halbmesser des Rades so viel als möglich, indem man das Wasser unterhalb des höchsten Punctes desselben eintreten läßt.

Unter diesen Umständen haben Versuche, welche im Jahr 1828 mit einem großen eisernen Zellenrade von zehn Meter Durchmesser in Guebwiller, Departement du Haut-Rhin, und im Jahre 1834 und 1835 mit Rädern von $3^m,425$, $2^m,28$ und $2^m,74$ Durchmesser *) angestellt sind, gelehrt, daß das Glied Mgh' der Formel mit dem Correctionscoefficienten 0,78 multiplicirt werden muß und daß alsdann die practische Formel:

$$Pv = 0{,}78\, Mgh' + M(V-v)\, v^{k \cdot m}$$

die Resultate der Erfahrung auf weniger als $\frac{1}{20}$ genau darstellt.

Bei den drei letzteren Rädern betrug die Höhe des Wasserspiegels im Behälter über der Zelle, welche das Wasser aufnahm, nur einen kleinen Theil des ganzen Gefälles, so daß das Glied $M(V-v)v$ wenig Einfluß auf die Resultate äußerte.

Bemerkungen über die Anwendung der vorhergehenden practischen Formel.

§. 131. Bei der Anwendung der vorhergehenden Formel muß man zuvor durch die in §. 126 angegebene Methode die Wassermenge ermitteln, welche von jeder Zelle aufgenommen wird, und sich überzeugen, ob dieselbe nicht sehr die Hälfte ihrer Capacität überschreitet.

Ferner darf die Geschwindigkeit v bei kleinen Rädern von $2^m,5$ Durchmesser den Werth von 2^m in der Secunde und bei großen Rädern von 3^m bis 4^m Durchmesser und darüber den Werth von $2^m,5$ nicht übertreffen.

Das Verhältniß der Geschwindigkeiten v und V kann übrigens zwischen 0,3 und 0,8 variiren, ohne daß der Nutzeffect eine merkliche

*) Expériences sur les roues hydrauliques par A. Morin, Cap. d'Artillerie.

Veränderung erleidet. Diese Eigenschaft bietet den großen Vortheil dar, daß man die in Rede stehenden Räder, je nach den Bedürfnissen der Maschine, mit sehr verschiedenen Geschwindigkeiten arbeiten lassen kann.

Die obigen theoretischen und practischen Formeln setzen übrigens voraus, daß das Wasser in tangentieller Richtung an dem Umfange des Rades in die Zellen tritt und durchaus nicht zurückgeworfen wird. Ist dieses nicht der Fall, und bildet insbesondere die Eintrittsgeschwindigkeit der Flüssigkeit mit dem mittleren Umfange der Zellen einen Winkel γ; so muß man für den Verlust an lebendiger Kraft, welcher durch den Stoß beim Eintritte des Wassers bewirkt wird, $M (V^2 + v^2 - 2 Vv \cos. \gamma)$ statt $M (V - v)^2$ setzen und demnach die theoretische Formel:

$$Pv = Mgh' + M (V \cos. \gamma - v) v$$

in Anwendung bringen, wobei alsdann in der Ausübung der Correctionscoefficient 0,78 zu nehmen ist, welcher sich aus den Versuchen mit einem Rade von $2^m,34$ Durchmesser, für welches man $\cos. \gamma = 0,98$ hatte, ergab.

§. 132. Was den Fall anlangt, wo der Eintrittspunct des Wassers in das Rad weit unter dem Scheitel des letzteren liegt, ohne daß ein kreisförmiges Gerinne angebracht ist; so hat man bis jetzt noch keine Erfahrung, aus welcher sich der Werth ableiten läßt, den alsdann der Coefficient der Formel in §. 128 bekommt. Man kann übrigens so lange, bis specielle Untersuchungen angestellt sein werden, annehmen, daß sich der Coefficient des Gliedes Mgh' durch den Ausguß des Wassers um so mehr vermindert, je tiefer der Eintrittspunct liegt, und daß sich derselbe wenigstens auf 0,6 reducirt, sobald dieser Punct in der Höhe der Axe des Rades liegt. Denn wenn man mit nD den Theil des Raddurchmessers bezeichnet, welcher die durch den Ausguß des Wassers verloren gehende Höhe des Gefälles darstellt, so wird diejenige Höhe, welche durch das Gewicht des Wassers nutzbar gemacht wird, allgemein durch die Formel:

$$h' - nD$$

ausgedrückt. Nun weiß man aber, daß wenn $h' = D$ ist,

$$h' - nD = 0{,}8 h', \text{ d. i.}$$

$$D - nD = 0{,}8\, D, \text{ also } n = 0{,}2$$

wird, und hieraus folgt, daß für $h' = \frac{1}{2} D$ das nutzbare Gefälle durch:

$$h' - 0{,}2\, D = h' - 0{,}4\, h' = 0{,}6\, h'$$

gemessen wird, wie im Vorhergehenden auch angenommen ist.

Diese Betrachtungen, welche den ganzen Nachtheil der Zellenräder zeigen, die das Wasser von der Seite empfangen, sind übrigens keineswegs auf solche Räder anwendbar, welche sich in kreisförmigen Gerinnen bewegen und bei welchen man dasselbe Verfahren, wie bei den mittelschlächtigen Rädern mit geraden Schaufeln und eben solchen Gerinnen anwenden kann.

Der Fall, wo sich die Zellenräder mit großen Geschwindigkeiten bewegen.

§. 133. Es gibt in vielen Maschinenwerken Zellenräder, welche weit entfernt sind, die Hypothesen zu gestatten, auf welche sich die

Theorie des §. 128 gründet; dahin gehören fast alle diejenigen, welche die Schmiedehämmer in Bewegung setzen und überhaupt alle Zellenräder mit großen Geschwindigkeiten. In diesen Fällen, wo außerdem der Halbmesser ziemlich klein ist, übt die Centrifugalkraft eine Wirkung aus, welche wegen ihres großen Einflusses nicht mehr vernachlässigt werden darf.

Bestimmung der Krümmung, welche die Oberfläche des Wassers in den Zellen annimmt.

§. **134.** Denn betrachten wir ein Element dm des in einer Zelle enthaltenen Wassers, so sei (Fig. 46)

r der Abstand Cm desselben von der Axe, und

ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades.

Die Centrifugalkraft, welche in der Richtung des Halbmessers wirkt, um dieses Massenelement weiter von der Axe zu entfernen, ist:

$$dm \cdot \omega r^2.$$

Außerdem ist das Gewicht dieses Elementes:

$$gdm,$$

und man sieht leicht ein, daß die Resultante dieser beiden Kräfte die Verticale CJ des Mittelpunctes in einem Puncte J schneidet, welchen man durch die Proportion:

$$\omega^2 r : g = Cm : CJ = r : CJ,$$

woraus sich

$$CJ = \frac{g}{\omega^2}$$

ergibt, findet. Da g und ω für ein und dasselbe Rad, wenn es in den Zustand der gleichförmigen Bewegung gekommen ist, constante Größen sind; so folgt, daß die Repulsionskraft *), welche das Wasser aus den Zellen zu drängen strebt, fortwährend durch den Punct J geht. Hieraus sieht man, nach den bekannten Gesetzen für das Gleichgewicht der Flüssigkeiten, daß die Oberfläche des Wassers in den Zellen eine cylindrische Fläche bildet, deren Axe immer durch den Punct J geht.

Sobald nun der Wasserspiegel durch den Rand der Zelle geht, fängt das Wasser an auszufließen, und es leuchtet nach dem Werthe von CJ ein, daß für eine in die Zelle eingeführte gegebene Wassermenge der Ausfluß desto eher erfolgen wird, je rascher sich das Rad bewegt.

Eintritt des Wassers in die Zellen.

§. **135.** Die Centrifugalkraft wirkt aber nicht allein auf das Wasser nach seinem Eintritte in die Zellen, sondern sie kann sogar

*) Bezeichnet man den Abstand mJ des Mittelpunctes der Repulsion von der Masse dm mit ϱ, so sieht man leicht, daß die Intensität dieser Kraft den sehr einfachen Ausdruck hat:

$$\varrho\omega^2 dm,$$

welcher das Gesetz der Pressungen in der ganzen Ausdehnung des Gefäßes oder Wände gibt, wenn man denselben integrirt, indem man die Masse der Flüssigkeit durch Schichten, welche mit dem Niveau concentrisch sind, in Elemente zerlegt.

seinen Eintritt ganz und gar verhindern. Denn betrachtet man den Hergang in dem Augenblicke, wo der Wasserstrahl gegen eine Schaufel tritt, und ist abc (Fig. 47) die Schaufel, V die Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers, v die Geschwindigkeit des Rades im mittleren Umfange; so muß, wenn der Stoß in senkrechter Richtung gegen die Fläche ab vermieden werden soll, die Geschwindigkeit V in zwei andere zerlegt werden, von denen die eine gleich v ist und die andere eine zu ab parallele Richtung hat. Hieraus geht hervor, daß, wenn die Flüssigkeit nicht von der inneren Seite der Setzschaufel ab abgestoßen und aus dem Rade geworfen werden soll, diese zweite Componente, welche die relative Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers darstellt, mit den Geschwindigkeiten V und v nothwendig kleinere Winkel, als amV und amv, welche der Richtung von ab entsprechen, bilden muß, so daß das Wasser gezwungen wird, gegen die innere Fläche der Zelle zu wirken. Ferner darf die Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers auch nicht zu schwach sein, und man sieht, daß es überhaupt erforderlich ist, daß die absolute Geschwindigkeit V des Wassers bedeutend größer ist als die Geschwindigkeit v des Rades, aber keinen zu großen Winkel mit derselben bildet. Diese beiden Bedingungen genügen indeß noch nicht, damit das Wasser in die Zelle eingeführt werde; es darf auch die Centrifugalkraft nicht so bedeutend sein, daß sie das Wasser bei seinem Eintritte in die Zelle wieder aus derselben hinaustreibt. Nun hat man aber in §. 102 gesehen, daß, wenn α und β die Neigungswinkel der Geschwindigkeiten V und v gegen ab bezeichnen, die relative Geschwindigkeit des Wassers in der Richtung ab gleich:

$$V \cos. \alpha - v \cos. \beta$$

und die entsprechende lebendige Kraft einer in das Rad tretenden Masse dM gleich:

$$Md\,(V \cos. \alpha - v \cos. \beta)^2$$

ist. Auch hat man im §. 29 gesehen, daß, wenn die den Endpuncten a und b der Schaufel ab zugehörigen Halbmesser mit R und R' bezeichnet werden, die gesammte Quantität der Wirkung, welche von der Centrifugalkraft auf die Masse dM zwischen a und b ausgeübt wird, gleich:

$$\frac{dM \cdot \omega^2 (R^2 - R'^2)}{2}$$

ist. Stellt endlich z die Höhe des Eintrittspunctes von dM über der Kropfschaufel bc dar, so fügt die Schwere zu der obigen lebendigen Kraft noch die Größe:

$$2\,gdMz$$

hinzu, wenn man annimmt, daß das Rad nur einen kleinen Winkel beschreibt, während die Masse dM auf der Setzschaufel ab herabfließt.

Soll demnach die Masse dM die Kropfschaufel bc erreichen können, so muß man nothwendig:

$$dM\omega^2 (R^2 - R'^2) < dM\,(V \cos. \alpha - v \cos. \beta)^2 + 2\,gdMz$$

haben. Kennt man nun R, R', V, α, v und β, so kann man leicht den größten Werth von ω bestimmen, über welchen hinaus die Masse *dM* nicht allein den Boden der Zelle nicht erreichen, sondern sogar bald aus derselben hinausgestoßen werden würde.

Vortheilhafteste Lage der Schaufel zur Aufnahme des Wassers.

§. 136. Es ist von Wichtigkeit, die Wassermenge zu kennen, welche von den Zellen aufgenommen werden kann, und die Lage des Mittelpunctes *J* der Curven des Wasserspiegels eignet sich zu der Bestimmung jener Wassermenge besser, als die Rechnung. Denn es wird immer leicht sein, die Fläche zu messen, welche zwischen den Seitenwänden der Zellen und dem Kreisbogen liegt, der mit dem Halbmesser *aJ* (Fig. 48) beschrieben ist; multiplicirt man diese Fläche mit der Länge der Schaufeln, so erhält man das gesuchte Volumen. Man sieht übrigens, daß jedesmal, wenn der Winkel *Jab* ein rechter oder stumpfer ist, Wasser in die Zelle eintreten kann; wenn dieser Winkel aber spitz ist, so wird der Kreis des Wasserspiegels über *ab* hinausfallen, und man kann überzeugt sein, daß alsdann kein Wasser aufgenommen werden wird. Dieser Fall tritt immer bei der ersten Zelle ein, welche in der Verticale liegt, sobald der Mittelpunct *J* innerhalb des äußeren Radumfanges fällt. Die zweite Zelle kann höchstens anfangen, Wasser aufzunehmen, wenn die Schaufel *ab* auf *aJ* rechtwinklig steht, und erst bei der dritten oder vierten Zelle tritt so viel Wasser ein, um das Rad in Bewegung zu setzen. In allen Fällen läßt die Lage des Punctes *J* die Schaufel erkennen, gegen welche man das Wasser richten muß, damit es am vortheilhaftesten aufgenommen werden kann.

Der Fall, wo der Mittelpunct der Repulsion außerhalb des Rades liegt.

§. 137. Was im Vorstehenden gesagt ist, setzt voraus, daß der Punct *J* innerhalb des äußeren Radumfanges liegt, ein Fall, der sich häufig bei den Rädern der Schmiedehämmer ereignet, wo in der Minute 30 bis 35 Umgänge gemacht werden; auch bemerkt man, daß bei diesen Rädern das Wasser erst von der dritten Zelle von oben aufgenommen wird. Liegt der Mittelpunct der Repulsion *J* außerhalb des Rades (Fig. 49), so nimmt die Wassermenge, welche eine Zelle aufnehmen kann, mit dem Winkel *Jam* zu, und ihr Maximum entspricht mithin der obersten Zelle. Bei Rädern, deren Geschwindigkeit nicht sehr groß ist und wo der Mittelpunct *J* außerhalb des äußeren Umfanges liegt, läßt man daher auch gewöhnlich das Wasser im Scheitel eintreten.

Bestimmung des Punctes, in welchem der mittlere Faden des Wasserstrahles den äußeren Umfang des Rades trifft.

§. 138. Um sich zu überzeugen, daß das Wasser wirklich in das Rad eingeführt wird und um die darin aufgenommene Wassermenge zu kennen, muß der Punct bestimmt werden, in welchem der aus der Schützöffnung strömende Wasserstrahl den äußeren Umfang erreicht. Dieses bietet keine Schwierigkeiten dar; denn nach dem im §. 73 ffg. des sechsten Abschnittes Mitgetheilten kann man aus den besonderen

Umständen, welche bei der Ausströmung obwalten, die Geschwindigkeit u im Endpuncte des Gerinnes immer berechnen, und da auch das Gefälle des Gerinnes oder der Winkel θ gegeben ist, welchen die Richtung desselben mit der Horizontale bildet (Fig. 50), so läßt sich hieraus die Bahn des mittleren Fadens construiren. Um dieselbe zu bestimmen, nehme man für ihren Anfang den unteren Endpunct des Gerinnes an, zähle die y in verticaler und die x in horizontaler Richtung; alsdann hat man:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g, \ \frac{d^2x}{dt^2} = 0;$$

hieraus folgt durch einmalige Integration:

$$\frac{dy}{dt} = gt + u \sin. \theta, \ \frac{dx}{dt} = u \cos. \theta$$

und durch nochmalige Integration:

$$y = \tfrac{1}{2} gt^2 + u \sin. \theta \cdot t, \quad x = u \cos. \theta \cdot t,$$

und wenn man den Werth von $t = \dfrac{x}{u \ \cos. \ \theta}$ aus der zweiten dieser beiden Gleichungen in die erste setzt:

$$y = \frac{gx^2}{2u^2 \cos. \theta} + x \tang. \theta.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der des äußeren Radumfanges in Beziehung auf denselben Anfangspunct der Coordinaten, so erhält man den gesuchten Durchschnittspunct des mittleren Wasserfadens mit dem Umfange des Rades; da jedoch die Rechnung ziemlich verwickelt ist, so gelangt man mit einer hinreichenden Genauigkeit zum Ziele, wenn man einen Theil jener Curve dadurch construirt, daß man verschiedene Werthe für x annimmt, dieselben auf die Axe der x trägt, alsdann nach der vorstehenden Formel die zugehörigen Werthe von y berechnet und auch diese gehörig aufträgt. Hierdurch erhält man so viele Puncte der in Rede stehenden Bahnlinie, als man verlangt, und wenn man durch diese Puncte eine Curve legt, so schneidet dieselbe den äußeren Umfang des Rades in dem gesuchten Eintrittspuncte des mittleren Wasserfadens. Zieht man durch diesen Punct vermittelst der Rechnung oder auch nur mit Hülfe des Lineales eine Tangente an die Curve, so gibt dieselbe die Richtung der Geschwindigkeit V. Alsdann kann man prüfen, ob dieselbe gegen die innere Seite der Schaufel ab gerichtet ist und ob das Wasser von dem Rade aufgenommen werden kann.

Wollte man die Aufgabe umkehren, und, wenn die Geschwindigkeit des Rades, die Form und die Lage der Schaufel, von welcher das Wasser zuerst aufgenommen werden soll, die Richtung und die Größe von V gegeben wäre, die Richtung und Größe von u bestimmen; so würde sich die bei Anwendung der Rechnung etwas verwickelte Auflösung vermittelst hinreichend genauer Constructionen sehr vereinfachen lassen.

Theorie der Zellenräder mit großen Geschwindigkeiten.

§. 139. Wir haben uns bei der Betrachtung des Eintrittes des Wassers in die Zellen etwas lange aufgehalten, weil derselbe bei Rädern mit großen Geschwindigkeiten von hoher Wichtigkeit ist. Untersuchen wir jetzt, wie man auch den Ausguß des Wassers in dem unteren Theile des Rades bei der Bestimmung des Nutzeffectes mit in Rechnung bringen kann.

Behält man die früheren Benennungen bei und bezeichnet außerdem
- γ den Winkel zwischen den Richtnngen der beiden Geschwindigkeiten V und v,
- q' die von jeder Zelle aufgenommene Wassermenge,
- n die Anzahl der Zellen des Rades,
- μ die Anzahl der Umdrehungen des Rades in einer Minute,
- Q die Ausflußmenge der Schützöffnung in einer Secunde,
- h' die Höhe, von welcher der Schwerpunct der Wassermenge q' von dem Augenblicke ihres Eintrittes in das Rad bis zu der Lage, wo das Wasser anfängt auszufließen, herabgefallen ist,
- q die in irgend einer Zelle enthaltene Wassermenge, nachdem der Ausguß begonnen hat,
- h die Höhe des Schwerpunctes dieser Wassermenge über dem Niveau des unteren Behälters oder dem tiefsten Puncte des Rades,
- M die Masse des in einer Secunde von dem Rade aufgenommenen Wassers;

so ist die lebendige Kraft des Wassers bei seinem Eintritte:

$$MV^2,$$

die, welche dasselbe durch den Stoß in der Zelle verliert (§. 124):

$$M(V^2 + v^2 - 2Vv\cos.\gamma),$$

und die, welche dasselbe bei seinem allmähligen Austritte aus den Zellen noch behält:

$$Mv^2.$$

Die Quantität Arbeit, welche die Schwere auf die eingeführte Wassermenge q' während ihres Herabsinkens von der Höhe h' ausübt, ist:

$$1000\,q'h'^{\,k.m},$$

und da in einer Secunde $\frac{n\mu}{60}$ Zellen vorübergehen, so ist die entsprechende Quantität Arbeit in einer Secunde:

$$1000\,\frac{n\mu}{60}\,q'h'.$$

Wenn das ganze von der Schützöffnung gelieferte Wasser von dem Rade wirklich aufgenommen wird, so hat man:

$$\frac{n\mu}{60}\,q' = Q,$$

und die vorhergehende Quantität Arbeit ist alsdann:

$$1000\,Qh'^{\,k.m}.$$

Was die Zellen anlangt, welche das Wasser ausgießen, so wird die Elementarbeit der Schwere für irgend eine derselben ausgedrückt durch:

$$1000\, qdh$$

und für die ganze Dauer ihres Herabsinkens von dem ersten Augenblicke des Ausgusses bis zu dem, wo kein Wasser mehr darin enthalten ist, hat man als Ausdruck der von der Schwere erzeugten Quantität Arbeit:

$$1000 \int qdh,$$

welcher zwischen den gehörigen Grenzen zu nehmen ist. Da die Anzahl der Zellen, welche in einer Secunde vorübergehen, $= \frac{n\mu}{60}$ ist, so ist die Arbeit der Schwere in der Secunde während der Periode des Ausgusses:

$$= 1000 \frac{n\mu}{60} \int qdh^{k.m}.$$

Endlich ist die Arbeit des Widerstandes oder der Nutzeffect in einer Secunde:

$$Pv^{k.m},$$

und mithin die Gleichung der lebendigen Kräfte:

$$Pv = 1000 \frac{n\mu}{60} \left[q'h' + \int qdh \right] + \frac{1000\, Q}{g} (V \cos.\gamma - v)\, v^{k.m}.$$

Wenn $\gamma = 0$, oder so klein ist, daß man $\cos.\ \gamma = 1$ setzen kann, so reducirt sich diese Gleichung auf:

$$Pv = 1000 \frac{n\mu}{60} \left[q'h' + \int qdh \right] + \frac{1000\, Q}{g} (V - v)\, v^{k.m}.$$

Näherungsmethode.

§. 140. Im zweiten Theile dieser Gleichung ist nur h' und der Gesammtwerth von $\int qdh$ unbekannt; man kann diese Größen durch Rechnung bestimmen, wenn man auf alle Umstände Rücksicht nimmt, welche beim Ausgusse des Wassers stattfinden; aber die Formeln, zu denen man gelangt, sind zu verwickelt, um in der Praxis Anwendung finden zu können, und man kann dieselben durch Näherungsmethoden ersetzen, welche wir jetzt näher erörtern wollen.

Zuerst ist die Lage der Schaufel zu bestimmen, bei welcher das Wasser anfängt auszufließen. Zu diesem Zwecke verzeichnet man in dem Profile des Rades (Fig. 51) durch den Rand einer jeden Schaufel das kreisförmige Niveau, welches derselben entspricht, und ermittelt alsdann durch Probiren, indem man das Profil der in einigen Zellen enthaltenen Wassermenge mißt, gegen welche Lage dieselbe der eingeführten Menge gleich ist. Wenn der Anfang des Ausgusses keiner der verzeichneten Schaufeln entspricht, so beschreibt man über oder unter derjenigen, welche jener Lage am nächsten kommt, aus dem Mittelpuncte J mehrere concentrische Kreisbogen. Durch die Durchschnittspuncte dieser Kreisbogen mit dem äußeren Umfange des Rades legt man Profile von Schaufeln und berechnet die Wassermenge, welche denselben entspricht. Nach drei oder vier Versuchen wird man mit hinreichender Genauigkeit die Höhe des Randes der Schaufel gefunden haben, bei welcher der Ausfluß des Wassers beginnt. Hiernach ist man im Stande, das Glied:

$$q'h'$$

zu berechnen.

Was das Glied $\int qdh$ betrifft, so wendet man auf dasselbe, da es sich nicht durch die gewöhnlichen Methoden der Integration ermitteln läßt, den Lehrsatz von Thomas Simpson an. Demzufolge theilt man die Höhe des Randes der Schaufel, welche anfängt, ihr Wasser zu verlieren, über dem Niveau des unteren Behälters in eine gerade Anzahl gleicher Theile (Fig. 52), durch die Theilungspuncte zieht man horizontale gerade Linien, welche den äußeren Umfang des Rades durchschneiden, und beschreibt durch diese Durchschnitte aus dem Mittelpuncte J die kreisförmigen Curven des Niveaus und die entsprechenden Profile der Schaufeln. Alsdann berechnet man die successiven Werthe der Wassermenge q, indem man dieselben mit q_1, q_2, q_3, q_4 rc. bezeichnet. Ist ferner die gerade Anzahl der Theile, in welche man die Höhe h_1 getheilt hat, gleich m, so wird ein jeder dieser Theile selbst gleich $\frac{h_1}{m}$, und man hat mit einer für die Praxis hinreichenden Genauigkeit:

$$\int qdh = \frac{h_1}{3 \cdot m}\left[q_1 + 2(q_3 + q_5 + q_7 + \text{rc.}) + 4(q_2 + q_4 + \text{rc.}) + q_{m+1}\right].$$

In den meisten Fällen genügt es, $m = 4$ zu nehmen, und man hat alsdann:

$$\int qdh = \frac{h_1}{12}\left[q_1 + 2q_3 + 4(q_2 + q_4) + q_5\right]^{k.m}.$$

Ueberdies ist $q = q'$ und $q = 0$, weil im tiefsten Puncte des Rades kein Wasser mehr enthalten sein kann; dasselbe kann sich mit q_4 ereignen, wodurch jedoch nichts an der Rechnung geändert wird, nur muß man alsdann eine etwas größere Anzahl von Theilen nehmen, um einen hinreichend genauen Werth zu erhalten.

Man sieht also hieraus, daß es in allen Fällen sehr leicht ist, auf die Wirkung der Centrifugalkraft und des Ausgusses des Wassers Rücksicht zu nehmen. Dieses Verfahren ist immer unerläßlich, wenn die Schnelligkeit der Bewegung es erfordert, was, wie man später sehen wird, dann der Fall ist, wenn der Werth $\frac{g}{\omega^2}$ des Abstandes CJ so gering ist, daß man die Wasserspiegel in den Zellen nicht mehr als horizontal ansehen darf.

Erfahrungsresultate über die vorstehende Formel.

§. 141. Beobachtungen an einem Rade mit großer Geschwindigkeit in einer Sägemühle der Vogesen und an einem Rade mit geringer Geschwindigkeit und directe Untersuchungen mit der dynamometrischen

Bremse an dem Rade eines Schmiedehammers haben gelehrt, daß diese neue Formel für die Zellenräder, wobei man auf alle Umstände der Bewegung Rücksicht nimmt, Resultate ergibt, welche mit der Erfahrung vollkommen übereinstimmen, und daß dieselbe daher durch keinen numerischen Coefficienten corrigirt zu werden braucht.

Da die hauptsächlichsten Verluste bei den Zellenrädern dem Ausgusse des Wassers zuzuschreiben sind, so vermindert man den Einfluß des letzteren, wenn man den Zellen eine Capacität gibt, welche dreimal oder wenigstens doppelt so groß ist, als das Wasservolumen, welches sie aufnehmen sollen, welche Einrichtung sich leicht bewerkstelligen läßt. In der Praxis hat das Profil der Zellenräder (Fig. 53) mehrere nahezu constante Dimensionen; so variirt z. B. die Entfernung der Schaufeln am äußeren Umfange zwischen $0^m,3$ und $0^m,4$, die Breite der Kränze oder Wangen, in denen sie eingesetzt sind, beträgt ebenfalls $0^m,2$ bis $0^m,5$; die Kropfschaufel bc ist nach dem Mittelpuncte des Rades und dem Rande a' der nächstfolgenden Schaufel $a'b'c'$ gerichtet, bc ist $= \frac{1}{2}\, a'c$. Zuweilen und besonders in den Schmieden, steht die Kropfschaufel senkrecht auf der Stoßschaufel ab und beide sind von Holz; bei den größeren Rädern aus Eisen gibt man der Schaufel eine leichte Krümmung, um den Winkel b abzurunden und das Eisenblech, aus dem dieselbe besteht, nicht zu zerbrechen, wenn man es unter einem scharfen Winkel biegen wollte.

Wasserräder mit verticalen Axen.

§. 142. Bisher ist nur von Wasserrädern die Rede gewesen, deren Axe horizontal liegt; es wird indeß nicht überflüssig sein, zu zeigen, wie sich die früher aufgestellten Principien auch auf den Fall anwenden lassen, wo die Axe vertical steht, da man diese Einrichtung zuweilen bei Mahlmühlen antrifft, wo sie den Vortheil darbietet, daß die Bewegung nicht umgesetzt zu werden braucht.

Horizontale Räder mit geraden Schaufeln.

§. 143. Betrachten wir zuvörderst den Fall eines horizontalen Rades mit geraden Schaufeln (Fig. 54), welches nur durch den Stoß des Wassers in Bewegung gesetzt wird. Wenn ein solches Rad den Zustand der gleichförmigen Bewegung angenommen hat, so ist seine Theorie von der der verticalen Räder mit geraden Schaufeln nicht verschieden. Es sei:

V die Geschwindigkeit, mit welcher der mittlere Faden des Wasserstrahles die gerade Schaufel AB trifft,

α der Neigungswinkel der Richtung dieser Geschwindigkeit gegen die Schaufel,

v die horizontale Geschwindigkeit des gestoßenen Punctes der Schaufel, sobald die Bewegung des Rades nahezu gleichförmig geworden ist, und

β der Neigungswinkel der Richtung dieser Geschwindigkeit gegen die Schaufel.

Die Richtung der Geschwindigkeit V liegt gewöhnlich in der verticalen Berührungsebene des Kreises, welchen der gestoßene Punct c

beschreibt, was auch für die Geschwindigkeit v der Fall ist. Nimmt man nun ferner an, daß die Ausdehnung der Schaufeln so groß ist, daß das Wasser beim Austritte aus dem Rade den Ueberschuß seiner normalen Geschwindigkeit über die der Schaufeln vollständig verloren hat; so folgt aus den in §. 99 aufgestellten Principien, daß der Verlust an lebendiger Kraft für die in jeder Zeiteinheit zufließende Wassermasse M gleich:

$$M\,(V \sin.\alpha - v \sin.\beta)^2$$

ist, und daß das Wasser nach dem Stoße mit einer relativen Geschwindigkeit:

$$V \cos.\alpha + v \cos.\beta$$

an der Schaufel entlang fließt, da die Componente der Geschwindigkeit des Rades in der Richtung der Schaufel nach der entgegengesetzten Seite von der von V gekehrt ist. Abstrahirt man nun von der Wirkung der Schwere, während das Wasser auf der Schaufel herabgleitet, was hier wegen der geringen Höhe dieser Schaufel wohl erlaubt ist; so ist die absolute Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser die Schaufel verläßt:

$$w = \sqrt{(V \cos.\alpha + v \cos.\beta)^2 + v^2 - 2v\,(V \cos.\alpha + v \cos.\beta) \cos.\beta}.$$

Die Gleichung für die Bewegung des Rades ist mithin:

$$Pv = \frac{MV^2}{2} - \frac{M\,(V \sin.\alpha - v \sin.\beta)^2}{2}$$
$$- M\,\frac{\left[(V \cos.\alpha + v \cos.\beta)^2 + v^2 - 2v\,(V \cos.\alpha + v \cos.\beta) \cos.\beta\right]}{2},$$

oder wenn man reducirt:

$$Pv = M\,(V \sin.\alpha - v \sin.\beta)\, v \sin.\beta.$$

Der zweite Theil dieser Gleichung enthält vier veränderliche Größen, V, v, α und β. Die erste hat die dem disponibelen Gefälle über dem Rade zukommende Geschwindigkeit zur Grenze, und da überdies einleuchtend ist, daß der theoretische Nutzeffect mit V zugleich zunimmt; so muß man diese Größe so groß als möglich annehmen, d. h. man muß die Höhe des Rades vermindern, indem man seine übrigen Dimensionen vergrößert, wenn es zur Aufnahme der entströmenden Wassermenge erforderlich sein sollte. Betrachtet man also V als eine durch die Localität und Construction bestimmte Größe, so muß man successive v, α und β variiren lassen, um die Bedingungen des relativen Maximums für eine jede derselben zu erhalten, und alsdann sehen, ob sich diese Bedingungen mit einander vereinigen lassen. Demgemäß ergeben sich die folgenden Beziehungen, wenn man in Beziehung auf

v differentiirt: $V \sin.\alpha - 2v \sin.\beta = 0$, also für das Maximum

$$v = \frac{V \sin.\alpha}{2 \sin.\beta},$$

α „ $V \cos.\alpha = 0$, also für das Maximum $\alpha = 100^\circ$

und mithin $v = \dfrac{V}{2 \sin.\beta}$,

β differentiirt: $V \sin. \alpha - 2 v \sin. \beta = 0$, also, wie zuerst, $\sin. \beta = \frac{V \sin. \alpha}{2 v}$.

Da diese letzte Beziehung mit der ersten identisch ist, so sieht man, daß der Winkel β unbestimmt bleibt, so daß man für das relative Maximum des Effectes nur die beiden Bedingungen:

$$\alpha = 100^{\circ}, \text{ und } v = \frac{V}{2 \sin. \beta}$$

hat, denen man immer genügen kann. Ferner folgt hieraus, daß man auch immer dem Rade eine beliebige Geschwindigkeit geben kann, da man für eine jede solche Geschwindigkeit mit Hülfe der zweiten Bedingung nur den Winkel β zu bestimmen braucht. Wenn die obigen Bedingungen erfüllt sind, so ist der von dem Rade übertragene Nutzeffect:

$$Pv = \frac{MV^2}{4} = \frac{Mgh}{2},$$

worin h, wie früher, die Höhe des disponibelen Gefälles über dem Eintrittspuncte des Wassers in die Schaufeln bezeichnet.

Bei diesen Rädern beträgt also das Maximum des theoretischen Nutzeffectes die Hälfte der gesammten Arbeit, welche die Schwere auf das verbrauchte Wasserquantum ausübt.

Verhältniß des practischen Nutzeffectes zu dem theoretischen.

§. 144. In der Praxis ist der Nutzeffect nothwendig kleiner, als der von der Theorie angegebene, und es ist sogar zweifelhaft, ob die gewöhnlichen Räder dieser Art, wie die guten verticalen Schaufelräder, $\frac{2}{3}$ des theoretischen Effectes liefern. Wenn indessen die Schaufeln eine viel größere Oberfläche haben, als der mittlere Querschnitt des Wasserstrahles bei seinem Eintritte, wenn sie in ein Gerinne eingeschlossen sind, welches ihnen wenig Spielraum läßt, oder noch besser, zwischen zwei cylindrischen Trommeln; so kann man nach den im Jahre 1820 von Tardy und Piobert mit einem Mühlenrade der Franziscaner zu Toulouse auf dem Kanale von Languedoc angestellten Versuchen annehmen, daß das Verhältniß des practischen Nutzeffectes zu dem theoretischen zwischen 0,70 und 0,75 variirt; man muß dabei aber bemerken, daß die Schaufeln dieses Rades etwas concav sind. Auch geht aus diesen Versuchen hervor, daß das Maximum des Effectes in der Praxis sehr nahe der Beziehung $v = \frac{V}{2 \sin. \beta}$ entspricht, wie sich aus der Theorie ergibt.

Hiernach würde die practische Formel für den allgemeinen Fall:

$$Pv = 0{,}7\, M\, (V \sin. \alpha - v \sin. \beta)\, v \sin. \beta,$$

woraus

$$P = 0{,}7\, M\, (V \sin. \alpha - v \sin. \beta) \sin. \beta$$

folgt, und für den Fall des Maximums des Effectes:

$$Pv = 0{,}35\, Mgh, \quad \text{woraus } P = 0{,}35\, \frac{Mgh}{v} \text{ folgt.}$$

Ein Umstand, welcher bei der Bestimmung des Nutzeffectes der vorliegenden Räder nicht unbeachtet bleiben darf, ist die Art und Weise, in der das Wasser aus derselben entweicht. Es ereignet sich nämlich oft, daß der Zwischenraum zwischen den Schaufeln nach dem unteren Theile des Rades zu nicht groß genug ist, damit das Wasser frei austreten kann. Alsdann häuft es sich in dem Rade und in dem Cylinder, in welchem sich das letztere bewegt, an, erhebt sich in demselben unter der Wirkung der Schwere und der Centrifugalkraft in Form eines Paraboloides, bis der daraus hervorgehende Druck gegen die untere Oeffnung der Schaufeln stark genug wird, um das zufließende Wasser aus dem Rade zu treiben. Wir können hier nicht in die specielle Untersuchung der hierdurch im Rade erzeugten Vorgänge eingehen, und beschränken uns bloß auf die Angabe des Mittels, um diesen Uebelstand bei der Construction des Rades zu vermeiden. Vernachlässigt man zu diesem Zwecke die Höhe des Rades in verticaler Richtung, welche man immer so viel als möglich einschränken muß; so hat man in dem Fall des Maximums des Effectes, wo $\cos. \alpha$ nahezu gleich Null ist, für die relative Geschwindigkeit, mit welcher sich das Wasser längs der Schaufel fortbewegt:

$$v \cos. \beta.$$

Multiplicirt man diese Größe mit der Fläche der freien Oeffnung, aus welcher das Wasser im tiefsten Puncte des Rades entströmen muß, so kann man diese oder den Winkel β dergestalt bestimmen, daß das Product wenigstens gleich der Wassermenge ist, welche in einer Secunde in das Rad tritt.

Räder mit concaven Schaufeln (Fig. 55).

§. 145. Wenn der Querschnitt der Schaufeln nicht gerade ist, sondern eine concave Linie bildet, wie dies bei den Mühlen der Franziscaner zu Toulouse und bei der Mühle mit drei Gängen zu Metz der Fall ist, und das Wasser frei entweichen kann; so muß der Nutzeffect, bei sonst gleichen Umständen, etwas größer sein, als für die geraden Schaufeln. Da man aber bei diesen Rädern weder den Stoß beim Eintritte, noch den Verlust an lebendiger Kraft beim Austritte vermieden hat; so kann man nur einen sehr geringen Unterschied erwarten. Den eben erwähnten Rädern wird das Wasser durch ein fast horizontales Gerinne zugeführt, das Wasser kann nicht frei austreten, sondern häuft sich in dem Rade an, und nach den Beobachtungen von Poncelet ergaben die Räder der Mühlen mit drei und vier Gängen zu Metz nur $\frac{1}{15}$ der absoluten Arbeit, welche dem gesammten Gefälle der verbrauchten Wassermenge entsprach.

Cylindrische horizontale Räder mit gekrümmten Schaufeln.

§. 146. Man construirt die horizontalen Räder zuweilen so, daß das Wasser beim Eintritte zuerst durch den Stoß und alsdann beim Herabgleiten in den Schaufeln durch sein Gewicht wirkt (Fig. 56). In diesem Falle kann die Höhe des Rades nicht mehr vernachlässigt werden, und wenn man dieselbe mit z bezeichnet; so sieht man leicht ein, daß mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen der Verlust an lebendiger Kraft beim Eintritte auch hier noch durch:

$$M\,(V\,sin.\,\alpha - v\,sin.\,\beta)^2$$

ausgedrückt wird.

Die relative Geschwindigkeit des Wassers im tiefsten Puncte des Rades ist:

$$\sqrt{(V\,cos.\,\alpha + v\,cos.\,\beta)^2 + 2gz} = u$$

und seine absolute Austrittsgeschwindigkeit, wenn man den Winkel, den das letzte Element der Schaufel mit dem Horizonte bildet, durch φ bezeichnet, ist:

$$w = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\,cos.\,\varphi},$$

so daß die allgemeine Gleichung für die Bewegung dieses Rades folgende ist:

$$Pv = Mg\,(h + z) - \frac{M\,(V\,sin.\,\alpha - v\,sin.\,\beta)^2}{2}$$
$$- \frac{M\,(u^2 + v^2 - 2uv\,cos.\,\varphi)}{2}.$$

Um den Verlust an lebendiger Kraft beim Eintritte des Wassers in das Rad zu vermeiden, braucht man nach §. 100 nur

$$V\,sin.\,\alpha = v\,sin.\,\beta$$

zu haben.

Was die Geschwindigkeit w betrifft, mit welcher das Wasser das Rad verläßt, so kann dieselbe im Allgemeinen nur dann gleich Null sein, wenn man hat:

$$cos.\,\varphi = 1 \text{ und } u = v.$$

Die erste dieser beiden Bedingungen verlangt, daß das letzte Element der Schaufel eine horizontale Richtung haben müsse, und die zweite kommt auf folgende:

$$(V\,cos.\,\alpha + v\,cos.\,\beta)^2 + 2gz = v^2$$

zurück. Entwickelt man diesen Ausdruck, substituirt für $cos.\,^2\alpha$ und $cos.\,^2\beta$ die Werthe $1 - sin.\,^2\alpha$ und $1 - sin.\,^2\beta$ und subtrahirt alsdann auf beiden Seiten $2\,Vv\,sin.\,\alpha\,sin.\,\beta$; so wird derselbe nach gehöriger Reduction (da $V\,sin.\,\alpha = v\,sin.\,\beta$ sein muß):

$$Vv\,cos.\,(\alpha + \beta) + g\,(h + z) = 0.$$

Hieraus folgt, wenn man bemerkt, daß $\alpha + \beta = 180° - \Theta$ ist, worin Θ den Winkel zwischen den Richtungen der beiden Geschwindigkeiten V und v, im entgegengesetzten Sinne genommen, bezeichnet:

$$v = \frac{g\,(h + z)}{V\,cos.\,\Theta}.$$

Wenn diese Bedingungen sämmtlich erfüllt werden, so erhält man für das absolute Maximum des theoretischen Effectes:

$$Pv = Mg\,(h + z),$$

d. h. die in Rede stehenden Räder können ebenso, wie die Zellenräder und die unterschlächtigen Räder mit gekrümmten Schaufeln theoretisch die ganze Quantität der Arbeit, welche von der Schwere auf die verbrauchte Wassermenge hervorgebracht wird, fortpflanzen; wobei es sich von selbst versteht, daß man für h immer nur diejenige Fallhöhe zu nehmen hat, welche der Geschwindigkeit des Wassers zukommt, die dasselbe bei seiner Ankunft im Rade wirklich besitzt, nachdem es die Effecte der Contraction und die verschiedenen Verluste, welche aus der Einrichtung des Wasserbehälters hervorgehen, überwunden hat.

In der Praxis ist es nicht möglich, $\varphi = 0$ zu machen, und man ist genöthigt, diesem Winkel, wie bei den unterschlächtigen Rädern mit gekrümmten Schaufeln, wenigstens eine Größe von 30° zu geben, wodurch jedoch nur ein geringer Verlust an lebendiger Kraft beim Austritte des Wassers entsteht.

Man besitzt über diese Räder sehr wenig Erfahrungen, welche sich zur Bestimmung des Verhältnisses des practischen Nutzeffectes zu dem theoretischen eignen. Borda, welcher eine Theorie dieser Räder gegeben hat, nimmt an, daß dasselbe gleich 0,75 sei, und wir behalten diese Zahl bis auf weitere specielle Ermittelungen bei, so daß man für die practische Formel in dem allgemeinen Falle:

$$Pv = 0{,}75 \left[Mg\,(h + z) - \frac{M\,(V \sin.\,\alpha - v \sin.\,\beta)^2}{2} - \frac{M\,(u^2 + v^2 - 2uv \cos.\,\varphi)}{2} \right]$$

und in dem Falle des Maximums des Effectes:

$$Pv = 0{,}75\,Mg\,(h + z) = 0{,}75 \times 1000\,Q\,(h + z),$$

worin Q, wie früher, die in einer Secunde verbrauchte Wassermenge in Cubikmetern bezeichnet, setzen kann.

Man bemerkt, daß es bei der Einrichtung der in Rede stehenden Räder zweckmäßig ist: 1) z so groß als möglich zu machen oder h zu vermindern, damit die Eintrittsgeschwindigkeit V nicht zu groß wird, indem hierdurch die Geschwindigkeit v des Rades vermehrt wird; 2) den Abstand der concentrischen Trommeln, welche die Schaufeln umschließen, so gering als möglich anzunehmen, damit die Geschwindigkeit v der Mitte dieser Schaufeln nicht zu sehr von der der inneren und äußeren Umfänge abweicht, und endlich 3) zur Erreichung desselben Zweckes das Rad so groß zu machen, wie es die Localität nur gestattet.

Turbine mit verticaler Axe von Burdin.

§. 147. Burdin, Ingenieur der Berg- und Hüttenwerke, hat Räder vorgeschlagen und construirt, welche von ihm den Namen **Turbinen** erhalten haben, und in welchen er den Bedingungen des Maximums des Effectes auf folgende Weise zu genügen gesucht hat. Der Wasserbehälter (Fig. 57) liegt über dem Rade und hat in seinem Boden Oeffnungen, welche durch Ansatzröhren, deren unteres Ende horizontal und nach der Richtung des Radumfanges gekehrt ist, verlängert sind; die Druckhöhe des Wassers über dem Mittelpuncte dieser Oeffnungen ist gleich der Hälfte des ganzen Gefälles und die Geschwindigkeit des Rades im Eintrittspuncte des Wassers ist gleich der, welche dieser Druckhöhe zukommt; das Wasser erreicht also das Rad beinahe ohne relative Geschwindigkeit. Alsdann entweicht dasselbe durch Kanäle, welche sich zwischen zwei mit der Axe concentrischen Mänteln befinden, und gelangt so bis zum tiefsten Puncte des Rades, nachdem es eine Höhe, gleich der anderen Hälfte des gesammten Gefälles, durchlaufen hat. Die Enden dieser Kanäle haben eine horizontale und an dem Umfange des Rades nach einem entgegengesetzten Sinne von dem der Bewegung tangentiale Richtung. Da nun das Wasser in dieser Richtung beim Herabsinken eine Geschwindigkeit erlangt, welche der Hälfte des Gefälles entspricht, also der des Rades ganz gleich ist; so folgt, daß dasselbe ohne absolute Geschwindigkeit austritt.

In einer Note der **annales des mines, 2e série, page 517,** gibt Burdin an, daß der Nutzeffect dieser Räder 0,75 von der Quantität der Arbeit beträgt, welche von der bewegenden Kraft hervorgebracht wird.

Horizontale Räder mit conischen Axen.

§. **148.** Die vorhergehenden Untersuchungen beziehen sich nur auf cylindrische Räder, bei welchen der Ein- und Austrittspunct des Wassers in demselben Abstande von der Axe liegen, so daß die Geschwindigkeit des letzteren durch die Wirkung der Centrifugalkraft nicht geändert werden kann; tritt aber das Wasser in einem Puncte ein, welcher von der Axe weiter entfernt oder derselben näher liegt, als der Austrittspunct; so verbindet sich jene Kraft mit der der Schwere, um die lebendige Kraft, welche der anfänglichen relativen Eintrittsgeschwindigkeit $V \cos. \alpha + v \cos. \beta$ entspricht, zu ändern. Bezeichnet man mit

ω die constante Winkelgeschwindigkeit des Rades, mit

R' den Abstand des Eintrittspunctes des Wassers von der Axe, und mit

R den Abstand des Austrittspunctes von der Axe;

so ist die relative Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers:

$$V \cos. \alpha + \omega R' \cos. \beta$$

und die lebendige Kraft, welche das Wasser bei seinem Eintritte besitzt, ist:

$$M(V \cos. \alpha + \omega R' \cos. \beta)^2.$$

Bezeichnet man nun die relative Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser längs des letzten Elementes der Schaufeln fließt, durch u, so ist seine lebendige Kraft beim Austritte:

$$Mu^2$$

und nach dem Principe der lebendigen Kräfte muß der Zuwachs:

$$M\left[u^2 - (V \cos. \alpha + \omega R' \cos. \beta)^2\right]$$

der doppelten Quantität Arbeit gleich sein, welche die Schwere während seines Herabsinkens von der Höhe z hervorbringt, d. h. gleich:

$$2\,Mgz,$$

das Doppelte derjenigen Quantität Arbeit, welche die Centrifugalkraft hervorbringt, vermehrt oder vermindert, je nachdem dieselbe in der Richtung der Bewegung des Wassers, oder in entgegengesetzter Richtung wirkt. Die ganze von der Centrifugalkraft auf die Masse M bei ihrem Uebergange aus der Entfernung R' zu der Entfernung R von der Axe hervorgebrachte Quantität Arbeit ist aber (§. 117):

$$\frac{M\omega^2 (R^2 - R'^2)}{2},$$

und mithin wird die Gleichung der lebendigen Kräfte in Beziehung auf diese Bewegung:

$$M[u^2 - (V \cos. \alpha + wR' \cos. \beta)^2] = 2 Mgz + M\omega^2 (R^2 - R'^2),$$

woraus sich ergibt:

$$u^2 = (V \cos. \alpha + \omega R' \cos. \beta)^2 + 2gz + \omega^2 (R^2 - R'^2).$$

Bezeichnet man die Neigungswinkel der Richtung dieser relativen Geschwindigkeit u gegen die der Geschwindigkeit ωR des Rades im Austrittspuncte wieder mit φ; so erhält man für die absolute Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser das Rad verläßt:

$$w = \sqrt{u^2 + \omega^2 R^2 - 2u\omega R \cos. \varphi},$$

und demnach für die Gleichung der Bewegung des Rades, wenn man durch v die Geschwindigkeit irgend eines Punctes und durch P den tangentiell in diesem Puncte ausgeübten Druck darstellt:

$$Pv = Mg (h + z) - \frac{M (V \sin. \alpha - \omega R' \sin. \beta)^2}{2}$$

$$- \frac{M (u^2 + \omega R^2 - 2 u\omega R \cos. \varphi)}{2}.$$

Die Bedingungen für das Maximum des Effectes sind auch hier:

$$V \sin. \alpha = \omega R' \sin. \beta, \quad \cos. \varphi = 1 \text{ und } u = \omega R.$$

Die letztere gibt:

$$(V \cos. \alpha + \omega R' \cos. \beta)^2 + 2gz - \omega^2 R'^2 = 0,$$

woraus man, wie in §. 146, ableitet:

$$\omega R' = - \frac{g (h + z)}{V \cos. (\alpha + \beta)} = \frac{g (h + z)}{V \cos. \theta},$$

indem man mit θ den Nebenwinkel von $\alpha + \beta$ oder den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung der Geschwindigkeit des Rades, in entgegengesetztem Sinne genommen, mit der Richtung der Geschwindigkeit des einströmenden Wassers bildet.

Die Einrichtung dieser Räder ist also denselben Bedingungen unterworfen, wie die der cylindrischen Räder, und man sieht, daß dieselben nach der Theorie ebenfalls fähig sind, das absolute Maximum des Nutzeffectes zu liefern. In der Praxis kann man, so lange keine speciellere Versuche angestellt sein werden, annehmen, daß dieselben 0,75 bis 0,8 des theoretischen Effectes wirklich übertragen.

§. 149. Die im Vorstehenden gegebene Theorie ist von Navier *) entlehnt und entspricht besonders den conischen oder birnförmigen

*) Architecture hydraulique de Bélidor, 2e Edition, page 455.

Rädern, sowie den sogenannten Reactionsrädern, wie den von Segner und Manoury-Dectot. Bei dem letzteren (Fig. 58) tritt das Wasser durch den unteren Theil der verticalen Axe in das Rad, circulirt in horizontalen Kanälen und entweicht an ihrem Ende nach entgegengesetzter Richtung von der der Bewegung durch Oeffnungen, welche gegen den Durchmesser der Eintrittsröhren sehr klein sind. Aus dieser Einrichtung folgt, daß der Winkel zwischen den Richtungen der Geschwindigkeiten V und $\omega R'$ sehr nahe ein rechter und daß die Geschwindigkeit V sehr gering ist. Die Geschwindigkeit $\omega R'$, welche dem Maximum des Effectes entspricht, ist daher unendlich, und man sieht, daß diese Räder in der Praxis wenigstens eine sehr rasche Bewegung haben müssen. Bei der Construction muß man dahin sehen, daß die Kanäle, in denen das Wasser circulirt, weder plötzliche Verengungen, noch starke Biegungen enthalten, durch welche noch andere Verluste an lebendiger Kraft, als die früher betrachteten, hervorgerufen werden. Da das Wasser ohne Stoß in das Rad tritt und beim Austritte eine relative Geschwindigkeit gleich:

$$\sqrt{2gH + \omega^2 R^2}$$

hat, worin H die Höhe des disponibelen Gefälles über dem Mittelpuncte der Austrittsöffnung bezeichnet; so hat man für die Gleichung dieser Räder offenbar:

$$Pv = MgH - \frac{M\left[\sqrt{2gH + \omega^2 R^2} - \omega R\right]^2}{2},$$

oder wenn man reducirt:

$$Pv = M\omega R\left[\sqrt{2gH + \omega^2 R^2} - \omega R\right].$$

Durch Differentiation des zweiten Theils dieser Gleichung gelangt man für das Maximum des Effectes zu der Relation:

$$\omega R = \sqrt{2gH + \omega^2 R^2},$$

welche nur für $\omega R = \infty$ erfüllt werden kann.

Navier nimmt an, daß diese Räder 0,8 des theoretischen Effectes nutzbar machen können, und wir behalten dieses Verhältniß so lange bei, bis zuverlässige Beobachtungen dasselbe berichtigt haben werden.

Neues horizontales Rad mit gekrümmten Schaufeln, welches im Jahre 1826 von Poncelet angegeben ist.

§. 150. Im Jahre 1826 hat Poncelet ein horizontales Rad in Vorschlag gebracht, welches seinem verticalen Rade mit gekrümmten Schaufeln ähnlich ist und dessen Gleichung sich nach dem Vorhergehenden mit Berücksichtigung der Wirkung der Centrifugalkraft leicht ergibt. In diesem Rade tritt das Wasser am äußeren Umfange in tangentieller Richtung an der Krümmung der Schaufeln, welche zwischen zwei horizontalen Böden enthalten sind, ein, circulirt alsdann auf den Schaufeln in Folge der erlangten Geschwindigkeit und unter der Wirkung der Centrifugalkraft, und tritt endlich mit einer absoluten Geschwindigkeit, welche man gleich Null oder doch sehr klein machen kann, am inneren Umfange aus (Fig. 59).

Unter Beibehaltung der früheren Beziehungen sieht man leicht ein, daß der Verlust an lebendiger Kraft beim Eintritte Null ist, und daß die relative Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser auf der Schaufel anfängt zu fließen, den Werth $V - \omega R'$ hat, so daß sich die relative Austrittsgeschwindigkeit u durch die Gleichung:

$$M(V - \omega R')^2 - Mu^2 = M\omega^2 (R'^2 - R^2),$$

woraus folgt:

$$u^2 = V^2 - 2V\omega R' + \omega^2 R^2,$$

bestimmen läßt.

Die Gleichung für die Bewegung des Rades ist demnach, wenn man von der Wirkung der Schwere auf das Wasser während seines Durchganges durch das Rad abstrahirt, da letzteres nur eine geringe Höhe hat:

$$Pv = MgH - \frac{M(u^2 + \omega^2 R^2 - 2u\omega R \cos.\varphi)}{2},$$

worin H die Höhe des disponibelen Gefälles bis zu dem mittleren Faden des Wasserstrahles bei seinem Eintritte in das Rad bezeichnet. Der zweite Theil dieser Gleichung wird auch hier ein Maximum, wenn man hat:

$$\cos.\varphi = 1 \text{ und } u = \omega R.$$

Hieraus ergibt sich zur Bestimmung von $\omega R'$ die Beziehung:

$$V = 2\omega R' \text{ oder } \omega R' = \frac{V}{2},$$

welche mit der für die verticalen Räder mit gekrümmten Schaufeln übereinstimmt. Für den Fall des Maximums hat man also:

$$Pv = MgH,$$

d. h. man kann, theoretisch genommen, mit diesen Rädern das absolute Maximum des Nutzeffectes erreichen.

In der Praxis kann man die Schaufeln nicht an den beiden Umfängen des Rades tangentiell machen, wie es zur Erlangung des absoluten Maximums nothwendig wäre, weil das Wasser alsdann nicht mit der gehörigen Leichtigkeit ein- und austreten würde; man muß denselben vielmehr gegen diese Umfänge eine Neigung von 30° beim Eintritte und von 40° beim Austritte lassen, und da es außerdem bequem ist, denselben eine kreisförmige Gestalt zu geben; so kommt die Verzeichnung ihres Durchschnittes auf folgende Aufgabe zurück: Zwischen zwei concentrische Kreise einen Kreisbogen zu legen, welcher in den Durchschnittspuncten mit einem jeden derselben einen bestimmten Winkel bildet.

Es sei A (Fig. 60) der gemeinschaftliche Mittelpunct der beiden Kreise, $AB = R$, $AD = r$, $BC = \varrho$ der gesuchte Halbmesser der Krümmung der Schaufel, $ABH = B$ der gegebene Winkel, welchen die Schaufel mit dem äußeren Umfange, $EDF = D$ der gegebene Winkel, welchen diese Schaufel mit dem inneren Umfange bildet; so geben die Dreiecke ABC und ADC:

$$\overline{AC}^2 = R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos.B = r^2 + \varrho^2 + 2r\varrho\cos.D,$$

da $ADC = 180^\circ - D$ ist. Hieraus folgt:

$$R^2 - r^2 = 2\varrho\,(R\ cos.\ B + r\ cos.\ D) \text{ und } 2\varrho = \frac{R^2 - r^2}{R\ cos.\ B + r\ cos.\ D}.$$

Um diesen Ausdruck zu construiren, ziehe man BG tangent an den inneren Umkreis, so ist $BG^2 = R^2 - r^2$; hierauf projicire man den Mittelpunct A auf die gegebene Linie BH, so daß $BH = R\ cos.\ B$ ist, lege dann durch den Punct H die Linie HJ, welche mit BH den Winkel $KHJ = D$ bildet, mache $HJ = r$, projicire J nach K, so daß $HK = r\ cos.\ D$ und mithin:

$$BK = R\ cos.\ B + r\ cos.\ D$$

ist. Beschreibt man nun aus dem Puncte B mit dem Halbmesser BK den Kreisbogen KL und zieht durch den Durchschnittspunct L dieses Bogens mit dem inneren Umfange des Rades die Secante BL; so hat man offenbar:

$$BM : BG = BG : BL, \text{ also}$$

$$BM = \frac{BG^2}{BL} = \frac{R^2 - r^2}{R\ cos.\ B + r\ cos.\ D} = 2\varrho.$$

Nachdem hieraus der Halbmesser ϱ bestimmt ist, verzeichnet man die Schaufel aus dem Mittelpuncte C, welcher auf der Linie BH im Abstande $BC = \varrho$ von B liegt.

Dieses Verfahren kann angewandt werden, welches auch der innere Halbmesser des Rades sein mag, und man sieht leicht ein, daß, da bei einer Verkleinerung von R die Größen u und ωR abnehmen, auch das subtractive Glied:

$$M\,\frac{u^2 + \omega R^2 - 2u\omega R\ cos.\ \varphi}{2}$$

sich mit dem Halbmesser R vermindert, und daß es daher zweckmäßig sein wird, diesen Halbmesser so klein als möglich anzunehmen. Hierbei muß man jedoch darauf achten, daß die relative Geschwindigkeit u, welche das Wasser beim Austritte aus dem inneren Umfange des Rades noch behält, groß genug sei, um demselben einen freien Durchgang zu gestatten, und zu diesem Ende muß das Product jener Geschwindigkeit u in die Fläche der Oeffnung oder des freien Zwischenraumes zwischen den Schaufeln am inneren Umfange wenigstens gleich dem Volumen der größten Wassermenge sein, welche man dem Rade zuführen kann, ohne daß eine Anschwellung der Flüssigkeit im Rade erfolgt.

Kennt man die Anzahl der Umgänge, welche die verticale Welle in einer gegebenen Zeit machen soll, so hat man den Werth der Winkelgeschwindigkeit ω, und da V durch das disponibele Gefälle gegeben ist; so leitet man aus der Beziehung:

$$\omega R' = \frac{V}{2},$$

welche dem Maximum des Effectes entspricht, den Werth des äußeren Halbmessers

$$R' = \frac{V}{2\omega}$$

ab; zur Bestimmung des inneren Halbmessers hat man aber die vorhin bemerkte Grenze zu berücksichtigen.

An der Seite, wo das Wasser in das Rad geleitet werden soll, muß man letzteres mit einem kreisförmigen Gerinne umgeben, um dadurch zu verhindern, daß das Wasser seitwärts entweicht, ohne in das Rad zu dringen; auch kann man den Ausguß des Wassers in das Freigerinne durch ähnliche Vorrichtungen, wie bei den verticalen Rädern mit krummen Schaufeln erleichtern.

Mit den in Rede stehenden Rädern sind noch keine Versuche angestellt worden; es ist jedoch wahrscheinlich, daß sie in der Praxis ebenso gut, wie die verticalen Räder ähnlicher Art, ungefähr 0,65 bis 0,75 des theoretischen Effectes, je nach der Größe des Gefälles und der Wassermenge, liefern werden.

Die bis jetzt mitgetheilten Beispiele zeigen, wie man die allgemeine Theorie der hydraulischen Receptoren auch auf andere Systeme, als die hier betrachteten, anwenden kann.

Schaufelräder, welche durch einen unbegrenzten Strom bewegt werden (Schiffmühlenräder).

Kurze Beschreibung derselben.

§. 151. Diese Räder unterscheiden sich von den gewöhnlichen Schaufelrädern (§. 108), welche sich in einem Gerinne bewegen, nur dadurch, daß sie in einen Wasserstrom gehängt sind, dessen Querschnitt bedeutend größer ist, als die Oberfläche der Schaufeln. Man wählt zu ihrer Anlage gewöhnlich den Ort des Stromes, wo die Geschwindigkeit am stärksten ist und hängt sie an den Borden eines großen Fahrzeuges oder zwischen zwei Fahrzeugen so auf, daß ihre Schaufeln in das Wasser tauchen. Zuweilen werden sie auch auf festen Gerüsten erbauet und man verengt alsdann den Strom vor den Rädern durch eine Art von Gerinne, welches den Schaufeln einen sehr großen Spielraum läßt.

Da in allen Fällen die auf das Rad wirkende Wassermenge als unbegrenzt angesehen werden kann, so ist die Kraft der Maschine nur durch verschiedene ihr eigenthümliche Bedingungen eingeschränkt; nimmt man aber die Schaufeln als bereits construirt an, so wird die von dem Rade fortgepflanzte Quantität der Arbeit eines Maximums fähig.

Formeln für die auf die Schaufeln übertragene Quantität Arbeit.

§. 152. Es sei:

Ω die Fläche des Theiles der Schaufeln, welcher in das Wasser getaucht ist, wenn dieselben vertical stehen,

v die Geschwindigkeit des Mittelpunctes dieser Fläche,

V die Geschwindigkeit des Stromes,

P der Druck gegen die Schaufeln in der Richtung des Umkreises, welcher von dem Mittelpuncte der eingetauchten Fläche beschrieben wird,

$h = \frac{(V-v)^2}{2g}$ die Druckhöhe, welche der relativen Geschwindigkeit des Stromes in Beziehung zu der der Schaufel entspricht.

k ein durch Beobachtungen zu bestimmender Zahlencoefficient.

Nach der jetzt gewöhnlich recipirten Theorie *) nimmt man an, daß die Wirkung des Wassers gegen die Schaufeln der gleich ist, welche stattfinden würde, wenn man statt aller gleichzeitig angegriffenen Schaufeln fortwährend eine einzige verticale Schaufel dem Strome aussetzte, und wenn diese sich stets mit der Geschwindigkeit v vor der Flüssigkeit her bewegte. Ferner nimmt man an, daß die Wassermenge, welche die Schaufel erreicht, der relativen Geschwindigkeit $V - v$ proportional und gleich

$$\Omega\ (V - v)$$

sei.

Diese verschiedenen Hypothesen, deren Bestätigung noch auf eine unzweideutigere Weise, als es durch die wenigen bis jetzt bekannten Versuche geschehen ist, von der Zukunft erwartet werden muß, führen zu der Relation:

$$P = k\, 1000\ \Omega \frac{(V-v)^2}{2g} = k\, 1000\ \Omega h.$$

Hieraus folgt für die Quantität der Wirkung, welche den Schaufeln in der Secunde mitgetheilt wird:

$$Pv = k\, 1000\ \Omega \frac{(V-v)^2}{2g} v = k \cdot 1000\ \Omega h v^{\,k \cdot m}.$$

Betrachtet man den Coefficienten k als von der Geschwindigkeit v unabhängig und constant, so findet man durch Differentiation des zweiten Theiles der letzten Gleichung in Beziehung auf v für die Bedingung des Maximums des Effectes:

$$v = \tfrac{1}{3} V, \text{ mithin } P = \tfrac{4}{9} k \cdot 1000\ \Omega \frac{V^2}{2g}$$

und:

$$Pv = \tfrac{1}{3} PV = \tfrac{4}{27} k \cdot 1000\ \Omega \frac{V^3}{2g}.$$

Erfahrungsresultate.

§. 153. Die Versuche von Bossut **) und einer von Christian ***) beweisen, daß der Werth des Verhältnisses $\frac{v}{V}$, welcher dem Maximum des Effectes entspricht, $= 0{,}4$ statt $= 0{,}3$ ist, wie sich aus den obigen Formeln ergibt. Dasselbe Resultat liefern die Beobachtungen der Schiffmühlen der Rhone, wo die Praxis gelehrt hat, das Verhältniß $\frac{v}{V} = 0{,}4$ anzunehmen.

Hinsichtlich des Werthes für den Coefficienten k ist zu bemerken, daß derselbe für die Schaufeln, welche nur zum Theil eingetaucht sind, größer sein muß, als für die Schaufeln, welche sich ganz im Wasser

*) Architecture hydraulique de Bélidor, nouvelle édition, note *dl* de *Navier*, page 407.

**) Hydrodynamique, page 382.

***) Mécanique industrielle.

bewegen, weil sich vor jenen ein Stau bildet, der die Höhe der Flüssigkeit vor der stromaufwärts gekehrten Fläche vermehrt, während sich die Flüssigkeit vor der stromabwärts gekehrten Fläche senkt.

Nach Bossut und einem Versuche von Boistard *) kann k für die gewöhnlichen Räder, welche nur mit dem vierten Theile des Halbmessers im Wasser hängen, als zwischen 2 und 3 liegend angesehen werden. Verschiedene Beobachtungen, welche Poncelet im Jahre 1825 an Schiffmühlen auf der Rhone bei Lyon angestellt hat, bestätigten diese Resultate. Die Schaufeln hatten $2^m,5$ bis $2^m,65$ Länge und tauchten $0^m,65$ bis 0,75 tief in's Wasser, wodurch sich eine benetzte Fläche Ω zwischen 1,165 und 2 Quadratmeter ergab; die Geschwindigkeit des Stromes variirte zwischen $1^m,3$ bis 2^m, und die des Mittelpunctes der Schaufeln war im Durchschnitte $0,4\ V$. Unter diesen Umständen sind die Werthe von k, welche man aus der Beobachtung der erzeugten Mehlquantitäten abgeleitet hat, respective:

$$k = 2{,}80, \quad k = 2{,}70, \quad k = 3{,}19$$

gewesen, so daß ihr mittlerer Werth $k = 2{,}89$ ist.

Hiernach kann man für k, wenn sich die Geschwindigkeit v des Mittelpunctes der Schaufeln nicht sehr von $0,4\ V$ entfernt, den vorstehenden mittleren Werth $k = 2{,}8$ bis $2{,}9$ annehmen.

Bemerkungen über die Unsicherheit der Werthe von k.

§. 154. Die Unbestimmtheit, welche in Beziehung auf den Werth von k stattfindet, kommt daher, daß die Voraussetzungen, auf welche sich der Ausdruck:

$$P = k \cdot 1000\ \Omega\ \frac{(V - v)^2}{2g}$$

in §. 152 gründet, in der Wirklichkeit nicht ganz zulässig zu sein scheinen. Man sieht, daß dieselben nicht mit den Betrachtungen in §. 98 übereinstimmen, welche für den Fall einer Aufeinanderfolge von Schaufeln, die einander immer an derselben Stelle ersetzen, indem sie vor der Flüssigkeit mit einer Geschwindigkeit v in der Richtung der Geschwindigkeit V selbst hereilen,

$$P = \frac{1000\ \Omega V}{g} \cdot (V - v)$$

ergeben würden. (Da hier $\alpha = \beta = 90^0$ und die Masse der in der Secunde gegen die Schaufeln getretenen Wassermenge $= \dfrac{1000\,\Omega V}{g}$ ist.)

Vergleichung der Erfahrungen von Bossut mit einer anderen Formel, welche aus den Betrachtungen des §. 10 abgeleitet ist.

§. 155. Vergleicht man nun die 17 Erfahrungen von Bossut, welche Seite 382 seiner Hydrodynamik mitgetheilt sind, unter einander und nimmt zu diesem Zwecke die von dem Rade gehobenen Gewichte

*) Expériences sur la main d'oeuvre etc., page 72.

für die Abscissen und die Geschwindigkeiten v für die Ordinaten einer Curve; so findet man nach Poncelet, daß die hierdurch sich ergebenden Puncte sehr nahe in gerader Linie liegen und daß die Resultate jener Erfahrungen für die 14 ersten bis auf $\frac{1}{80}$ und für die 3 letzteren bis auf $\frac{1}{21}$ genau durch die Formel:

$$P = 3{,}1708\,(V - v)$$

dargestellt werden können.

Bei diesen Versuchen hatte man $\Omega = 0^m{,}01458$, $V = 1^m{,}855$, die Schaufeln tauchten nur mit dem dritten Theile ihrer Höhe ein, und die Formel:

$$P = \frac{1000\,\Omega V}{g}(V - v)$$

wird hiernach:

$$P = 2{,}937\,(V - v),$$

welche zu der vorhergehenden, aus den Beobachtungen Bossut's direct abgeleiteten Formel in dem Verhältnisse $\frac{3{,}1708}{2{,}937} = 1{,}08$ steht.

Hierbei ist noch zu bemerken, daß Bossut die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche mit Hülfe einer kleinen Mühle gemessen und mithin wegen des Widerstandes der Luft gegen die Flügel eine zu geringe Geschwindigkeit erhalten hat. Führt man daher in der Formel:

$$P = \frac{1000\,\Omega V}{g}(V - v)$$

die wahre Geschwindigkeit an der Oberfläche ein, wie sie durch einen Schwimmer gemessen wird; so muß ein kleinerer Coefficient als 1,08 darauf angewandt werden.

Die Beobachtungen von Poncelet an den drei Rhone-Mühlen, von denen schon oben die Rede gewesen ist, beweisen ebenfalls, daß, wenn man für V die Geschwindigkeit an der Oberfläche nimmt, der Druck gegen den Mittelpunct der Schaufeln genau durch:

$$P = 0{,}8 \cdot \frac{1000\,\Omega V}{g}(V - v)$$

ausgedrückt wird.

Dieses Resultat stimmt auch mit einem Versuche von Christian, **Mécanique Industrielle, 1er vol., page 329**, überein, nach welchem wir im §. 24 für die Formel der Schaufelräder, welche sich in einem Gerinne mit sehr großem Spielraume bewegen, den Coefficienten 0,75 angenommen haben. Dieser Coefficient ist etwas kleiner, als der vorhin angegebene, da sich die Schaufeln viel näher an dem Grunde, als an der Oberfläche der Flüssigkeit, in welcher sie ganz eingetaucht waren, befanden.

Hiernach kann man also mit Zuverlässigkeit für den Ausdruck der Quantität Arbeit, welche in einer Secunde dem Mittelpuncte der Schaufeln der in Rede stehenden Räder mitgetheilt wird, die Formel:

$$Pv = 0{,}8 \cdot \frac{1000\,\Omega V}{g}(V - v)\,v^{k \cdot m}$$

setzen.

Man sieht, daß sich die Resultate der Erfahrung viel besser durch die Formel:

$$P = 0{,}8 \cdot \frac{1000\,\Omega V}{g}(V - v), \text{ als durch } P = k\,\frac{1000\,\Omega}{2g}\,(V - v)^2$$

darstellen lassen, obgleich die letztere viel allgemeiner angenommen wird. Da außerdem die erstere jene Resultate genau ausdrückt, so müßte man, wenn auch die letztere eben dieselben Werthe für P geben sollte,

$$k = 0{,}8 \cdot \frac{2\,V}{V - v}$$

haben, und man bemerkt, daß der Coefficient k von dem Werthe $k = 1{,}6$, welcher $v = 0$ entspricht, bis $k = \infty$, welcher $V = v$ entspricht, variiren müßte. Da sich übrigens in der Praxis die Geschwindigkeit v wenig von $\frac{1}{3}$ bis $\frac{2}{5}$ der Geschwindigkeit V entfernt, was $k = 2{,}4$ und $k = 2{,}6$ ergibt; so folgt, daß man auch die allgemeiner angenommene Formel anwenden könne, sobald man mit Navier $k = 2{,}5$ setzt und die Geschwindigkeit v sich wenig von $v = 0{,}4\,V$ entfernt.

Dimensionen und Verhältnisse für die Schiffmühlenräder.

§. 156. Die Erfahrung hat gelehrt, daß die Schaufeln der Schiffmühlenräder, um den besten Effect zu liefern, eine Höhe von $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{4}$ des Halbmessers des Rades haben müssen. Auf der Rhone variirt diese Höhe von $0^m{,}5$ bis $0^m{,}8$, und außerdem ist ihr oberer Rand $0^m{,}5$ tief unter den Wasserspiegel eingetaucht. Die letztere Einrichtung hat darin ihren Grund, daß der Strom sehr tief ist und daher die größte Geschwindigkeit einem ziemlich tief unter der Oberfläche liegenden Puncte entspricht. Die Länge der Schaufeln ist durch nichts weiter, als die Localität und die Kraft beschränkt, welche man der Maschine geben will.

Die Anwendung von vorspringenden Rändern, um den Umfang der Fläche, welche der Wirkung des Stromes direct ausgesetzt ist, nach Morosi, kann hier ebenso, wie bei den Schaufelrädern, welche sich mit sehr viel Spielraum in geraden Gerinnen bewegen, auf die Vermehrung des Nutzeffectes nur einen sehr vortheilhaften Einfluß haben.

Die Anzahl der Schaufeln beträgt gewöhnlich 12; Bossut schließt jedoch aus seinen Versuchen, daß man dieselben auf 18 oder 24 vermehren müsse. Navier räth, ihren gegenseitigen Abstand ihrer Höhe gleich zu machen und sie gegen dem Halbmesser des Rades zu neigen, so daß sie mit demselben einen Abstand von 30° bilden, wenn das Rad um $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$ seines Halbmessers im Wasser geht, und einen Winkel von 15°, wenn dasselbe um $\frac{1}{3}$ seines Halbmessers eintaucht. Diese letztere Tiefe ist die größte, um welche man das Rad in das Wasser senken darf.

Von den Windmühlen.

Unterscheidung der verschiedenen Arten von Windmühlen.

§. 157. Die Wirkung des Windes als bewegende Kraft wird, vermittelst verschiedenartig eingerichteter Räder mit großen Flügeln nutzbar gemacht. Die eine Art dieser Windmühlenräder hat eine verticale Umdrehungsaxe und bei der anderen Art liegt die Axe horizontal und nahezu in der Richtung des Windes. Die letzteren sind, mit wenigen Ausnahmen, die einzigen, von denen man in der Praxis ungeachtet ihrer mancherlei Mängel Gebrauch macht, da sie bei gleichen Dimensionen fähig sind, den achtfachen Effect der anderen hervorzubringen. Dieser Unterschied kommt daher, daß bei den Mühlen mit horizontalen Axen die ganze Oberfläche der Flügel der Wirkung des Windes zum Nutzen des Effectes der Maschine ausgesetzt ist, während bei den Mühlen mit verticalen Axen nur ein einziger Flügel diese Wirkung direct empfängt, oder wenn alle Flügel gleichzeitig von dem Winde ergriffen werden, so entstehen Widerstände, welche einen Theil des Nutzeffectes vernichten. Dieser Fall tritt besonders bei den Rädern ein, welche man Panemoren nennt, und deren Flügel aus conischen Flächen bestehen, welche bald ihre concaven, bald ihre convexen Seiten dem Winde darbieten, so daß sich das Rad nur in Folge des Ueberflusses der Wirkungen der einen über die der andern bewegt.

Bei den sogenannten polnischen Windmühlen sind an der verticalen Axe des Rades mehrere rechteckige Flügel befestigt, in deren Ebenen jene Axe liegt; dieselben drehen sich in einem cylindrischen Mantel, von welchem ein Theil hinweggelassen ist, um dem Winde in der günstigsten Richtung den Zutritt zu gestatten. Die sinnreichste Einrichtung der Räder mit verticalen Axen ist die, wo die verticalen rechteckigen Flügel von der Welle eine solche Bewegung empfangen, daß sie sich bei ihrer Drehung um die Axe auf die vortheilhafteste Weise nach dem Winde orientiren, welches System jedoch sehr complicirte Vorrichtungen erfordert. In dem Folgenden werden wir uns nur mit den Mühlen mit horizontalen Axen beschäftigen, deren Effect besonders von Smeaton und Coulomb untersucht ist.

Kurze Beschreibung der Windmühlen mit horizontalen Axen.

§. 158. Das gewöhnliche Windmühlenrad trägt vier Arme oder Ruthen mit nahezu ebenen Flügeln, die sich mehr oder weniger gegen die horizontale Axe des Rades neigen. Man gibt den Flügeln gewöhnlich die Gestalt eines Rechteckes, macht sie jedoch nicht ganz eben, sondern construirt sie in Form einer windschiefen Fläche, deren Elemente auf der Richtung der zugehörigen Ruthe perpendicular stehen. Diese Ruthen selbst sind etwas nach vorn gekrümmt, so daß die Oberfläche der Leinewand, womit die in der Richtung der Erzeugungslinie der windschiefen Fläche angebrachten Latten bekleidet sind, der Wirkung des Windes eine etwas concave Krümmung darbietet. Das Rad wird vermittelst eines großen Hebels, des sogenannten Sturzes, der die ganze Mühle um eine vertical stehende Spindel, den Ständer, drehet, nach dem Windstriche orientirt. Zuweilen ist die Mühle so eingerichtet, daß sie sich selbst durch die Wirkung des Windes orientirt. Hinsichtlich der detaillirten Beschreibung dieser Mühlen müssen wir auf die verschiedenen Werke über practische Mechanik von Hachette, Christian, Borgnis u. s. w. verweisen, da der gegenwärtige Vortrag, welcher hauptsächlich von Navier entlehnt ist, sich nur auf die Entwickelung der Bedingungen der Einrichtung der Windflügel und auf die Mittheilung der darüber angestellten Beobachtungen beziehen kann.

Theorie dieser Windmühlen.

§. 159. Man besitzt über den Widerstand der Flüssigkeiten noch zu wenig genaue Resultate, als daß es möglich wäre, eine vollständige Theorie der Wirkung des Windes auf die Flügel der Windmühlen aufzustellen. Wir wollen hier in der Kürze die, welche Navier gegeben hat, mittheilen, weil sich dieselbe auf sehr einfache Betrachtungen gründet, die mit den bekannten Erscheinungen wohl übereinstimmen.

Die allgemeinen Dimensionen der Flügel werden hier als gegeben angesehen; denn der Effect wächst offenbar, unter übrigens gleichen Umständen, mit der Oberfläche dieser Flügel. Hiernach sei:

V die Geschwindigkeit des Windes senkrecht gegen die Ebene der Bewegung des Rades oder parallel zu der Axe,

o die Fläche irgend eines rechteckigen Elementes ab (Fig. 61) des Flügels zwischen zwei Erzeugungslinien seiner Oberfläche, wobei dieses Element als eben betrachtet wird,

v die Geschwindigkeit des Mittelpunctes des Elementes ab,

φ der Winkel, welchen die Richtung des Windes mit der Ebene des Elementes ab bildet,

Π die Dichtigkeit der Luft oder das Gewicht der Volumeneinheit derselben,

p der Druck, welcher auf das Element ab in der Richtung mv der Geschwindigkeit seines Mittelpunctes ausgeübt wird, und

k ein constanter Zahlencoefficient, der auch Versuchen bekannt sein muß;

so ist die relative Geschwindigkeit des Windes gegen das Element ab in perpendicularer Richtung dasselbe nach §. 98 offenbar $= V \sin. \varphi - v \cos. \varphi$. Man nimmt auch hier an, und mit mehr Recht, als bei den Wasserrädern, welche durch einen unbegrenzten Strom bewegt werden (§. 152), daß der Druck in dieser Richtung dem Gewichte eines Luftprismas, welches die Fläche o zur Grundfläche und die der relativen Geschwindigkeit $V \sin. \varphi - v \cos. \varphi$ zukommende Fallhöhe zur Höhe hat, d. h. der Größe:

$$\Pi o \frac{(V \sin. \varphi - v \cos. \varphi)^2}{2g},$$

proportional ist, welche, um jenen Druck zu geben, mit dem Coefficienten k zu multipliciren ist. Die Componente hiervon in der Richtung der Umdrehungsgeschwindigkeit v des Elementes ab wird demnach:

$$p = k\Pi o \frac{(V \sin. \varphi - v \cos. \varphi)^2}{2g} v \cos. \varphi,$$

und dieselbe erzeugt in jeder Zeiteinheit die Arbeitsquantität oder den Nutzeffect:

$$pv = k\Pi o \frac{(V \sin. \varphi - v \cos. \varphi)^2}{2g} \cos. \varphi.$$

Bedingungen für das Maximum des Effectes.

§. 160. Betrachtet man zuvörderst nur ein ebenes Element des Windflügels und denkt sich die ganze Oberfläche desselben auf jenes Element reducirt, so kann man, da die Geschwindigkeit V des Windes immer gegeben ist, zur Erlangung des Maximums des Effectes nur v und φ variiren lassen. Differenzirt man daher den vorhergehenden Ausdruck zuerst nach v, so findet man für die Bedingung des relativen Maximums:

$$v = \frac{V}{2}\, tang.\, \varphi, \text{ woraus } pv = \tfrac{4}{27}\, k \cdot \Pi o\, \frac{V^3 \sin.^3 \varphi}{2g}$$

folgt. Läßt man nun in diesem letzteren Ausdrucke φ sich ändern, so findet man für das absolute Maximum:

$$\sin. \varphi = 1, \text{ also } v = \infty \text{ und } pv = \tfrac{4}{27}\, k\Pi o\, \frac{V^3}{2g}.$$

Die auf irgend ein Element übertragene Quantität Arbeit ist also um so größer, je kleiner der Neigungswinkel der Ebene dieses Elementes gegen die Ebene der Bewegung des Rades, oder je größer φ und je beträchtlicher die Geschwindigkeit des Mittelpunctes des Elementes ist.

Relation zwischen der Geschwindigkeit der verschiedenen Puncte des Windflügels und der Neigung seiner Elemente gegen die Richtung des Windes.

§. 161. Die vorhergehende Analyse ist von Navier auf die ganze Fläche des Flügels, unter der Voraussetzung, daß dieselbe eben sei, angewandt worden, und er bemerkt, daß die Resultate, welche sich daraus für das Maximum des Effectes ergeben, mit den weiter unten mitgetheilten Erfahrungsresultaten übereinstimmen. Die Zerlegung der Fläche des Windflügels in seine ebenen Elemente kann, wie Coriolis *) gezeigt hat, zur Erklärung dienen, warum die Erfahrung mit den obigen Resultaten nicht in vollkommenem Einklange steht und warum die Elemente mit der Ebene der Bewegung immer kleinere und kleinere Winkel bilden müssen, je weiter man sich von dem Mittelpuncte des Rades entfernt.

Denn da alle Elemente bei derselben Bewegung um die Axe mit fortgerissen werden, so ist es nicht erlaubt, v und φ als willkürlich und von einander unabhängig zu betrachten, wie wir es gethan haben, und statt der Größe pv, welche sich auf ein isolirtes Element bezieht, müßte man die Summe aller ähnlichen Quantitäten der Wirkung in Betracht ziehen, um dieselbe zu einem Maximum zu machen, eine Aufgabe, welche in das Gebiet der Variationsrechnung gehört. Bezeichnet man mit:

l die als constant vorausgesetzte Breite der Flügel, mit
r den Abstand des Elementes o von der Umdrehungsaxe, und mit
ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades;

so hat man:

$$o = ldr,\; v = \omega r,\; pv = \frac{k\Pi l}{2g}(V \sin. \varphi - \omega \cos. \varphi \cdot r)^2\, \omega \cos. \varphi \cdot rdr,$$

und für den gesammten Nutzeffect oder die dem ganzen Flügel mitgetheilte Arbeit:

*) Lehrbuch der Mechanik fester Körper und der Berechnung des Effectes der Maschinen.

$$\frac{kIIt}{2g}\,\omega\int(V\ sin.\ \varphi - \omega r\ cos.\ \varphi)^2\ cos.\ \varphi \cdot rdr.$$

Dieses Integral ist zwischen den beiden Werthen von r zu nehmen, welche den äußersten Enden des Flügels entsprechen, und alsdann ist sein Maximum in Beziehung zu φ für einen gegebenen Werth von ω zu ermitteln, indem man φ als eine zu bestimmende Function von r ansieht.

Nach den Principien der Variationsrechnung und wie Coriolis an dem angeführten Orte bemerkt, muß das Differential der Function unter dem Integralzeichen in Beziehung auf φ gleich Null sein. Dieses führt, wenn man den gemeinschaftlichen Factor $(V\ sin.\ \varphi - \omega\ cos.\ \varphi r)r$ absondert und vernachlässigt, da derselbe keinem Maximum entspricht, weil durch denselben das Integral Null wird, zu der Bedingungsgleichung:

$$2(V\ cos.\ \varphi + \omega r\ sin.\ \varphi)\ cos.\ \varphi - (V\ sin.\ \varphi - \omega\ cos.\ \varphi r)\ sin.\ \varphi = 0$$

oder:

$$V\,(2 - tang.^2\varphi) + 3\,\omega r\ tang.\ \varphi = 0,$$

und man erhält hieraus:

$$tang.\ \varphi = \tfrac{3}{2}\,\frac{\omega r}{V} + \sqrt{\tfrac{9}{4}\,\frac{\omega^2 r^2}{V^2} + 2},$$

da $tang.\ \varphi$ hier positiv sein muß.

Aus dieser Gleichung ersieht man, daß wenn V und ω gegeben sind, $tang.\ \varphi$ mit der Entfernung r des Elementes von der Axe zunehmen muß, was mit der Erfahrung übereinstimmt. Ferner sieht man, daß die Neigung des Elementes die möglich vortheilhafteste bleibt, sobald die Winkelgeschwindigkeir ω ein constantes Verhältniß zu der Geschwindigkeit V des Windes behält, d. h. wenn man die Belastung p der Maschine dergestalt variiren läßt, daß die Geschwindigkeit des Windes mit der Anzahl der Umdrehungen der Welle in einem constanten Verhältnisse bleibt, ein Umstand, der nach den Beobachtungen von Coulomb über die Windmühlen um Lille ebenfalls in der Praxis stattfindet.

Um die Auflösung des Problems zu vollenden, hat man die Werthe von $sin.\ \varphi$ und $cos.\ \varphi$, ausgedrückt durch r, in den obigen Ausdruck für den gesammten Nutzeffect zu substituiren, alsdann nach r zwischen den gehörigen Grenzen zu integriren und darauf nach ω zu differenziren, um den Werth von ω zu finden, welcher dem Maximum entspricht. Diese Operation führt jedoch, wie man an der erwähnten Stelle des Werkes von Coriolis sehen kann, zu sehr verwickelten Rechnungen, deren Resultate aber mit der Erfahrung ziemlich gut übereinstimmen, wenn man für den Coefficienten k den Werth $k = 3$ setzt, welcher sich aus eigenthümlichen theoretischen Betrachtungen jenes Ingenieurs ergibt.

Erfahrungsresultate.

§. 162. Im Nachstehenden sind die Resultate enthalten, welche aus den Beobachtungen von Coulomb und Smeaton über die Einrichtung der Windmühlen hervorgehen.

1) Figur der Flügel (Fig. 62). Wenn die Flügel rechteckig sind, so ist die vortheilhafteste Form die der sogenannten holländischen Windmühlenflügel, welche dem Winde eine leicht concave Oberfläche darbieten und deren geradlinige Elemente folgendermaßen eingerichtet sind. Man denke sich die Ruthe des Flügels in 40 gleiche Theile getheilt, nehme hiervon 10 vom Mittelpuncte bis zum Puncte 1, woselbst sich die erste Latte befindet, trage alsdann 6 Theile von 1 nach 2, von 2 nach 3, von 3 nach 4, von 4 nach 5 und von 5 nach 6. Ist dieses geschehen, so müssen die Neigungen der Latten gegen die Axe und gegen die Ebene der Bewegung nach der folgenden Tabelle eingerichtet werden:

Bezeichnung der Elemente.	Neigungswinkel gegen die Axe oder φ.	Neigungswinkel gegen die Ebene der Bewegung.
1	72°	18°
2	71°	19°
3	72°	18° Mitte des Flügels
4	74°	16°
5	77°,5	12°,5
6	83°	7°.

Die Breite des Flügels darf den vierten Theil seiner Länge nicht überschreiten; sie ist gewöhnlich $\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{6}$ derselben; die Erfahrung hat gelehrt, daß man die Neigungswinkel der Elemente eher vermindern als vermehren darf.

Nach Smeaton scheinen die Flügel, welche sich gegen ihr oberes Ende verbreiteren, den mit gleichen Dimensionen vorzuziehen zu sein. Die Figur, welche sich im Großen am besten bewährt hat, ist die eines Trapezes, welches man erhält, wenn man an das Ende der Ruthe eine Scheide setzt, deren Länge den dritten Theil der Ruthe ausmacht und welche in dem Durchschnittspuncte mit der letzteren nach dem Verhältnisse von 3 zu 2 getheilt ist. Hiernach hat man in der Figur 63 $AB = \frac{1}{3} CO$, $BC = \frac{3}{5} AB$, $AC = \frac{2}{5} AB$. Die Neigungen der transversalen Elemente bleiben die früheren.

Was die Neigung der Axe gegen den Horizont betrifft, so richtet sich dieselbe nach der Beschaffenheit der Winde, welche in der Gegend, wo die Mühle erbaut werden soll, herrschen. In flachen Gegenden, wie in Flandern und Belgien, bildet die Axe mit dem Horizonte einen Winkel von 8° bis 15°, welcher dem des Windstriches sehr nahe gleich ist.

2) Geschwindigkeit der Flügel im Verhältnisse zu der des Windes. Nimmt man an, daß die Flügel nach den obigen Vorschriften construirt sind, so muß man, um den besten Effect zu erhalten, ihre Umdrehungsgeschwindigkeit mit der des Windes in einem constanten Verhältnisse erhalten; und zwar muß jene Umdrehungsgeschwindigkeit, am äußersten Ende des Flügels gemessen, nach Smeaton gleich der 2,6 oder 2,7 fachen Geschwindigkeit des Windes sein. Diese Angabe stimmt mit den Erfahrungen von Coulomb über die belgischen Mühlen, aus welchen sich das Verhältniß 2,5 bis 2,6 ergibt, vollkommen überein.

3) Quantität der Arbeit, welche von den Flügeln übertragen wird. Sind die Flügel nach der holländischen Methode an-

geordnet, und steht ihre Geschwindigkeit mit der des Windes in dem angeführten Verhältnisse; so wächst die übertragene Quantität Arbeit, wie ihre Oberfläche und etwas langsamer, wie die dritte Potenz der Geschwindigkeit des Windes, so daß, wenn die letztere doppelt so groß wird, nur $\frac{1}{20}$ an der achtfachen Quantität Arbeit fehlt. Diesen unbedeutenden Unterschied kann man vernachlässigen und für die von einem jeden Flügel in der Secunde übertragene Quantität Arbeit nach den Beobachtungen von Smeaton und Coulomb durch die Formel:

$$Pv = 2{,}6\,PV = 0{,}13 \cdot OV^{3\ k.\ m}$$

ausdrücken, worin P den Druck am äußersten Ende der Flügel und in der Richtung der Umdrehungsbewegung, V die Geschwindigkeit des Windes in Metern und O die Oberfläche eines Flügels in Quadratmetern bezeichnet. Man hat bei den Versuchen auf die Veränderung der Dichtigkeit der Luft nach dem Wechsel der Temperatur keine Rücksicht genommen; indessen hat dieselbe auf die Resultate, welche für die Praxis immer eine hinreichende Genauigkeit haben werden, nur einen geringen Einfluß.

Die vorstehenden Angaben enthalten alles, was bei der Einrichtung der Windmühlen zu wissen nöthig ist, wenn man die mittlere Geschwindigkeit der herrschenden Winde kennt. Die Geschwindigkeit des Windes, welche für die Arbeit am vortheilhaftesten ist, scheint die von 6 bis 7 Metern zu sein.

Smeaton hat beobachtet, daß, wenn die Flügel nicht belastet sind und sich leer herum bewegen, die Geschwindigkeit, welche ihre äußersten Enden annehmen, mit der des Windes in einem constanten Verhältnisse steht, ebenso wie bei der Belastung, welche dem Maximum des Effectes entspricht. Hieraus leitet er ein ziemlich einfaches Mittel zur Messung der Geschwindigkeit des Windes ab. Dieses Verhältniß ist 4 für die holländischen und oben erweiterten Windmühlenflügel, d. h. um die Geschwindigkeit des Windes zu erhalten, muß man die Geschwindigkeit des äußersten Endes des Flügels mit 4 dividiren.

Von der Anwendung des Wasserdampfes als bewegende Kraft.

Beziehungen zwischen der Dichtigkeit, der Temperatur und der Spannkraft der Gase.

§. 163. Ehe die Regeln aufgestellt werden, mit Hülfe deren man die Quantität der Wirkung berechnen kann, welche der Dampf in den verschiedenen Maschinen hervorbringt, ist es nothwendig, einige physikalische Begriffe, welche sich auf seine Dichtigkeit, seine Temperatur und seine Spannkraft beziehen, in's Gedächtniß zurückzurufen.

Wenn man eine gegebene Gewichtsmenge irgend eines permanenten Gases in ein Gefäß einschließt, so lehrt das Mariotti'sche Gesetz, daß, wenn man das Volumen des Gases variiren läßt, ohne seine

Temperatur zu ändern, seine Spannkraft oder der Druck, welchen dasselbe gegen die Flächeneinheit ausübt, im umgekehrten Verhältnisse des Volumens oder, was dasselbe ist, im geraden Verhältnisse seiner Dichtigkeit steht. Dieses Gesetz ist in der letzten Zeit von Dulong und Arago bei Gelegenheit ihrer schönen Versuche über die Spannkraft des Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen bestätigt und bis zu dem Drucke von 24 Atmosphären ausgedehnt worden.

Andererseits lehrt ein nicht minder wichtiges, von Gay-Lussac entdecktes Gesetz, daß, wenn man die Temperatur eines Gases sich ändern läßt, indem man seine Spannung bei demselben Grade erhält, dasselbe sich so ausdehnt, daß die Zunahme des Volumens der Zunahme der Temperatur proportional ist, so daß das Volumen bei der Temperatur von t Graden des hunderttheiligen Thermometers $= 1 + 0{,}00375\,t$ ist, wenn man das Volumen bei der Temperatur von 0° zur Einheit annimmt.

Aus diesen beiden Gesetzen ergibt sich ein sehr einfaches Mittel zur Berechnung des Volumens und der Dichtigkeit eines Gases unter einem bestimmten Drucke und bei einer bestimmten Temperatur, wenn man beide unter einem anderen Drucke und bei einer anderen Temperatur kennt. Denn es sei:

v' das Volumen des Gases,

Π' seine Dichtigkeit oder das Gewicht der Volumeneinheit bei der Temperatur t' und unter dem Drucke p', wobei sowohl v' wie Π' durch Versuche bekannt ist; ferner seien

v und Π sein Volumen und seine Dichtigkeit bei der Temperatur t und unter dem Drucke p;

so kommt es darauf an, v und Π vermittelst der Größen t, p, v', Π', t' und p' zu berechnen. Bezeichnet nun v_0, Π_0, p_0 resp. das Volumen, die Dichtigkeit und den Druck desselben Gases bei der Temperatur 0_0, so hat man nach dem Gesetze von Gay-Lussac:

$$v_0\,(1 + 0{,}00375\,t')$$

für das Volumen des Gases, wenn es von der Temperatur von 0° zu der Temperatur von t'° übergeht und dabei die Spannkraft p_0 behält, und nach dem Mariotti'schen Gesetze hat man:

$$v' = v_0\,(1 + 0{,}00375\,t')\,\frac{p_0}{p'}$$

für das Volumen, welches das Gas beim Uebergange von dem Drucke p_0 zu dem Drucke p', während seine Temperatur gleich t' bleibt, annimmt. Da sich nun die Volumina von ein und derselben Gewichtsmenge Gas umgekehrt wie die Dichtigkeiten verhalten, so hat man:

$$\frac{\Pi'}{\Pi_0} = \frac{v_0}{v'},$$

und mithin:

$$\Pi' = \Pi_0\,\frac{v_0}{v'} = \Pi_0\,\frac{1}{1 + 0{,}00375\,t'}\cdot\frac{p'}{p_0}.$$

Ebenso findet sich:

$$v = v_0\,(1 + 0{,}00375\,t)\,\frac{p_0}{p},\quad \Pi = \Pi_0\,\frac{v_0}{v} = \Pi\,\frac{1}{1 + 0{,}00375\,t}\cdot\frac{p}{p_0}$$

und aus diesen Gleichungen folgt durch Division ihrer entsprechenden Theile:

$$v = v' \cdot \frac{1 + 0{,}00375\,t}{1 + 0{,}00375\,t'} \cdot \frac{p'}{p} \text{ und:}$$

$$\Pi = \frac{v'}{v}\,\Pi' = \Pi' \frac{1 + 0{,}00375\,t'}{1 + 0{,}00375\,t} \cdot \frac{p}{p'}.$$

Besonderer Fall der Dämpfe, welche condensirt werden können.

§. 164. Diese Formeln finden auch auf die Dämpfe Anwendung, wofern dieselben im elastisch flüssigen Zustande bleiben, d. h. wofern keine Condensation oder neue Dampfbildung eintritt; denn es ist ausdrücklich vorausgesetzt, daß das Gewicht des Gases unter den verschiedenen Druckkräften und Temperaturen stets dasselbe bleibt.

Unterschied zwischen den permanenten Gasen und den Dämpfen.

§. 165. Es ist wohl zu bemerken, daß sich die Dämpfe im Allgemeinen, und der Wasserdampf insbesondere, von den permanenten Gasen wesentlich dadurch unterscheiden, daß ihre Temperatur mit ihrer Spannkraft eng verbunden ist, wenn der Raum, welchen sie erfüllen, gesättigt ist. Um den Begriff dieses letzteren Ausdruckes näher zu bestimmen, nehmen wir an, es werde in einen verschlossenen Raum eine Quantität Wasser im tropfbar flüssigen Zustande und in hinreichender Menge gebracht, um unter verschiedenen Druckkräften und bei Temperaturen Dampf daraus zu bilden. Der leere Raum, welcher über dem Wasser bleibt, füllt sich mit Dampf, dessen Dichtigkeit und Spannung allein von der Temperatur abhängt, unter welcher er gebildet wird, und unabhängig ist von dem absoluten Volumen, welches er einnimmt. Wenn sich dieses Volumen vergrößert, so bildet sich neuer Dampf, welcher den Raum in derselben Weise sättigt und welcher dieselbe Spannkraft und dieselbe Dichtigkeit hat. Umgekehrt, wenn man bei gleichbleibender Temperatur das Volumen wieder in den ursprünglichen Zustand zurückführt, so schlägt sich eine Quantität Dampf nieder, welche derjenigen genau gleich ist, welche bei der früheren Vergrößerung des Volumens neu erzeugt wurde, so daß die Dichtigkeit und der Druck stets dieselben bleiben. Diese Erscheinungen geben ein Bild von den Vorgängen in den gewöhnlichen Kesseln der Dampfmaschinen, welche mit dem Cylinder, der den Stempel enthält, in directer Verbindung stehen, sobald bei constant erhaltener Temperatur das Volumen des Dampfes vermehrt oder vermindert wird.

Nimmt man nun ferner an, ein begrenzter Raum sei in der vorstehenden Art mit Dampf gesättigt, so daß derselbe also die entsprechende Temperatur und die zugehörige Dichtigkeit hat; so wird sich, wenn gar keine Flüssigkeit im Gefäße enthalten ist, bei einer erfolgenden Verminderung des Volumens oder der Temperatur eine Quantität Dampf niederschlagen und der zurückbleibende Dampf wird die der neuen Temperatur zukommende Spannung und Dichtigkeit haben. Vermehrte sich dagegen die Temperatur oder das Volumen des gesättigten Raumes, so kann sich nach der gemachten Voraussetzung kein neuer Dampf bilden, und man sieht, daß alsdann die Spannung und die Dichtigkeit den vorhin für die Gase aufgestellten Gesetzen folgen werden. Dieser letztgedachte Umstand findet in den Dampfmaschinen statt, wenn sich der Dampf im Cylinder unter dem Stempel oder Kolben ausdehnt, während die Communication mit dem Kessel unterbrochen ist. Man sieht hieraus auch, daß, wenn die Dichtigkeit des Dampfes im Sättigungszustande für die verschiedenen Spannungen und Temperaturen bekannt wäre, man daraus leicht die Dichtigkeit desselben Dampfes in den verschiedenen Zuständen der Ausdehnung, welche er erleiden kann, ableiten könnte.

Anwendung auf den Wasserdampf.

§. 166. Hiernach sieht man leicht ein, unter welchen Umständen sich die vorstehenden Beziehungen zwischen der Dichtigkeit, der Temperatur und der Spannkraft der Gase auf die Dämpfe anwenden lassen. Außerdem weiß man durch Versuche, daß die Dichtigkeit oder das Gewicht des Cubikmeters Wasserdampf bei der Temperatur von 100° nach der hunderttheiligen Scala und unter dem gewöhnlichen atmosphärischen Drucke, welcher $1^k,033$ auf den Quadratcentimeter beträgt, gleich $0^k,588$ ist. Setzt man also in der Formel:

$$\Pi = \Pi' \cdot \frac{1 + 0{,}00375\,t'}{1 + 0{,}00375\,t} \cdot \frac{p}{p'}$$

gleichzeitig:

$$t' = 100^\circ, \quad p' = 1^k{,}033, \quad \Pi' = 0^k{,}588,$$

so wird dieselbe:

$$\Pi = \frac{0{,}7827}{1 + 0{,}00375\,t}\,p,$$

und gibt leicht die Dichtigkeit oder das Gewicht des Cubikmeters und mithin auch das Gewicht irgend eines Volumens Dampf, sobald man den Druck auf den Quadratcentimeter und die Temperatur kennt.

Mit Hülfe dieses Ausdruckes findet man auch leicht das Volumen einer gegebenen Gewichtsmenge Dampf bei einer bekannten Temperatur und einer bekannten Spannkraft; denn wenn man das gegebene Gewicht mit $\tilde{\omega}$ bezeichnet, so hat man:

$$\tilde{\omega} = \Pi v = \frac{0{,}7827}{1 + 0{,}00375\,t}\,pv$$

und mithin:

$$v = \frac{\tilde{\omega}}{\Pi} = 1{,}2777 \cdot \tilde{\omega} \cdot \frac{1 + 0{,}00375\,t}{p},$$

wodurch man das Volumen einer bekannten Gewichtsmenge Dampf als Function dieses Gewichtes, der Temperatur und des Druckes auf den Quadratcentimeter erhält.

Beziehung zwischen der Spannkraft und der Temperatur des Wasserdampfes.

§. 167. Es ist oben bereits angeführt, daß zwischen der Spannkraft und der Temperatur der Dämpfe im Zustande der Sättigung eine Beziehung besteht. Dieselbe ist der Gegenstand vieler Untersuchungen von Seiten der Physiker gewesen, und man kannte sie seit einiger Zeit für den Wasserdampf unter den gewöhnlichsten Druckkräften, welche in der Praxis vorkommen, als sie von neuem mit der größten Sorgfalt bis zu sehr hohen Spannungen von Dulong und Arago durch eine Reihe zahlreicher Beobachtungen, welche in den **Annales de Physique et de Chimie, 1830**, mitgetheilt sind, bestimmt wurde. Die Resultate dieser Beobachtungen sind folgende. Bezeichnet:

f die Spannung oder Elasticitätskraft (Expansivkraft) des Dampfes in Atmosphären von $0^m,76$ Quecksilberhöhe, und

T den Ueberschuß der Temperatur des Dampfes über 100°, ausgedrückt in Theilen der Temperatur von 100°, welche als Einheit angenommen ist;

so haben jene Physiker die Resultate ihrer Versuche durch die Interpolationsformel:

$$T = \frac{\sqrt[5]{f} - 1}{0,7153}, \text{ woraus } f = (1 + 0,7153\, T)^5$$

folgt, ausgedrückt.

Da der zur Einheit angenommene atmosphärische Druck dem Drucke einer Quecksilbersäule von $0^m,76$ Höhe oder dem Drucke eines Gewichtes von $1^k,033$ auf den Quadratcentimeter gleichkommt; so hat man, wenn p wieder den Druck des Dampfes auf den Quadratcentimeter in Kilogrammen bezeichnet:

$$p = 1^k,033\, f, \text{ oder } f = \frac{p}{1^k,033}.$$

Ferner hat man, wenn t wieder die Temperatur des Dampfes in hunderttheiligen Graden darstellt:

$$T = \frac{t - 100}{100} = 0,01\, t - 1.$$

Substituirt man also für f und T die vorstehenden Werthe in die obige Formel, so wird dieselbe:

$$p = 1^k,033\, (0,2847 + 0,007153\, t)^5,$$

wodurch man unmittelbar den Druck auf den Quadratmeter als Function der in hunderttheiligen Graden ausgedrückten Temperatur erhält, und umgekehrt.

Die Versuche von Dulong und Arago sind nur bis auf 24 Atmosphären ausgedehnt; aber die Uebereinstimmung der Formel mit den Resultaten der Beobachtung hat ihnen erlaubt, vermittelst derselben eine Tabelle der Spannungen und Temperaturen bis zu 50 Atmosphären mit der Ueberzeugung zu berechnen, daß bei dieser Grenze der Fehler in der Temperatur noch keinen Grad betragen könne.

Die folgende Tabelle enthält außer den Resultaten ihrer Versuche auch die Temperaturen für Spannungen, welche unter einer Atmosphäre liegen, nach den Beobachtungen von Dalton.

Tafel der Spannkraft und entsprechenden Temperatur des gesättigten Wasserdampfes, von 1 bis 24 Atmosphären nach der Beobachtung, von 24 bis 50 Atmosphären durch die Rechnung bestimmt.

Spannkraft des Dampfes in Atmosphären.	Höhe der Quecksilbersäule von 0°, welche die Spannkraft mißt.	Entsprechende Temperatur in Graden des hunderttheiligen Thermometers.	Druck auf den Quadratcentimeter in Kilogrammen.	Spannkraft des Dampfes in Atmosphären.	Höhe der Quecksilbersäule von 0°, welche die Spannkraft mißt.	Entsprechende Temperatur in Graden des hunderttheiligen Thermometers.	Druck auf den Quadratcentimeter in Kilogrammen.
″	0,0013	— 20	0,0018	4½	3,42	149,06	4,648
″	0,0019	— 15	0,0026	5	3,80	153,08	5,165
″	0,0026	— 10	0,0036	5½	4,18	156,8	5,681
″	0,0036	— 5	0,0050	6	4,56	160,2	6,198
″	0,0050	0	0,0069	6½	4,94	163,48	6,714
″	0,0069	5	0,0094	7	5,32	166,5	7,231
″	0,0095	10	0,0129	7½	5,70	169,37	7,747
″	0,0128	15	0,0170	8	6,08	172,1	8,264
″	0,0173	20	0,0235	9	6,84	177,1	9,297
″	0,0231	25	0,0314	10	7,60	181,6	10,33
″	0,0306	30	0,0418	11	8,36	186,03	11,363
″	0,0404	35	0,0549	12	9,12	190,0	12,396
″	0,0530	40	0,0720	13	9,88	193,7	13,429
″	0,0687	45	0,0934	14	10,64	197,19	14,462
″	0,0887	50	0,1205	15	11,40	200,48	15,495
″	0,1137	55	0,1544	16	12,16	203,60	16,528
″	0,1447	60	0,1965	17	12,92	206,57	17.561
″	0,1827	65	0,2482	18	13,68	209,4	18,594
″	0,2290	70	0,3112	19	14,44	212,1	19,627
″	0,2831	75	0,3963	20	15,20	214,7	20,660
″	0,3521	80	0,4783	21	15,96	217,2	21,693
″	0,4317	85	0,5865	22	16,72	219,6	22,726
″	0,5253	90	0,7136	23	17,48	221,9	23,759
″	0,6343	95	0,8617	24	18,24	224,2	24,792
1	0,7600	100	1,0335				
1½	1,1400	112,2	1,549	25	19,00	226,2	25,825
2	1,5200	121,4	2,066	30	22,80	236,2	30,990
2½	1,9000	128,8	2,582	35	26,60	244,85	36,155
3	2,280	135,1	3,099	40	30,40	352,55	41,320
3½	2,66	140,6	3,615	45	34,20	259,52	46,485
4	3,04	145,4*)	4,132	50	38,00	265,89	51,650

Quantität Wärme, welche die verschiedenen Brennstoffe geben.

§. 168. Die Physiker haben auch versucht, die **absolute Quantität Wärme** oder die **wärmeerzeugende Kraft** der verschiedenen

*) Die Temperaturen, welche den Spannungen von 1 bis 4 Atmosphären entsprechen, sind nach der Tredgold'schen Formel berechnet, welche für diese Spannungen mit den Beobachtungen besser übereinstimmt, als die vorhin mitgetheilte.

Brennstoffe zu bestimmen. Zu diesem Zwecke haben sie mit Hülfe des Calorimeters von Lavoisier die Gewichtsmenge Eis von der Temperatur von 0° gemessen, welche von einer gegebenen Gewichtsmenge eines Brennstoffes beim Verbrennen desselben geschmolzen werden kann, und da man weiß, daß zur Schmelzung eines Kilogrammes Eis bei der Temperatur von 0° ein Kilogramm Wasser von der Temperatur von 75° erforderlich ist; so sieht man, daß man zur Vergleichung der absoluten Quantitäten Wärme, welche durch die verschiedenen Brennstoffe entwickelt werden, diejenige wählen konnte, welche erforderlich ist, um die Temperatur von 1 Kilogramm Wasser von 0° auf 1° zu erhöhen. Diese Vergleichseinheit ist von Clement eine Calorie und von Navier ein Wärmegrad genannt worden, wobei erinnert werden muß, daß die Bezeichnung Wärmegrad nicht mit Temperaturgrad verwechselt werden darf. Nach den Versuchen von Lavoisier, Wollaston und seinen eigenen hat Clement die nachstehende Tabelle entworfen:

Art des Brennstoffes.	Gewicht des geschmolzenen Eises durch die Verbrennung von 1k.	Anzahl der entwickelten Wärmegrade durch die Verbrennung von 1k.	Bemerkungen.
Wasserstoffgas	295,0	22125	
Getrocknete oder destillirte Holzkohle . . .	94,0	7050	gleichgültig, von welcher Holzart.
Gewöhnliche Holzkohle	80,0	6000	0,20 Wasser enthaltend.
Reiner Koaks	94,0	7050	
Steinkohle von erster Qualität	94,0	7050	0,02 Asche enthaltend.
Steinkohle von zweiter Qualität	84,6	6345	0,10 „ „
Steinkohle von dritter Qualität	76,1	5932	0,20 „ „
Am Feuer getrocknetes Holz	48,88	3666	gleichgültig, von welcher Holzart; 0,52 Kohle enthaltend.
An der Luft getrocknetes Holz	38,41	2945	0,20 Wasser enthaltend.
Gewöhnlicher Torf . .	20,0	1500	
Torf von bester Qualität	40,0	3000	Versuche von Garnier über den Torf von Beauvais.

Diese Tabelle zeigt z. B., daß ein Kilogramm trockener Holzkohle fähig ist, 7050 Kilogramme Wasser auf die Temperatur von 1° oder, was dasselbe ist, ein Kilogramm Wasser von 0° auf 7050° zu erhitzen. Hiernach wird es nicht schwer sein, das Gewicht irgend eines Brennstoffes zu berechnen, welches erforderlich ist, um eine gegebene Gewichtsmenge Wasser auf eine bekannte Temperatur zu erhitzen.

Die vorhergehenden Resultate können in der Praxis nicht erreicht werden; man rechnet für die am besten angelegten Oefen nur zwei Drittel und meistens nur die Hälfte von dem durch das Calorimeter erlangten Resultate.

Ferner hat man beobachtet, daß ein Kilogramm Kohle zu seiner Verbrennung 10 Kubikmeter atmosphärischer Luft bei mittlerer Temperatur und Spannung bedarf; in der Praxis muß man jedoch 20 und wohl gar 30 Kubikmeter rechnen, damit die Verbrennung vollständig vor sich gehen kann; außerdem ist das Volumen der Gase, welche die Producte der Verbrennung bilden, dem der verbrauchten Luft gleich und wird nur durch den Einfluß der Temperatur des Feuerraumes vermehrt; endlich ist die Quantität der von einem Brennstoffe entwickelten Wärme dieselbe, die Verbrennung mag langsam oder rasch vor sich gehen.

Bei allen vorhergehenden Resultaten ist vorausgesetzt, daß die Wärmecapacität des Wassers für die verschiedenen Temperaturen unverändert bleibt, was auch nahezu der Fall ist.

Quantität Wärme, welche in einem Kilogramm Dampf bei verschiedenen Temperaturen und Spannungen enthalten ist.

§. 169. Eine andere nicht minder wichtige Untersuchung betrifft die Quantität Wärme, welche erforderlich ist, um den Dampf bei verschiedenen Temperaturen und Spannungen zu erzeugen. Clement führt als Resultat seiner Versuche an, daß ein Kilogramm Dampf, bei welcher Spannung und Temperatur man es auch nehmen möge, ein und dieselbe Quantität Wärme oder ein und dieselbe Anzahl Wärmegrade (Calorien) enthalte, und da man weiß, daß 1 Kilogramm Dampf von 100° die Temperatur einer Gewichtsmenge von $5^{kil.},50$ Wasser von 0° bis 100° erhöhet; so folgt nach Clement, daß in einem Kilogramm Dampf stets

$$100 + 550 = 650 \text{ Wärmegrade}$$

enthalten sind.

Der englische Physiker Southern, welcher denselben Gegenstand behandelt hat, zerlegt die in dem Dampfe enthaltene Quantität Wärme in zwei Theile; der eine, welchen er die latente oder gebundene Wärme nennt, und welcher nothwendig ist, um das Wasser in den dampfförmigen Zustand überzuführen, ist auch nach ihm gleich 550 Wärmegraden für ein Kilogramm Dampf; der andere, welchen er mit dem Namen der fühlbaren, sensibeln, oder freien Wärme bezeichnet, ist der, welcher durch die Anzahl der Grade des Thermometers angezeigt wird. Nach dem Letzteren ist die Anzahl der in einem Kilogramm Dampf enthaltenen Wärmegrade, wenn t die Temperatur des Dampfes in hunderttheiligen Graden bezeichnet:

$$550 + t.$$

Man sieht übrigens, daß bei 100° die beiden vorhergehenden Regeln dasselbe Resultat geben, und daß man für Temperaturen, welche sich nur wenig über diesen Grad erheben, ohne merklichen Fehler sowohl die eine, wie die andere annehmen kann. Die von Southern scheint jedoch rationeller zu sein, und wir geben derselben hier den Vorzug.

Quantität Wärme, welche erforderlich ist, um ein gegebenes Gewicht Dampf zu bilden.

§. 170. Mit Hülfe der vorstehenden Formel ist man leicht im Stande, die Anzahl der Wärmegrade anzugeben, welche in ein gegebenes Gewicht $\tilde{\omega}$ Wasser von der Temperatur t' übergeführt werden müssen, um dasselbe in Dampf von der Temperatur t zu verwandeln; denn man hat auf ein jedes Kilogramm zu verdampfendes Wasser erstens 550 Wärmegrade für die latente oder constitutive Wärme, und zweitens $t - t'$ Wärmegrade für die fühlbare Wärme, mithin auf das ganze Gewicht $\tilde{\omega}$ überhaupt

$$\tilde{\omega}\,(550 + t - t') \text{ Wärmegrade}$$

zu rechnen.

Quantität der zu verbrennenden Kohlen, um ein gegebenes Gewicht Dampf zu erhalten.

§. 171. Bezeichnet man ferner mit N die Anzahl der Wärmegrade, welche ein Kilogramm des zu verwendenden Brennmaterials entwickeln kann (§. 160); so leuchtet ein, daß man zur Verdampfung der obigen $\tilde{\omega}$ Kilogramme Wasser

$$\frac{\tilde{\omega}\,(550 + t - t')^{\text{kil.}}}{N}$$

Brennmaterial bedarf. Hierbei muß man sich jedoch daran erinnern, daß der Effect der Verbrennung irgend eines Brennstoffes in der Praxis nur $\frac{2}{3}$ oder $\frac{1}{2}$ von dem beträgt, welcher durch das Calorimeter erhalten wird.

Wollte man z. B. Dampf von der Temperatur von 125° erzeugen und hätte dabei das Wasser, womit der Kessel gespeißt werden soll, eine Temperatur von 40°; so würde man finden, daß 1 Kilogramm der besten Steinkohlen $\frac{7050}{550 + 125 - 40} = 11$ Kil. Dampf liefern könnte, während die besten Feuerheerde nur 6 bis 7 Kil. Dampf für ein Kilogramm Steinkohlen geben.

Quantität des Injectionswassers, welches zur Condensation des Dampfes erforderlich ist.

§. 172. Das Vorhergehende kann auch zur Bestimmung der Gewichtsmenge des Wassers dienen, welches in den Condensator gespritzt werden muß, um die Condensation des Dampfes bei einer gegebenen Temperatur zu bewirken. Denn es sei $\tilde{\omega}$ das Gewicht des Dampfes bei der Temperatur t und $\tilde{\omega}_1$ das Gewicht des Wassers bei der Temperatur t_1, welches sich mit dem Dampfe mischen soll, damit das Resultat Wasser von der Temperatur t' werde; so muß offenbar die Anzahl $(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}_1)\,t'$ der in der Mischung enthaltenen Wärmegrade gleich der Summe der Wärmequantitäten sein, welche in dem Dampfe und in dem Injectionswasser enthalten sind. Hiernach hat man:

$$(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}_1)\, t' = \tilde{\omega}\,(550 + t) + \tilde{\omega}_1 t_1$$

und daher:

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\tilde{\omega}\,(550 + t - t')}{t' - t_1}.$$

Man sieht leicht ein, daß das Gewicht $\tilde{\omega}_1$ des Injectionswassers sehr rasch mit der Temperatur t des Dampfes und mit der Abnahme der Temperatur t' des Gemisches zunimmt.

Quantität Arbeit, welche durch ein gegebenes Volumen Dampf hervorgebracht wird.

§. 173. Nachdem diese vorläufigen Begriffe über die physikalischen Eigenschaften des Dampfes und über seine Erzeugung vorausgeschickt sind, können wir zur Berechnung der Quantitäten Arbeit übergehen, welche derselbe in den verschiedenen Systemen von Dampfmaschinen hervorbringt.

Man kann die Arten der Anwendung des Dampfes in zwei große Klassen theilen. Zu der ersteren gehören alle die, wo die elastische Flüssigkeit mit der Spannung der Erzeugung im Dampfkessel arbeitet und dann in einen Condensator oder in die Luft entweicht, welches der Fall der gewöhnlichen Niederdruckmaschinen mit Condensation und der Hochdruckmaschinen ohne Expansion, mit oder ohne Condensation ist. Die zweite Klasse bilden die Maschinen, in welchen die Communication des Dampfes mit dem Kessel, nachdem jener mit dem Drucke der Erzeugung eine Zeit lang gewirkt hat, unterbrochen wird und der Dampf alsdann in Folge seiner Expansion eine Quantität Arbeit hervorbringt, welche sich zu der ersteren addirt. Hierher gehören alle Dampfmaschinen mit Expansion, mit oder ohne Condensation.

Wir werden weiter unten auf die besondere Art und Weise der Anwendung der nachstehenden allgemeinen Theorie auf die verschiedenen Varietäten dieser beiden Klassen von Maschinen zurückkommen, und bemerken hier nur noch, daß man in allen Fällen annimmt, daß der Dampf, ebenso wie die Gefäße und Röhren, in denen er circulirt, während der ganzen Dauer der Wirkung dieselbe Temperatur behält, sei es nun, daß er mit der ursprünglichen Spannkraft der Erzeugung oder mit Expansion wirkt, eine Annahme, welche in der Wirklichkeit sehr nahe zutrifft. Muß also der Dampf beim Uebergange aus seinem ursprünglichen in sein neues Volumen eine gewisse Quantität latenter Wärme absorbiren, so wird vorausgesetzt, daß ihm dieselbe durch die Oberfläche des Cylinders oder allgemein durch die umgebenden Körper zugeführt werde, und hieraus folgt, daß der Dampf bei seiner Ausdehnung genau dem Mariotti'schen Gesetze folgen wird. Man realisirt diese Hypothese übrigens in der Praxis dadurch, daß man die Behälter mit schlechten Wärmeleitern oder noch besser mit einem Mantel umgibt, in welchem eine direct aus dem Kessel abgeleitete Quantität Dampf circulirt.

Nun sei:

s die Fläche des Stempels oder Kolbens einer Dampfmaschine in Quadratmetern,

x der Weg, den derselbe seit dem Augenblicke durchlaufen hat, wo der Dampf mit der Spannung im Kessel vor demselben ankam,

p der Druck des Dampfes im Kessel auf den Quadratcentimeter in Kilogrammen,

v das Volumen des Cylinderraumes, wenn der Stempel in der Entfernung x von seinem Ausgangspuncte angelangt ist, in Cubikmetern;

so ist der Druck gegen die ganze Fläche des Stempels:

$$10000\ ps^{\text{kil.}},$$

und wenn sich der Stempel um die Größe dx fortbewegt, so ist das von dem Dampfe hervorgebrachte Element der Arbeit:

$$10000\ psdx^{\text{k.m}},$$

und da man offenbar

$$sdx = dv$$

hat, so reducirt sich jene Quantität der Arbeit auf:

$$10000\ pdv^{\text{k.m}}.$$

Quantität Arbeit, welche der Spannung der Erzeugung des Dampfes entspricht.

So lange der Dampf fortfährt, aus dem Kessel nachzuströmen, bleibt der Druck p constant, wenn die Zutrittsöffnungen hinlänglich groß sind, was bei den guten Maschinen wirklich der Fall ist, und man erhält mithin durch Integration des vorstehenden Ausdruckes von $v = o$ bis zu dem Werthe, welcher dem Augenblicke entspricht, wo die Communication mit dem Dampfkessel unterbrochen wird, für die gesammte Arbeit während dieser Periode:

$$10000\ pv^{\text{k.m}}.$$

Quantität Arbeit, welche der Expansion des Dampfes entspricht.

Fährt nun der Dampf fort, auf den Stempel zu wirken, indem er sich so weit ausdehnt, daß sein Volumen gleich v_1 wird, ohne daß seine Temperatur herabsinkt; so sieht man leicht aus den im sechsten Abschnitte, §. 15 bei der Theorie der Bewegung der elastischen Flüssigkeiten angestellten Betrachtungen, daß die Quantität der Arbeit, welche derselbe während seiner Expansion entwickelt, gleich:

$$10000\ pv\ log.\left(\frac{v_1}{v}\right)^{\text{k.m}}$$

ist. In diesem Ausdrucke ist $log.\left(\frac{v_1}{v}\right)$ ein neperscher Logarithmus, welchen man in der dem sechsten Abschnitte angehängten Tabelle berechnet findet, oder welcher sich durch die Multiplication des gewöhnlichen Logarithmus von $\frac{v_1}{v}$ mit der Zahl 2,3026, oder endlich näherungsweise mit Hülfe des Simpson'schen Lehrsatzes ergibt, wie im §. 18 des sechsten Abschnittes gezeigt ist.

Addirt man die letzte Quantität Arbeit, welche der Expansion entspricht, zu der, welche durch die Spannkraft der Erzeugung des Dampfes in der ersten Periode entwickelt ist; so erhält man für die gesammte Quantität Arbeit, welche das Volumen v des Dampfes in den bezeichneten Grenzen liefert:

$$10000\, pv \left(1 + log.\, \frac{v_1}{v}\right)^{k \cdot m}.$$

Quantität Arbeit, welche von der Spannkraft des Dampfes im Condensator hervorgebracht wird.

Bei allen Dampfmaschinen wirkt aber auf den Kolben in entgegengesetzter Richtung seiner Bewegung ein Druck, welcher von dem Drucke der Atmosphäre, wenn kein Condensator vorhanden ist, oder aus der Spannung des Dampfes im Condensator, wenn man Condensation anwendet, herrührt. Bezeichnet man daher diesen Druck, welcher der Bewegung des Kolbens entgegenstrebt, mit p'; so bringt derselbe in entgegengesetzter Richtung eine Quantität Arbeit

$$= 10000\, p'v_1{}^{k \cdot m}$$

hervor, welche von der vorhin erhaltenen offenbar subtrahirt werden muß, und die dem Stempel wirklich mitgetheilte Quantität Arbeit ist demnach:

$$10000\, pv \left(1 + log.\, \frac{v_1}{v}\right) - 10000\, p'v_1{}^{k \cdot m},$$

welche sich wegen der Relation:

$$p_1 v_1 = pv$$

auf:

$$10000\, pv \left[1 + log.\left(\frac{p}{p_1}\right) - \frac{p'}{p_1}\right]^{k \cdot m}$$

reducirt.

Das Vorhergehende findet ohne Unterschied auf alle Systeme von Dampfmaschinen Anwendung.

§. 174. Da der vorstehende Ausdruck unabhängig von jeder Hypothese über die besondere Form der Apparate und von der Art der Expansion gefunden ist; so sieht man, daß sich derselbe auf alle Systeme von Dampfmaschinen anwenden läßt. Sobald man den Entwurf zu einer Maschine ausgeführt hat, kennt man aus ihren Dimensionen und ihrer Einrichtung das Volumen v des Dampfes bei der Spannung im Kessel, welches bei jedem Stempelzuge in den Cylinder gelangt. Ebenso kennt man das Verhältniß $\frac{v_1}{v}$ oder $\frac{p}{p_1}$, da der Druck p durch das Manometer, mit welchem alle Dampfmaschinen versehen sein müssen, gegeben ist, und der Druck p' im Condensator, wenn ein solcher vorhanden ist, leicht aus der Temperatur der Condensation abgeleitet werden kann. Es wird also keine Schwierigkeiten haben, die gesammte Quantität Arbeit, welche bei einer jeden Oscillation von dem verbrauchten Dampfe geliefert wird, zu berechnen.

Theoretische Quantität Arbeit, welche von dem Dampfe in einer Secunde hervorgebracht wird.

§. 175. Vermittelst der letzten Formel kann man die Quantität Arbeit berechnen, welche ein gegebenes Volumen Dampf von bestimmter Spannkraft und Temperatur hervorbringt, wenn es zuvörderst mit der Spannung der Erzeugung wirkt und sich alsdann bis zu einer gewissen Grenze ausdehnt, ohne dabei Rücksicht auf die Zeit zu nehmen. Multiplicirt man jene Formel mit der Zahl, welche angibt, wie viel mal ein gleiches Volumen Dampf während einer Secunde in die Maschine tritt; so erhält man die theoretische Arbeitsquantität, welche in dieser Zeit der Maschine mitgetheilt wird. Ist z. B. bei einer gewöhnlichen Dampfmaschine

n die Anzahl der einfachen Hin- und Hergänge des Stempels in einer Minute,

so wird die erwähnte Quantität Arbeit in einer Secunde ausgedrückt durch:

$$\frac{n}{60}\, 10000\, pv \left[1 + log.\, \frac{p}{p_1} - \frac{p'}{p_1}\right]^{k \,.\, m},$$

und wenn man mit 75 dividirt, so erhält man für die theoretische Anzahl der Pferdekräfte der Maschine:

$$\frac{n}{60} \cdot \frac{10000}{75}\, pv \left[1 + log.\, \frac{p}{p_1} - \frac{p'}{p_1}\right].$$

Theoretische Quantität der Wirkung, welche der Verbrennung von 1 Kilogramm Steinkohlen entspricht.

§. 176. Gewöhnlich vergleicht man die verschiedenen Dampfmaschinen unter einander dadurch, daß man angibt, wie groß die Quantität Arbeit ist, welche sie für ein jedes Kilogramm verbrannter Kohlen liefern.

Wenn aber ϖ das Gewicht des Dampfvolumens v bei der Spannung p und der Temperatur t bezeichnet, so hat man nach §. 166:

$$v = 1{,}2777\, \varpi\, \frac{1 + 0{,}00375\, t}{p}.$$

Der theoretische Ausdruck für die Quantität der Arbeit, welche das Volumen v des Dampfes hervorbringt, wird demnach ausgedrückt durch:

$$12777\, \varpi\, (1 + 0{,}00375\, t) \left[1 + log.\, \frac{p}{p_1} - \frac{p'}{p_1}\right]^{k \,.\, m},$$

und da zur Verwandlung von ϖ Kilogramm Wasser von der Temperatur t' in den dampfförmigen Zustand von der Temperatur t theoretisch

$$\frac{\varpi\, (550 + t - t')^{kil.}}{N} \text{ Brennmaterial}$$

erforderlich sind; so folgt, daß die theoretische Quantität Arbeit, welche 1 Kil. Brennmaterial entspricht, ist:

$$\frac{12777\,N(1+0{,}00375\,t)}{550+t-t'}\left[1+\log.\frac{p}{p_1}-\frac{p'}{p_1}\right]^{k.m}.$$

Nimmt man zu dem Brennmateriale gute Steinkohlen, für welche man $N = 7050$ hat, so reducirt sich dieser Ausdruck auf:

$$90077850\,\frac{1+0{,}00375\,t}{550+t-t'}\left[1+\log.\frac{p}{p_1}-\frac{p'}{p_1}\right]^{k.m}$$

für 1 Kilogr. Steinkohlen.

Maximum der theoretischen Quantität Arbeit, welche ein Kilogramm Steinkohlen hervorbringen kann.

§. 177. In dem letzten Ausdrucke haben einige der Größen p, p_1, p', t und t' natürliche Grenzen, welche nicht überschritten werden können. So kann z. B. die mittlere Temperatur des Injectionswassers, welches gewöhnlich aus geringen Tiefen des Erdbodens genommen ist, nicht weniger als 10° betragen, und man kann nicht annehmen, daß die der Condensation geringer sei, da der Ausdruck:

$$\omega_1 = \frac{\bar{\omega}\,(550+t-t')}{t'-t_1}$$

in §. 172 für das erforderliche Gewicht Injectionswasser schon für $t_1 = t'$ unendlich wird. Hieraus folgt auch, daß der Druck p' im Condensator niemals schwächer als der sein kann, welcher der Temperatur von 10° entspricht, d. h. niemals schwächer als $0^k{,}013$ auf den Quadratcentimeter. Was den Druck p_1 betrifft, welcher die Grenze der Expansion bildet, so leuchtet ein, daß sein niedrigster Werth, wenn von allen Widerständen in der Maschine abstrahirt wird, $p_1 = p'$ ist.

Unter der Voraussetzung, daß alle diese Grenzen für die Größen t', p' und p_1 erreicht seien, um dadurch die Quantität der Wirkung, welche einem Kilogramm Kohlen entspricht, möglichst zu vermehren, würde der Ausdruck für diese Quantität Arbeit nur noch p und t enthalten, welche einer anderweitigen Vergrößerung fähig sind; man könnte alsdann eine dieser beiden Größen vermittelst der Relation:

$$p = 1^k{,}033\,[0{,}2847 + 0{,}007154\,t]^5$$

eliminiren und den Werth der andern suchen, welcher jene Quantität Arbeit zu einem **Maximum** macht. Diese Untersuchung führt jedoch zu sehr weitläufigen Rechnungen und keinem für die Praxis brauchbaren Resultate. Es wird daher zweckmäßiger sein, den Einfluß der Vergrößerung der Spannung, der Expansion und der Condensation bis zu ihren äußersten Grenzen durch die Betrachtung der numerischen Resultate, welche sich aus der Formel ergeben, anschaulich zu machen. Zu diesem Zwecke kann man die bekannten Systeme der Dampfmaschinen in vier Klassen eintheilen:

1) **Maschinen mit Expansion und Condensation**, wie die von **Woolf** und einige von **Watt**. In diesen hat man die Gren-

zen $t' = 10^\circ$, $p' = p_1 = 0^k{,}013$, wodurch sich der Ausdruck für die theoretische Quantität der Arbeit auf:

$$90077850 \left(\frac{1 + 0{,}00375\, t}{550 + t - 10}\right) log.\ \frac{p}{0{,}013}^{k \cdot m}$$

reducirt.

2) Maschinen mit Condensation und ohne Expansion, wie die von Newcommen und von Watt. Hier hat man die Grenzen $t' = 10^\circ$, $p_1 = p$, $p' = 0^k{,}013$ und die Quantität der Arbeit wird ausgedrückt durch:

$$90077850 \left(\frac{1 + 0{,}00375\, t}{550 + t - 10}\right) \left(1 - \frac{0{,}013}{p}\right)^{k \cdot m}.$$

3) Maschine mit Expansion und ohne Condensation, bei denen der Dampf, nachdem er seine Wirkung gethan hat, in die atmosphärische Luft entweicht, wie bei dem größtem Theile der sogenannten Hochdruckmaschinen, welche auf den Dampfbooten und Eisenbahnen gebraucht werden; für diese hat man die Grenzen $p_1 = 1^k{,}033$, $p' = p_1$, $t = 10^\circ$, und die theoretische Quantität der Arbeit für 1 Kil. Steinkohlen ist:

$$90077850 \left(\frac{1 + 0{,}00375\, t}{550 + t - 10}\right) log. \left(\frac{p}{1{,}033}\right)^{k \cdot m}.$$

4) Maschinen, bei denen man weder Expansion, noch Condensation anwendet. In diesem Falle hätte man die Grenzwerthe $p_1 = p$, $p' = 1^k{,}033$, $t' = 10^\circ$ und:

$$90077850 \left(\frac{1 + 0{,}00375\, t}{550 + t - 10}\right) \left(1 - \frac{1^k{,}033}{p}\right)^{k \cdot m}$$

für den Ausdruck der Quantität der Arbeit.

Läßt man nun in diesen vier Klassen von Dampfmaschinen den Druck von einer bis zu 32 Atmosphären in geometrischer Progression zunehmen, so erhält man die folgende Tabelle für die theoretische Quantität der Arbeit, welche einem Kilogramm Kohlen entspricht:

Spannkraft des Dampfes in Atmosphären	1	2	4	8	16	32
Entsprechende Temperatur	100°	121,4°	145,4°	172,1°	203,6°	239,8°
1) Maschine mit Expansion u. Condensation	847293	999764	1167803	1343150	1525983	1740386
2) „ mit Condensation und ohne Expansion	191246	196086	202067	207663	213270	218801
3) „ mit Expansion und ohne Condensation	0	136708	280907	432598	591778	758293
4) „ ohne Expansion und ohne Condensation	0	88653	152016	182069	200141	212059

Bemerkungen über die Resultate der vorstehenden Tabelle.

§. 178. Die Betrachtung der in vorhergehender Tabelle enthaltenen Resultate lehrt, daß bei den Maschinen mit Expansion und Condensation die theoretischen Quantitäten der Arbeit bei weitem nicht in dem Verhältnisse wachsen, wie die Spannungen, und daß man bei 32 Atmosphären nur wenig mehr als das Doppelte von der Arbeit bei

1 Atmosphäre erhält. Außerdem bemerkt man, daß für die successiven Substitutionen

der Werthe von t

$$= \quad 100^\circ \quad 121{,}4^\circ \quad 145{,}4^\circ \quad 172{,}1^\circ \quad 203{,}6^\circ \quad 239{,}8^\circ$$

der Factor $\dfrac{1 + 0{,}00375\,t}{550 + t - 10}$

$$= 0{,}00215 \; 0{,}00219 \; 0{,}00225 \; 0{,}00231 \; 0{,}00237 \; 0{,}00243$$

wird, so daß derselbe bei der Zunahme der Temperatur nur sehr langsam wächst. Hieraus folgt, daß das Maximum des theoretischen Nutzeffectes für die Maschinen mit Expansion, welche die erste und dritte Klasse bilden, nicht viel rascher wächst, als der Logarithmus des Druckes. Erwägt man nun die Gefahren der Explosion, die Verluste an Wärme und Dampf und die Schwierigkeiten der Construction, welche sich mit der Spannung sehr vermehren; so sieht man, daß es in der Praxis von geringem Vortheile sein wird, den Dampf in diesen Maschinen mit starken Spannungen wirken zu lassen.

Die vorhergehende Bemerkung über das langsame Wachsen des Factors $\dfrac{1 + 0{,}00375\,t}{550 + t - 10}$ im Verhältnisse zu dem der Temperatur und die Geringfügigkeit des subtractiven Gliedes $\dfrac{0{,}013}{p}$ in dem letzten Factor des Ausdruckes für die Arbeit der Maschinen der zweiten Klasse zeigt, und die Zahlen der obigen Tabelle bestätigen es, daß für diese Maschinen durch die Anwendung des Dampfes unter hohen Spannungen noch weniger Gewinn zu erwarten ist, was für die Praxis um so mehr gilt; und in der That construirt man diese Art von Maschinen nur mit niedrigem Drucke.

Was endlich die vierte Klasse von Dampfmaschinen betrifft, so sind die theoretischen Effecte noch geringer, und die Resultate zeigen, daß dieses System das schlechteste von allen ist und selbst theoretisch bei einem Drucke von 16 Atmosphären nicht viel mehr leisten würde, als die gewöhnlichen Niederdruckmaschinen. Auch ist man nach einigen unfruchtbaren Versuchen von diesem Systeme ganz abgegangen.

Vergleichung der Resultate der Theorie mit denen der Praxis.

§. 179. Die Quantitäten Arbeit, welche man in der Praxis wirklich erhält, weichen von denen der Theorie bedeutend ab, was nicht befremden wird, wenn man sich erinnert, daß die besten Feuerheerde nur $\frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ der von dem Brennstoffe entwickelten Wärme nutzbar machen, daß man für die Expansion und Condensation die äußersten Grenzen angenommen und daß man endlich von den Verlusten an Dampf und von den zahlreichen passiven Widerständen der Maschinen gänzlich abstrahirt hat. Um daher die Resultate der Theorie mit denen zu vergleichen, welche die besten Maschinen liefern, muß man zuvörderst ihren theoretischen Effect durch die wirklich gegebenen Daten, unter denen sie arbeiten, berechnen.

Zu diesem Behuf bemerke man, daß die Quantität Wasser, welche zur Condensation erforderlich ist und welche die Maschine fast immer durch Saugpumpen heben muß, sehr rasch wächst, je niedriger die Temperatur des Condensators gehalten wird, und daß man ferner das Condensationswasser gewöhnlich wieder zur Speisung des Dampfkessels benutzt und daher eine Ersparung an Brennmaterial erzielt wird, wenn man demselben eine etwas hohe Temperatur läßt. Aus diesen Gründen wird die Temperatur des Condensators in der Regel zu 40° angenommen; man hat also $t' = 40°$ und mithin $p' = 0^k,072$, wenn man dabei die Zunahme an Spannung vernachlässigt, welche die Luft verursacht, die durch das Condensationswasser mit in den Condensator übergeführt und durch die sogenannte Luftpumpe wieder entfernt wird.

Dampfmaschinen von Watt.

§. 180. Substituirt man nun diese Data in den Ausdruck für die Quantität der Arbeit, welche der Verbrennung von 1 Kil. Kohlen entspricht; so erhält man für die Watt'schen Niederdruckmaschinen, wo gewöhnlich:

$$p = 1^{atm.},25 = 1^k,291, \quad t = 107°,3, \quad p = p_1$$

ist, den Ausdruck:

$$90077850 \left(\frac{1 + 0,00375\,t}{550 + t - t'}\right)\left(1 - \frac{p'}{p}\right)^{k.m} = 193026^{k.m}$$

für den theoretischen Effect von einem Kilogramm Steinkohlen.

Im commerciellen Verkehr werden die Niederdruckmaschinen von den besseren Maschinenbauern unter der Verpflichtung geliefert, daß sie für jede Pferdekraft nicht mehr als 5 Kil. guter Steinkohlen in der Stunde consumiren; es wird also angenommen, daß 1 Kil. Kohlen in der Secunde höchstens eine Quantität der Wirkung von $\frac{75^{k.m} \times 3600}{5}$ $= 54000^{k.m}$ liefert. Die Prüfung der gut unterhaltenen und gut geführten Maschinen dieser Art, welche zur Fortpflanzung einer continuirlichen Rotationsbewegung angewendet werden, zeigt, daß man dieses Resultat wirklich sehr nahe erhält.

Wir führen hier unter anderem die Beobachtungen an, welche von Poncelet über eine Maschine von 20 Pferdekräften in der Tuchfabrik von Cuccin-Gridaine zu Sedan angestellt sind. Die Spannung p im Kessel betrug $1\frac{1}{8}$ Atmosph. $= 1^k,162$, die im Condensator $p' = 0^k,129$ und es wurden für jede Pferdekraft in der Stunde $5^k,5$ Steinkohlen verbraucht, was einer Arbeitsquantität von:

$$49091^{k.m} \text{ für ein Kilogramm Kohlen}$$

entspricht.

Im Allgemeinen variirt die Consumtion von Kohlen bei den guten Maschinen dieses Systems zwischen 5 und 6 Kilogramm für die Pferdekraft in der Stunde, oder die wirkliche Arbeit zwischen $54000^{k.m}$ und $45000^{k.m}$ für ein Kilogramm verbrannter Kohlen.

Correctionscoefficient der theoretischen Formel in §. 176 für die Watt'schen Niederdruckmaschinen.

§. 181. Vergleicht man den größten practischen Effect mit dem theoretischen Effecte, so sieht man, daß ihr Verhältniß zwischen:

$$\frac{54000}{193026} = 0{,}279 \text{ und } \frac{45000}{193026} = 0{,}235$$

variirt. Man muß daher die theoretische Quantität Arbeit, welche einem Kilogramm Kohlen entspricht, mit dem einen oder dem andern dieser Coefficienten multipliciren, je nachdem sich die Maschine in einem mehr oder weniger befriedigenden Zustande der Unterhaltung befindet und das Brennmaterial von besserer oder schlechterer Qualität ist.

Zur Erklärung dieser sehr bedeutenden Differenz zwischen der theoretischen und der wirklichen Quantität Arbeit der Niederdruckmaschinen dienen besonders zwei verschiedene Ursachen: 1) die Wärmeverluste am Feuerheerde und 2) die Entweichungen und Abkühlungen des Dampfes und die passiven Widerstände der Maschine. Es ist schon oben bemerkt, daß man durch die besten Feuerheerde wenig mehr als die Hälfte der durch den Brennstoff entwickelten Wärme nutzbar machen kann; danach erhält man bei der Anwendung von guten Steinkohlen durch die Watt'schen Feuerheerde von einem Kilogramm Kohlen nur 5 bis 6 Kilogr. Dampf, statt daß man, wie in §. 171 gezeigt ist, 11 Kil. erhalten müßte. Hieraus folgt, daß man statt $N = 7050$, in der Wirklichkeit nur $N = 3525$ Wärmegrade (Calorien) hat, und daß sich der theoretische Effect schon durch diese Wärmeverluste am Feuerheerde allein auf die Hälfte reducirt und nicht mehr, als:

$$96513^{k \cdot m} \text{ für ein Kilogramm verbrannter Kohlen}$$

beträgt. Vergleicht man diesen Effect mit dem wirklich erhaltenen, so variirt das Verhältniß von:

$$\frac{54000}{96513} = 0{,}56 \text{ bis } \frac{45000}{96513} = 0{,}47,$$

wovon der mittlere Werth 0,51 ist. Hiernach absorbiren also die Verluste an Dampf, die Reibungen u. s. w. 0,49 oder etwa die Hälfte der von dem Dampfe hervorgebrachten Arbeit.

Correctionscoefficient der Formel, welche die Kraft der Maschine in Pferdekräften angibt.

§. 182. Das letzte Verhältniß des Nutzeffectes des wirklich erzeugten Dampfes zu der theoretischen Quantität Arbeit, die von demselben hervorgebracht werden kann, ist der Coefficient, welcher auf die Formel:

$$\frac{n}{60} \cdot \frac{10000pv}{75}\left(1 - \frac{p'}{p}\right)^{k \cdot m},$$

welche die theoretische Quantität Arbeit der Niederdruckmaschinen in Pferdekräften von $75^{k \cdot m}$ ausdrückt, angewendet werden muß.

Die Beobachtung des Manometers und der Temperatur oder der Spannung des Condensators gibt p und p'; die Dimensionen des Cylinders und des Kolbenlaufs geben das Volumen v des Dampfes, welches bei jedem Kolbenzuge in die Maschine tritt; die Zahl n der Kolbenzüge in einer Minute erhält man mit Hülfe einer Uhr, und es wird daher immer leicht sein, die theoretische Kraft und alsdann die wirkliche Kraft der Maschine zu berechnen, indem man jene vermittelst des erfahrungsmäßigen Coefficienten reducirt.

Es muß hierbei noch bemerkt werden, daß der Coefficient, welcher mit der Vollkommenheit der Ausführung und dem Unterhaltungszustande der Maschinen variirt, auch von der absoluten Größe derselben abhängt, weil die Verluste an Dampf und die passiven Widerstände etwa wie das Quadrat ihrer Dimensionen zunehmen, während das Dampfvolumen und mithin die Kraft der Maschinen, wie der Cubus dieser Größen zunimmt. Man sieht also, daß es vortheilhafter sein wird, große Maschinen anzuwenden, als kleine. Nach dieser Bemerkung, welche mit den Resultaten der Praxis genau übereinstimmt, muß man dem Correctionscoefficienten der obigen Formel die folgenden Werthe geben:

Leistung der Maschinen in Pferdekräften von $75^{k \cdot m}$.	Bei sehr guter Unterhaltung.	Bei gewöhnlicher Unterhaltung.
4 bis 8	0,50	0,42
10 „ 20	0,56	0,47
30 „ 50	0,60	0,54
60 „ 100	0,65	0,60

Anwendung auf die Mitteldruckmaschinen nach dem Systeme von Woolf.

§. 183. Bei den Maschinen nach dem Systeme von Woolf, wo der Dampf im Kessel eine **mittlere** Spannung von $3\frac{1}{2}$ Atmosphären hat und sich bis zu dem vierten oder fünften Theile dieser Kraft expandirt, hat man:

$$p = 3^{atm.},5 = 3^{kil.},615,\ p_1 = \frac{3,5}{4,5} = \tfrac{7}{9}^{atm.} = 0^{kil.},803 \text{ im Mittel,}$$

$$p' = 0^{kil.},072,\ t = 140^{\circ},6,\ t = 40^{\circ}.$$

Vermittelst dieser Data gibt die Formel:

$$90077850 \left(\frac{1 + 0,00375\,t}{550 + t - t'}\right)\left(1 + log.\ \frac{p}{p_1} - \frac{p'}{p_1}\right)^{k \cdot m}$$

für die theoretische Quantität der Arbeit, welche einem Kilogramm Kohlen entspricht:

$$508827^{k \cdot m}.$$

Correctionscoefficient der Formel in §. 176 für die Mitteldruckmaschinen mit Expansion und Condensation.

§. 184. Im Handelsverkehr garantiren die Fabrikanten der Dampfmaschinen nach diesem Systeme für die Consumtion von $2^k,5$ guter Steinkohlen in der Stunde eine Pferdekraft von $75^{k \cdot m}$, also einen Nutzeffect von:

$$\frac{75^{k \cdot m} \times 3600}{2,5} = 108000^{k \cdot m} \text{ für ein Kilogr. verbrannter Kohlen.}$$

Hieraus ersieht man, daß die besten und in vollkommen gutem Unterhaltungszustande befindlichen Maschinen dieser Art nur

$$\frac{108000}{508827} = 0{,}212 \text{ des theoretischen Effectes}$$

verwirklichen. Es ist sehr selten, daß man auch nur das letzte Resultat erhält, und man hält diese Maschinen immer noch für sehr vortheilhaft, wenn sie nicht mehr als 3 Kil. Kohlen für die Pferdekraft in der Stunde consumiren, was auf einen Nutzeffect von

$$9000^{k \cdot m} \text{ für ein Kilogramm verbrannter Kohlen}$$

hinausläuft und ein Verhältniß zu dem theoretischen Effecte von

$$\frac{9000}{508827} = 0{,}176$$

ergibt.

Die Versuche, welche im Jahre 1828 mit der Prony'schen Bremse an der Dampfmaschine der Gießerei zu Douay angestellt sind, haben gezeigt, daß diese Maschine für jede Pferdekraft $3^k{,}05$ guter Steinkohlen in der Stunde consumirte.

Einige Expansionsmaschinen mit drei Cylindern, welche von Aitken und Steel construirt und dazu bestimmt sind, englische Mahlmühlen zu treiben, und bei denen man für ein jedes Paar von Mühlsteinen 4 Pferdekräfte rechnet, haben ergeben:

die eine, von 20 Pferdekräften, eine Consumtion von		$3^k{,}40$,
die andere, von 24 Pferdekräften „	„ „	$2{,}86$
	im Mittel .	$3^k{,}13$ Kohlen

für jede Pferdekraft in der Stunde.

Coefficient für die Formel, welche die Leistung der Maschinen des Woolf'schen Systemes in Pferdekräften angibt.

§. 185. Die Dampfkessel der Mitteldruckmaschinen bieten zwar der Flamme des Feuerheerdes bei einem geringeren Rauminhalte eine größere Oberfläche dar, erzeugen jedoch wenig mehr Dampf, als die gewöhnlichen Dampfkessel von Watt. Nimmt man daher an, daß auch hier der Feuerheerd die Hälfte der von dem Brennmateriale entwickelten Wärme verliert, und setzt $N = 3525$, anstatt $= 7050$ Wärmegrade; so reducirt sich der theoretische Nutzeffect auf die Hälfte oder auf:

$$254413^{k \cdot m} \text{ für ein Kilogramm Steinkohlen,}$$

und das Verhältniß des wirklichen Nutzeffectes zu dem theoretischen wird im Allgemeinen zwischen den Grenzen:

$$\frac{108000}{254413} = 0{,}424 \text{ und } \frac{90000}{254413} = 0{,}352$$

liegen.

Diese Zahlen finden Anwendung auf Maschinen von 10 bis 20 Pferdekräften, je nachdem sie sich in einem guten, oder in einem gewöhnlichen Unterhaltungszustande befinden.

Das vorstehende Verhältniß des Nutzeffectes des wirklich erzeugten Dampfes zu der von ihm hervorgebrachten theoretischen Quantität Arbeit ist der Coefficient, welcher auf die Formel:

$$\frac{n}{60} \cdot \frac{10000\,pv}{75}\left(1 + log.\,\frac{p}{p_1} - \frac{p'}{p_1}\right)^{k \cdot m},$$

die in Pferdekräften von $75^{k \cdot m}$ die Kraft der Maschinen mit Expansion und Condensation ausdrückt, angewendet werden muß. Die darin vorkommenden Größen sind leicht zu ermitteln, wenn die Maschine in Thätigkeit ist, und man darf nicht vergessen, daß der $log.\,\frac{p}{p_1}$ ein neper'scher ist, welchen man nach §. 15 und 18 des sechsten Abschnittes erhält.

Man kann hier übrigens hinsichtlich des Einflusses der Dimensionen der Maschine auf den Werth des Correctionscoefficienten, in Uebereinstimmung mit der Erfahrung, dieselbe Bemerkung machen, wie bei den Niederdruckmaschinen, und diesem Coefficienten die folgenden Werthe beilegen:

Leistung der Maschinen in Pferdekräften von $75^{k \cdot m}$.	Bei sehr guter Unterhaltung.	Bei gewöhnlicher Unterhaltung.	Bemerkungen.
4 bis 8	0,33	0,30	
10 „ 20	0,42	0,35	
20 „ 40	0,50	0,42	nach den Versuchen von Prony.
60 „ 100	0,60	0,55	nach den Berichten über die Bergwerke von Cornwall.

Bemerkungen über die Leistungen der Dampfmaschinen in der Grafschaft Cornwall.

§. 186. Die Engländer haben in den Bergwerken der Grafschaft Cornwall, wo sie eine ungeheure Anzahl von Dampfmaschinen anwenden, den Gebrauch eingeführt, über die wirkliche Leistung ihrer Maschinen monatliche Berichte zu erstatten. Dieser Gebrauch hat an und für sich manches Gute, indessen sind die Erstatter durch die Rivalität der Erbauer und der Besitzer der Maschinen verleitet, die wirklich erhaltenen Resultate zu übertreiben, so daß man den Berichten nicht eher ein unbedingtes Zutrauen schenken kann, als damit die Data verbunden werden, welche eine Bestätigung derselben möglich machen. Denn nach den im Jahre 1827 und 1828 veröffentlichten Berichten müßten die Niederdruckmaschinen nach dem Watt'schen Systeme von 80 bis 100 Pferdekräften einen Nutzeffect von

$110000^{k \cdot m}$ für ein Kilogramm verbrannter Steinkohlen

geliefert haben, und da man gesehen hat, daß der theoretische Nutzeffect dieser Maschinen

$193026^{k \cdot m}$ für ein Kilogramm Steinkohlen beträgt; so folgt, daß das Verhältniß des practischen Effectes zu dem theoretischen

$$\frac{110000}{193026} = 0{,}569, \text{ statt } 0{,}279, \text{ welches gewöhnlich stattfindet,}$$

gewesen sein würde, und da es mit den besten Watt'schen Dampfkesseln nicht möglich ist, in dem Feuerraum mehr als die Hälfte der entwickelten Wärme nutzbar zu machen, wodurch sich der theoretische Effect des wirklich erzeugten Dampfes auf

$$96513^{k \cdot m} \text{ für ein Kilogramm Steinkohlen}$$

reducirt; so würde ferner folgen, daß der practische Effect größer wäre, als der theoretische. Es leuchtet also ein, daß die Vermehrung des Effectes der Niederdruckmaschinen von Cornwall durch wesentliche Veränderungen, und besonders durch die Anwendung des Dampfes von 1,5 oder 2 Atmosphären Spannkraft, herbeigeführt wird.

Was die in jenen Bergwerken angewandten Mitteldruckmaschinen betrifft, so bieten die Berichte eine nicht so bedeutende Vergrößerung dar, indem der Nutzeffect für die Maschinen von 60 bis 100 Pferdekräften auf

$$160000^{k \cdot m} \text{ für ein Kilogramm Steinkohlen}$$

angegeben wird. Hierdurch steigert sich das Verhältniß des practischen Nutzeffectes zu dem theoretischen auf 0,210 bis auf 0,315, eine Vermehrung, welche auf den großen Dimensionen der Maschinen und hauptsächlich in der sorgfältigen Unterhaltung derselben beruhet. Man bemerkt übrigens, daß es nicht möglich gewesen ist, mit diesen Maschinen, wobei die Expansion bis zur äußersten Grenze der Zweckmäßigkeit getrieben ist, Effecte zu erreichen, welche eine gewisse Grenze übersteigen, und daß man durch die Anwendung des Dampfes von sehr bedeutender Spannung wenig Vortheil erzielt haben würde. Demnach kann man in Betreff dieser Maschinen den englischen Berichten Zutrauen schenken und für die Maschinen von 60 bis 100 Pferdekräften den obigen Coefficienten 0,60 annehmen.

Anwendung auf die Hochdruckmaschinen mit Expansion und ohne Condensation.

§. 187. **Oliver Evans** zu Philadelphia und **Trevitick** in England scheinen zu gleicher Zeit die Idee der Anwendung des Dampfes mit hohen Spannungen, mit Expansion und ohne Condensation gefaßt zu haben. Der erstere construirte in Philadelphia eine Maschine zur Hebung des in der Stadt zu vertheilenden Wassers. In seinem Systeme hat der Dampf eine Spannung von 6 bis 10 Atmosphären und nachdem der Kolben, auf welchen derselbe wirkt, den dritten Theil seines Laufes zurückgelegt hat, wird die Communication mit dem Dampfkessel unterbrochen, der Dampf wirkt vermöge seiner Expansion bis zu $\frac{1}{3}$ der ursprünglichen Spannung und entweicht alsdann in die Luft. Wendet man auf dieses System die allgemeine Formel an, indem man

$$p = 8^{atm.} = 8^k{,}264, \quad p_1 = \frac{p}{3} = 2^k{,}421, \quad p' = 1^k{,}033,$$

$$t = 172^\circ{,}1, \quad t' = 100^\circ$$

setzt; so findet man für die theoretische Quantität Arbeit, welche der Verbrennung von 1 Kil. guter Steinkohlen entspricht:

$$346403^{k \cdot m}.$$

Die Maschine zu Philadelphia gibt nur

$55000^{k \cdot m}$ für ein Kilogramm Steinkohlen,

oder sehr wenig mehr, als die guten Maschinen von Watt, welche einen Nutzeffect von $54000^{k \cdot m}$ liefern.

Das Verhältniß des practischen Nutzeffectes zum theoretischen ist:

$$\frac{55000}{346403} = 0{,}158.$$

Dieser sehr bedeutende Verlust wird durch die Entweichung des Dampfes, durch die Reibungen und durch die Wärmeverluste am Feuerheerde, welcher nur 0,5 der durch Verbrennung erzeugten Wärme verwirklichen kann, herbeigeführt. Nimmt man dieses letztere Verhältniß an, so folgt, daß die Maschine

$$\frac{0{,}158}{0{,}5} = 0{,}32$$

des theoretischen Effectes, welcher dem wirklich erzeugten Dampfe entspricht, nutzbar macht, und daß man mithin auf die Formel:

$$\frac{n}{60} \cdot \frac{10000\,pv}{75}\left(1 + log.\frac{p}{p_1} - \frac{p'}{p_1}\right)^{k \cdot m}$$

den practischen Coefficienten 0,32 anwenden muß, um die wirkliche Stärke der Maschine in Pferdekräften zu bestimmen.

Der geringe Vortheil, welchen dieses System vor den Niederdruckmaschinen darbietet, die Gefahren und Unfälle, welche es leicht herbeiführt, haben seine Anwendung auf die Dampfschifffahrt und auf die Locomotive der Eisenbahnen eingeschränkt, weil unter diesen Umständen der geringe Raum und die Leichtigkeit der Maschine Bedingungen von großer Wichtigkeit sind.

Hochdruckmaschinen ohne Expansion und ohne Condensation.

§. 188. Es ist im §. 178 gezeigt, daß die Anwendung des Dampfes ohne Expansion und ohne Condensation theoretisch keinen Vortheil gewährt, und um so mehr wird dieses in der Praxis der Fall sein, und wirklich haben auch alle Systeme dieser Art, welche man versucht hat, keinen günstigen Erfolg geliefert.

Gewöhnliche Leistung der in den Bergwerken angewandten Wasserhebemaschinen.

§. 189. Fast alle practischen Resultate, welche wir im Vorhergehenden angeführt haben, beziehen sich auf Maschinen, welche Rotationsbewegungen erzeugen, mit guten Steinkohlen geheizt und sorgfältig unterhalten werden. In den Bergwerken, wo die Maschinen zur Hebung des Wassers aus großen Tiefen dienen und wo sie von ungeschickten Arbeitern geführt werden, sind ihre Leistungen viel geringer. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Ergebnisse der Beobachtungen in den

Bergwerken von Anzin, wo mehr als 40 Maschinen von verschiedenen Arten vorkommen, und an den alten Maschinen von Chaillot und Gros-Caillou.

System der Maschine.	Name des Erbauers.	Angebliche Kraft nach Pferdekräften.	Nutzeffect für 1 Kilogramm verbrannter Kohlen.	Quantität consumirter Kohlen für eine Pferdekraft in der Stunde.	Mittlere Spannung des Dampfes.	Bemerkungen.
Newcomen	—	44	21000 k.m	13,k	1,15	Mittleres Resultat von vier Schöpfmaschinen zu Anzin.
Watt einfach wirkend	Const. Perier	80	38900	6,94	1,25	Pumpe von Chaillot.
dito	dito	24	37715	7,10	1,15	Pumpe von Gros-Caillou.
Watt doppelt wirkend	Watt u. Boulton	70	36775	7,30	1,25	Mittleres Resultat von acht Schöpfmaschinen zu Anzin.

Man bemerkt, daß bei allen vorhergehenden Bestimmungen auf dasjenige Brennmaterial keine Rücksicht genommen ist, welches erforderlich ist, um die Maschine in Gang zu setzen. Diese Consumtion wiederholt sich nur bei jedem neuen Beginne der Arbeit und ist in dem Kaufcontracte nicht mit enthalten. Nach der Beobachtung mehrerer Maschinen kann man annehmen, daß folgende Quantitäten Steinkohlen erforderlich sind, um dieselben in Bewegung zu setzen:

bei den Mitteldruckmaschinen des Watt'schen Systemes 6 Kilogr. für jede Pferdekraft;

bei den Mitteldruckmaschinen des Woolf'schen Systemes 7 Kilogr. für jede Pferdekraft.

Wassermenge, welche zur Speisung der Dampfmaschinen erforderlich ist.

§. 190. Ein anderer wichtiger Gegenstand der Betrachtung, der in einigen Localitäten sogar ein Beweggrund zur Annahme oder Verwerfung eines Systemes von Dampfmaschinen sein kann, ist die Wasserquantität, welche zur Speisung der Maschine, sowohl zur Dampfbildung, wie zur Condensation erforderlich ist, und da die Speisung des Dampfkessels fast immer durch das Condensationswasser geschieht, so genügt es offenbar, das erforderliche Volumen des letzteren zu berechnen.

Niederdruckmaschinen des Watt'schen Systemes.

§. 191. Nimmt man an, daß die Niederdruckmaschinen 0,5 des theoretischen Effectes verwirklichen, so ist die Formel für den practischen Effect eines Dampfvolumens v nach §. 173 und 180:

$$0{,}5 \times 10000\, pv \left(1 - \frac{p'}{p}\right)^{k\,.\,m}.$$

Wird dieses Volumen v in einer Secunde erzeugt, und bezeichnet man mit F die Anzahl der Pferdekräfte der Maschine; so hat man:

$$0{,}5 \times \frac{10000\, pv}{75} \left(1 - \frac{p'}{p}\right) = F.$$

Setzt man darin, wie in §. 180, $p = 1^k{,}291$, $p' = 0^k{,}072$, so findet man, daß das in einer Secunde zu erzeugende Dampfvolumen für jede Pferdekraft gleich:

$$v = 0^{m.c}{,}0123$$

ist. Ferner gibt die Formel in §. 166, wenn man darin $t = 107^0{,}3$ und $p = 1^k{,}291$ setzt:

$$\Pi = \frac{0{,}7827}{1 + 0{,}00375\, t}\, p = 0^k{,}72,$$

und das Gewicht des für jede Pferdekraft in der Secunde zu verbrauchenden Dampfes ist hiernach:

$$\varpi = \Pi v = 0{,}0123 \times 0{,}72 = 0^k{,}00886$$

oder $31^k{,}89$ für jede Pferdekraft in der Stunde. Dieses Resultat stimmt mit der Erfahrung überein, daß für jede Pferdekraft 5 bis 6 Kilogr. Steinkohlen in der Stunde verbrannt werden, so daß etwa 6 Kilogr. Dampf auf 1 Kilogr. Kohlen kommen.

Das Gewicht des Wassers, welches zur Condensation dieses Dampfes nöthig ist, wird durch die Formel in §. 172 gegeben, wenn man darin:

$$t = 107^\circ,3,\ t' = 40^\circ,\ t_1 = 15^\circ \text{ und } \tilde{\omega} = 0^k,00886$$

setzt, und ist:

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\tilde{\omega}\,(550 + t - t')}{t' - t_1} = 24,69 + 0^k,00886 = 0^k,2187$$

für die Pferdekraft in der Secunde. Dieses Resultat läuft übrigens auf eine Wassermenge von

$$0^{m \cdot c},787 \text{ für die Pferdekraft in der Stunde}$$

hinaus.

Anwendung auf die Woolf'schen Maschinen.

§. 192. Stellt man eine ähnliche Rechnung für die Maschinen des Woolf'schen Systemes an, so erhält man vermittelst der gegebenen Größen $p = 3^k,615$, $p_1 = 0^k,803$, $p' = 0^k,072$, $t = 140^\circ,6$, $t' = 40^\circ$:

$$v = 0^{m \cdot c},00171 \text{ für die Pferdekraft in der Secunde.}$$

Da die Dichtigkeit dieses Dampfes

$$\Pi = 1^k,850$$

ist, so ist das in der Secunde für jede Pferdekraft einzuführende Gewicht desselben:

$$\tilde{\omega} = \Pi v = 0^k,00316 \text{ oder}$$

$$11^k,38 \text{ für die Pferdekraft in der Stunde.}$$

Die Quantität des zur Condensation erforderlichen Injectionswassers ist demnach, wenn man:

$$t = 140^\circ,6,\ t' = 40^\circ,\ t_1 = 15^\circ$$

setzt:

$$\tilde{\omega}_1 = 26,02 \times 0^k,00316 = 0^k,082 \text{ für die Pferdekraft in der Secunde,}$$

$$\text{oder } 0^{m \cdot c},295 \text{ für die Pferdekraft in der Stunde.}$$

Die vorhergehenden aus den Formeln abgeleiteten Resultate sind etwas kleiner als die der wirklichen Consumtion der Maschinen, weil dabei keine Rücksicht auf die zufälligen Verluste an Dampf durch die Sicherheitsventile, durch die Spielräume der Kolben und Kolbenstangen und auf die Condensation durch die Wände genommen ist; sie reichen jedoch aus, um zu zeigen, daß in gewissen Fällen der Vorzug des einen Systemes vor dem anderen durch die erforderliche Menge des Injectionswassers bestimmt werden kann. Es können sogar Umstände eintreten, wo keines von beiden zu gebrauchen ist, wie z. B. bei den Locomotiven.

Bemerkungen über die Berechnung der Kraft einer Dampfmaschine.

§. 193. Um die Kraft einer Dampfmaschine zu bestimmen und um dieselbe zu führen, ist es vor allen Dingen erforderlich, die Spannung zu kennen, unter welcher sie arbeitet. Das genaueste Mittel zur

Messung dieser Spannung wäre ein Thermometer, welches in den Kessel gehängt würde, so daß die Kugel vor der Compression durch die elastische Flüssigkeit gesichert wäre, wie dieses z. B. Dulong und Arago gethan haben. Diese letztere Vorsicht ist übrigens nur bei hohen Spannungen unumgänglich nothwendig. Man hat jedoch nur selten Gelegenheit, ein Thermometer anzubringen und muß alsdann zu den Instrumenten seine Zuflucht nehmen, mit welchen die Maschine vermöge polizeilicher Vorschriften versehen sein muß.

Von dem Manometer.

§. 194. Die wichtigste Vorrichtung, welche zur Messung der Spannung des Dampfes dient, ist das Manometer, welches man auf verschiedene Arten construirt. Die einfachste Construction und die, welche man am häufigsten an den Niederdruckmaschinen antrifft, besteht in einer umgebogenen Röhre (Fig. 64), welche auf der einen Seite mit dem Dampfkessel und auf der anderen mit der Luft communicirt, wie dieses in Abschnitt 6, §. 12, beschrieben ist. Eine Quecksilbersäule, welche sich in dem unteren Theile der Röhre befindet, zeigt durch den Höhenunterschied ihrer beiden Endflächen den Ueberschuß des Dampfdruckes über den atmosphärischen Druck an. Weiß man nun, daß ein Cubikmeter Quecksilber 13598 Kilogr. wiegt und bezeichnet mit h die Höhe der Quecksilbersäule, welche den Unterschied des Druckes mißt; so hat man für den Druck p auf den Quadratcentimeter:

$$p = 1^k{,}033 + 1{,}3598\, h.$$

Wenn der Dampf mit einer beträchtlichen Spannung wirken soll, so würde der Höhenunterschied h das ebenso große Vielfache von $0^m{,}76$ sein, als die elastische Kraft des Dampfes Einheiten enthält, wenn sie in Atmosphären angegeben wird. Dieses ist der Grund, warum man statt des eben beschriebenen Manometers gewöhnlich andere anwendet, die weiter unten beschrieben werden sollen; indessen findet man in vielen Fabriken des Oberrheins eine Einrichtung, welche mitgetheilt zu werden verdient und in Folgendem besteht.

Ein gußeiserner Behälter $ABCD$ (Fig. 65) ist bis AB mit Quecksilber gefüllt, eine Röhre E, welche mit dem Kessel communicirt, mündet oberhalb des Niveaus AB und leitet den Dampf in den Behälter. In eine eiserne Barometerröhre OO, welche fast bis auf den Boden des Behälters herabreicht, kann das Quecksilber über dem Niveau AB bis zu einer Höhe steigen, welche den Druck mißt; da man aber diese Höhe nicht direct beobachten kann, so läßt man auf dem Quecksilber der Röhre OO einen Körper G von Eisen schwimmen, welcher an einem Eisendrahte aufgehängt ist; der Drath geht über eine Rolle F und wird an seinem andern Ende durch einen Indicator H gespannt, welcher um ebenso viel herabsinkt, als der Schwimmer steigt, indem er eine Scale durchläuft, deren Theilungspuncte den Druck angeben. Das obere Ende der Röhre OO mündet in einen verdeckten Behälter, welcher dazu bestimmt ist, das Quecksilber in dem Falle aufzunehmen, wo der Druck des Dampfes zufällig so stark würde, daß er dasselbe ganz aus der Röhre triebe, und vermöge einer besondern Einrichtung kann das Quecksilber alsdann wieder in den unteren Behälter zurück-treten. Man bedient sich dieser Manometer bei Maschinen, worin der Druck bis auf vier und fünf Atmosphären steigen kann, und man sieht, daß dieselben nur einer geringen Correction hinsichtlich der Senkung des Niveaus *AB* bedürfen, welche übrigens wegen Ausdehnung des Behälters sehr unbedeutend ist.

Gewöhnliches Manometer der Dampfmaschinen.

§. 195. Die vorstehende Einrichtung ist nicht allgemein angenommen und die Maschinenbauer wenden gewöhnlich den folgenden Apparat an, der sich auf das Mariottische Gesetz über die Zusammendrückbarkeit der Gase gründet. Ein mit Quecksilber angefüllter Behälter *abcd* (Fig. 66) ist durch die Röhre *e*, welche oberhalb *ab* ausmündet, mit dem Dampfkessel in Communication gesetzt. Eine bei *g* verschlossene Glasröhre *fg* taucht bis nahe auf den Boden des Behälters in das Quecksilber; dieselbe enthält gewöhnlich atmosphärische Luft, welche mit Hülfe von Chlorcalcium sorgfältig von aller Feuchtigkeit befreit und deren Spannkraft im Augenblicke der Construction gleich dem Drucke einer Quecksilbersäule von $0^m,76$ Höhe oder gleich $1^k,033$ sein muß, so daß, wenn die Maschine nicht arbeitet und der Dampfkessel mit der atmosphärischen Luft communicirt, das Quecksilber in der Röhre eine Höhe *ab* hat, welche den Nullpunct des Instrumentes bildet und einem Drucke gleich dem der Atmosphäre entspricht. Ist nun die Röhre gut calibrirt, so sieht man, daß, wenn der Dampf das Quecksilber auf eine Höhe h über das als constant angenommene Niveau *ab* erhebt, die Spannkraft des Dampfes durch die Höhe h der Quecksilbersäule, welche einem Drucke von

$$1^k,3598 \times h$$

entspricht, plus der elastischen Kraft der Luft, welche in der Röhre enthalten ist und darin nur noch die Höhe h' einnimmt, gemessen wird. Um diese letztere Spannung zu bestimmen, muß man bemerken, daß das Manometer in der Regel bei einer ziemlich niedrigen Temperatur graduirt wird, damit sie, wenn die Luft durch Erhöhung der Temperatur eine größere Elasticität erhält, als sie bei 10° besaß, die Erhebung des Quecksilbers zu vermindern strebt. Zur richtigen Schätzung der Angaben des Instrumentes ist es daher nothwendig, auf die Temperatur Rücksicht zu nehmen, welche bei der Beobachtung stattfindet und welche gewöhnlich die der Maschinenkammer oder etwa gleich 40° ist.

Hiernach sei:

x die gesuchte Spannkraft der auf die Höhe h' reducirten Luftsäule in der Röhre,
p' der Druck, bei welchem das Instrument graduirt ist,
t' die Temperatur bei der Graduirung,
t die Temperatur der Maschinenkammer.

Zuvörderst bemerkt man, daß, wenn die Röhre genau calibrirt ist, die eingenommenen Volumina den Höhen $h + h'$ und h' proportional sind, und daß man nach den Gesetzen von Mariotte und Gay-Lussac (§. 163) hat:

$$h' = (h + h') \frac{1 + 0,00375\, t'}{1 + 0,00375\, t} \cdot \frac{p'}{x}$$

hat, woraus sich leicht die Spannkraft x der Luft berechnen läßt, welche in der Röhre die Höhe h' einnimmt. Hiernach findet man für den Druck des Dampfes im Kessel:

$$p = x + 1^k{,}3598\,h.$$

Im Vorhergehenden ist die sehr geringe Senkung des Niveaus ab unberücksichtigt gelassen; dasselbe darf jedoch nicht mit der Spannung des Wasserdampfes geschehen, welcher nach der Aufstellung des Instrumentes in die Röhre gedrungen sein kann, was sich sehr häufig ereignet. Um diese Spannung mit in Rechnung zu ziehen, nimmt man an, daß die Temperatur der Röhre und des Wassers, welches darin enthalten ist, gleich der der Maschinenkammer oder etwa gleich 40° sei, und da man weiß, daß der Dampf bei dieser Temperatur eine Spannung von $0^k{,}027$ besitzt, so addirt man diese Größe zu dem gefundenen Werthe von x. Befände sich endlich über dem Quecksilberspiegel in der Röhre flüssiges Wasser von einer meßbaren Höhe; so müßte man das Gewicht dieser Wassersäule zu dem der Quecksilbersäule h hinzuaddiren.

Alle diese Details zeigen, wie nothwendig es ist, die Manometer der Maschinen mit Sorgfalt zu prüfen, um die Fehler berichtigen zu können, mit welchen ihre Angaben so leicht behaftet sind.

Anwendung der Sicherheitsventile zur Messung des Dampfdruckes.

§. 196. In dem Falle, wo das Manometer einer Maschine in Unordnung gerathen, oder wo die Maschine, den Verordnungen zuwider, mit einem solchen gar nicht versehen wäre, kann man einen Näherungswerth des Druckes noch mit Hülfe der Sicherheitsventile erhalten. Dieses sind zwei Oeffnungen, welche vorschriftsmäßig in jedem Kessel angebracht sein müssen, um den Dampf, sobald er eine höhere Spannung erreicht, als zu dem gewöhnlichen Dienste der Maschine erforderlich ist, entweichen zu lassen. Auf eine jede dieser Oeffnungen ist ein kurzes Röhrenstück gesetzt und mit einem Ventile mn, weches genau in die Oeffnung paßt, verschlossen (Fig. 67). Ein um den Punct a beweglicher Hebel ab drückt vermittelst einer abgerundeten Schärfe c auf die Mitte des Ventiles, und ein Gewicht q, welches man nach Belieben von der Axe a entfernen kann, dient zur Regulirung der Spannung, die der Dampf haben soll, ehe er entweicht. Um zu verhindern, daß dieser Druck die für die Maschine bestimmten Grenzen überschreite, schreiben die Verordnungen vor, daß das eine der beiden Ventile sich in einem verschlossenen Gehäuse befinden solle, zu welchem der Eigenthümer des Werkes den Schlüssel aufbewahrt, das andere bleibt der Disposition des Heizers überlassen und ein jedes von beiden muß allein zur Dampfentlassung hinreichend sein.

Um mit Hülfe dieses Apparates den Druck im Dampfkessel näherungsweise zu messen, rückt man das Gewicht q so lange vor oder zurück, bis das Ventil auf dem Puncte ist, sich zu öffnen, was man an einer schwachen Dampfentweichung erkennt; man hebt den Hebel mit der Hand ein wenig in die Höhe, um die Adhäsion der Flächen aufzuheben, welche sich durch lange Berührung einstellt, und mißt alsdann, wenn das Ventil eben noch im Gleichgewichte ist, den Abstand l der

Verticale des Punctes c und den Abstand L des Gewichtes q von der Axe a. Ist nun

o die innere Fläche des Ventils, gegen welche der Dampf drückt,
p die gesuchte Spannung,
ϱ der Halbmesser des Zapfens an der Axe a,
f das Verhältniß der Reibung zum Drucke für die Axe und ihre Lage und nimmt man an, daß in q das Gewicht des Hebels selbst in Beziehung auf den Hebelarm L mit enthalten sei; so hat man offenbar für das Gleichgewicht die Relation:

$$opl = qL + f(op - q)\varrho,$$

woraus sich ergibt:

$$p = \frac{q(L - f\varrho)}{o(l - f\varrho)}.$$

Bei diesen Beobachtungen muß man darauf achten, daß man den Punct nicht überschreitet, wo der Dampf zu entweichen und das Ventil zu heben strebt; denn wenn derselbe wirklich austräte, so würde er auf eine größere Fläche, als die der Oeffnung wirken, und es würden Erscheinungen stattfinden, welche leicht einen Fehler in die Resultate führen könnten. Man sieht übrigens, daß dieses Mittel nur in Ermangelung irgend eines anderen genaueren angewandt werden muß.

Bestimmung der Spannung der Expansion und der des Condensators.

§. 197. Was die Spannungen $p_{,}$ und p' betrifft, so ergibt sich die erste aus dem Verhältnisse des Volumens, welches der Dampf bei seinem Eintritte in die Maschine unter dem Drucke p einnimmt, zu dem, welches er nach der Expansion einnimmt, und die zweite aus der Beobachtung der Temperatur des Condensationswassers vermittelst der Tabelle von Dulong und Arago (§. 167), was zwar nicht ganz genau ist, aber wegen der Geringfügigkeit dieses Druckes auf das Resultat keinen merklichen Einfluß haben kann.

Von den Dampfkesseln.

§. 198. Man hat im Vorhergehenden gesehen, wie groß die Wärmeverluste an den Feuerheerden sind, und daß man denselben einen Verlust von der Hälfte des theoretischen Effectes der Verbrennung von einem Kilogramm Kohlen selbst bei den besten Constructionen zuschreiben kann. Es ist daher von Wichtigkeit, die practischen Regeln zu kennen, welche sich hinsichtlich der Dampfbildung aus der Erfahrung ergeben haben.

Dampfkessel von Watt.

§. 199. Es werden bei den Dampfmaschinen zwei Arten von Kesseln angewandt. Die älteren, welche sich für die Niederdruckmaschinen eignen, sind die von Watt construirten; sie haben eine cylindrische Form, welche unten und an den Seiten concav eingebogen ist (Fig. 68). Die Flamme, welche von dem Brennmaterial erzeugt wird, das auf den Rost AB gelegt ist, erhitzt zuerst den unteren Theil des

Kessels, indem sie in einer horizontalen Leitung *c* hinstreicht; am Ende des Dampfkessels wird sie durch eine kleine Scheidewand von Ziegelsteinen in den Seitenzug *D* geleitet, gelangt durch denselben nach dem vorderen Theile des Kessels, erwärmt darauf die andere Seite, indem sie den Zug *D'* durchstreicht, und entweicht in den Schornstein.

Dampfkessel von Woolf.

§. 200. Woolf hat zur Dampferzeugung in seinen Maschinen einen anderen Apparat erfunden, welcher gewöhnlich angewandt wird, wenn man Dampf von mehreren Atmosphären Spannung erhalten will. Der Hauptkessel (Fig. 69) ist ein kreisförmiger Cylinder, der gewöhnlich aus Gußeisen besteht. Zwei andere Cylinder von kleinerem Durchmesser, welche häufig aus Gußeisen, jetzt aber allgemeiner aus Eisenblech und noch besser aus Kupferblech gefertigt werden, liegen unmittelbar über dem Heerde und communiciren durch Röhren mit dem Dampfkessel. Die Flamme circulirt zwischen den Cylindern und dem Kessel, geht alsdann in den Zug *D* über, erhitzt den Vordertheil des Kessels und tritt endlich durch den Zug *D'* in den Schornstein.

Bei den Locomotiven wendet man zuweilen Dampfkessel an, deren Heerd in einer Röhre liegt, welche mitten durch das Wasser geht. Man hoffte, durch diese Einrichtung die Wärmeverluste zu vermeiden und versprach sich große Vortheile davon, welche jedoch nicht realisirt sind. Dieses ist leicht begreiflich, wenn man erwägt, daß die Steinkohlen und jedes andere Brennmaterial, um gut zu brennen, einer hohen Temperatur bedarf, welche ein in die Mitte einer Wassermasse gelegter Feuerraum niemals erreichen kann.

Endlich bedient man sich auch bei den Hochdruckmaschinen einer Art von Dampfkesseln, welche vorzugsweise aus einem Systeme von kleinen Röhren bestehen, die den Feuerraum nach verschiedenen Richtungen durchkreuzen. Diese Einrichtung hat den besonderen Vortheil, daß die Wassermasse vermindert wird, auf welche man durch das Feuer einwirkt, und daß hierdurch der Umfang und das Gewicht des Feuerraumes und aller davon abhängenden Theile möglichst vermindert werden kann.

Man begreift, daß es durchaus nothwendig ist, daß der Wasserspiegel in einem jeden der erwähnten Apparate höher liege, als die Züge, in deren die Flamme circulirt.

In dem oberen Theile der Dampfkessel befindet sich:

1) eine ovale Oeffnung, welche gewöhnlich durch ein Eisenblech verschlossen ist und durch welches man in das Innere der Kessel gelangt, um dieselben zu reinigen;
2) zwei Sicherheitsventile;
3) eine Vorrichtung, welche aus einem Schwimmer besteht, der auf der Oberfläche des Wassers im Kessel schwimmt und durch die Hebung oder Senkung eines Stabes die Höhe des Wasserspiegels angibt;
4) Röhren zur Speisung des Kessels mit Wasser und zur Entlassung des Dampfes, und zuweilen
5) einige schmelzbare Platten.

Wir können uns hier nicht auf die Details dieser verschiedenen Apparate einlassen und beschränken uns darauf, in der Kürze die Verhältnisse der verschiedenen Theile des Dampfkessels und Feuerraumes anzugeben, wie man sie durch eine lange Praxis als bewährt gefunden hat.

Dimensionen der Dampfkessel.

§. 201. Um sehr bedeutende Aenderungen in der Temperatur und Spannung des Dampfes im Kessel zu vermeiden, nimmt man an, daß das Volumen, welches der Dampf im Kessel einnimmt, 12 bis 15 mal so groß sein müsse, als das Volumen Dampf, welches bei jedem Kolbenzuge consumirt wird. Ferner ist die gesammte Capacität des Dampfkessels bei den Watt'schen Maschinen drei- bis viermal so groß, als der Raum, welcher für den Dampf frei gelassen wird, so daß das Wasser $\frac{2}{3}$ davon einnimmt und mithin die in dem Kessel enthaltene Wassermenge das 24 oder 30 fache des bei jeder Oscillation verbrauchten Dampfvolumens beträgt.

Bei den Dampfkesseln der Woolf'schen Maschinen darf der große Cylinder nur halb voll Wasser sein; sein Rauminhalt beträgt also das 24 bis 30 fache des bei einem jeden Kolbenzuge consumirten Dampfvolumens. Was die beiden kleineren Cylinder betrifft, so haben dieselben gewöhnlich einen Durchmesser von $0{,}^m25$ bis $0^m{,}30$.

Nach einer Ordonnanz der französischen Regierung vom 25. Mai 1828 *) über die mit den Dampfkesseln der Hochdruckmaschinen anzustellenden Prüfungen soll zwischen der Metallstärke e der Kessel von Eisen- oder Kupferblech, in Millimetern, dem inneren Durchmesser d, in Centimetern, und der Anzahl n der Atmosphären, welche dem stärksten Drucke entspricht, dem der Kessel ausgesetzt werden darf, die Beziehung:

$$e = 0{,}018\, d\, (n - 1) + 3$$

stattfinden, aus welcher man irgend eine der drei Größen e, d oder n ableiten kann, wenn die beiden anderen gegeben sind. Damit das Metall die Wärme gut mittheile und nicht verbrenne, ist es zweckmäßig, e niemals größer als 14 Millimeter zu machen, wodurch man genöthigt wird, den Kesseln der Hochdruckmaschinen keinen zu großen Durchmesser zu geben, dessen obere Grenze man durch die vorstehende Formel erhält, wenn man darin $e = 14$ Millimeter setzt und für n den Werth einführt, welcher der anzuwendenden Spannung entspricht.

Die nachfolgende Tabelle ist nach der obigen Formel berechnet.

*) Annales des Mines, année 1828.

Durchmesser der Dampfkessel.	Druck des Dampfes in Atmosphären.						
	2	3	4	5	6	7	8
Centim.	Millim.	Millim.	Millim.	Millim.	Millim.	Millim.	Millim.
50	3,90	4,80	5,70	6,60	7,50	8,40	9,30
55	3,99	4,98	5,97	6,96	7,95	8,94	9,93
60	4,08	5,16	6,24	7,32	8,40	9,48	10,56
65	4,17	5,34	6,51	7,68	8,85	10,02	11,19
70	4,26	5,52	6,78	8,04	9,30	10,56	11,82
75	4,35	5,70	7,05	8,40	9,75	11,10	12,45
80	4,44	5,88	7,32	8,76	10,20	11,64	13,08
85	4,53	6,06	7,59	9,12	10,65	12,18	13,71
90	4,62	6,24	7,86	9,48	11,10	12,72	14,34
95	4,71	6,42	8,13	9,84	11,55	13,26	14,97
100	4,80	6,60	8,40	10,20	12,00	13,80	15,60

Heizfläche.

§. 202. Die Quantität Dampf, welche ein Kessel produciren kann, hängt offenbar von der Größe der Fläche ab, welche der Wirkung des Feuers ausgesetzt ist, und welche man die Heizfläche nennt. Nach den Versuchen von Clement scheint es, daß ein gußeiserner Kessel durch jeden Quadratmeter der Heizfläche ungefähr 20 bis 25000 Wärmegrade (Calorien) in der Stunde hindurchläßt; diese Fläche erzeugt also in der Stunde $\frac{20000}{650}$ bis $\frac{25000}{650}$ oder 30 bis 38 Kilogr. Dampf. Bei den Watt'schen Dampfkesseln rechnet man wenig mehr als 30 und bei den Woolf'schen 36 Kilogramm Dampf auf den Quadratmeter der Heizfläche in der Stunde. Kennt man also die zu erzeugende Quantität Dampf, so läßt sich die Größe der Heizfläche leicht bestimmen.

Dimensionen der Roste.

§. 203. Nach Clement und Tredgold darf die auf dem Roste ausgebreitete Kohlenschicht keine größere Stärke als $0^m,05$ bis $0^m,06$ haben. Die Stäbe, welche den Rost bilden, müssen zwischen sich einen Raum gleich dem vierten Theile der ganzen Oberfläche des Rostes lassen, und ihre Entfernung von einander muß etwa $0^m,025$ betragen. Unter diesen Umständen verbrennt man auf den Quadratmeter und in der Stunde 40 Kilogramm Steinkohlen, und es ist daher für jedes Kilogramm zu verbrennender Kohlen eine Rostfläche von $\frac{1}{40} = 0,025$ Quadratmeter erforderlich. Die Roststäbe müssen aus Gußeisen gefertigt werden und im Querschnitte die Form eines Trapezes haben, dessen breiteste Seite nach oben gekehrt ist, um das Durchfallen der Schlacken zu erleichtern. Der Boden des Aschenraumes, in welchen die brennenden Ueberreste der Kohlen fallen, muß stets durch etwas Wasser befeuchtet werden, um die Entzündung zu unterdrücken, die dem Luftzuge nachtheilig sein würde. Der Abstand des Rostes vom

Dampfkessel oder von den Röhren muß $0^m,3$ bis $0^m,4$ betragen. Der Rost nimmt eine Länge von etwa $\frac{1}{3}$ der Länge des Kessels ein.

Wenn man mit Holz heizt, so muß der Rost für 80 bis 90 Kilogramm in der Stunde consumirter Holzmasse 1 Quadratmeter Fläche mit $\frac{1}{4}$ freier Zwischenräume darbieten. In diesem Falle schichtet man die Klüfte über einander auf, um zu verhindern, daß kalte Luft in den Feuerraum dringe, und gibt dem letzteren einen Rauminhalt von 0,015 Cubikmeter für jedes Kilogramm zu verbrennenden Holzes, wobei die Höhe desselben über dem Roste $0^m,5$ bis $0^m,6$ beträgt.

Dimensionen der Züge und des Schornsteines.

§. 204. Die Größe der Querschnitte der Züge und des Schornsteines muß überall dieselbe bleiben, und die unvermeidlichen Biegungen werden abgerundet; man gibt diesem Querschnitte $\frac{1}{5}$ der gesammten Oberfläche des Rostes zur Fläche, wenn der Schornstein 30^m hoch ist und $\frac{1}{4}$, wenn er nur 10 bis 15 Meter hoch ist.

Der Boden des ersten Zuges muß $0^m,1$ über dem Roste liegen, wenn man Steinkohlen brennt.

Es ist unnütz, die Züge um den Dampfkessel zu vermehren; es genügt, wenn die Flamme den Boden erhitzt und ein Mal um den ganzen Umfang circulirt. Auch muß der Schornstein so nahe als möglich an dem Feuerraume liegen. Nach den Beobachtungen der industriellen Gesellschaft zu Mühlhausen scheint es, daß bei den guten Feuerräumen die Temperatur im unteren Theile des Schornsteines 550 bis 600° beträgt, wenn derselbe 30^m hoch ist, und daß, wenn die Temperatur nur 300 bis 350° beträgt, der Luftzug nicht gut vor sich geht.

Wenn die vorbemerkten Verhältnisse beobachtet werden, und das Feuer durch einen guten Heizer und mit guten Steinkohlen unterhalten wird; so erhält man sowohl bei den Dampfkesseln von Watt, wie bei denen von Woolf, 6 bis 7 Kilogramm Dampf auf ein Kilogramm verbrannter Kohlen. Man hat versucht, die Wirkung der Feuerräume durch verschiedene Vorrichtungen zu erhöhen, die dazu bestimmt sind, den Heerd mechanisch nach Maaßgabe der Consumtion mit Brennmaterial zu versorgen, ohne daß es erforderlich ist, den Rost so häufig zu öffnen, wodurch das Innere des Feuerraumes bedeutend abgekühlt wird. Die Vortheile dieser Apparate wurden anfänglich sehr übertrieben herausgestellt; sie scheinen sich jedoch auf Geringfügigkeiten zu reduciren, da man in vielen Maschinenwerken schon wieder davon abgekommen ist.

Vermittelst der im Vorhergehenden mitgetheilten Erfahrungsdata kann man alle Dimensionen der Feuerräume nach der Kraft der Maschine, nach der zu erzeugenden Dampfmenge oder nach der zu consumirenden Quantität Kohlen bestimmen.

Von den belebten Motoren.

Besondere Umstände bei der Wirkung der belebten Motoren.

§. 205. Die belebten Motoren unterscheiden sich von denjenigen, welche nur den Gesetzen der Physik unterworfen sind, darin, daß sie nicht continuirlich wirken können, daß sie nach Verlauf einer gewissen Zeit der Anstrengung ermüden und genöthigt sind, längere oder kürzere Zeit auszuruhen. Die Quantität der Arbeit, welche sie täglich leisten können, ändert sich nach der Art ihrer Verwendung und nach besonderen Umständen; dieselbe ist jedoch ebenso, wie bei den übrigen Motoren, fähig, bei gleicher täglicher Anstrengung ein Maximum zu werden; mit einem Worte, es gibt eine Geschwindigkeit des Angriffspunctes, einen Druck und eine tägliche Arbeitszeit, welche für den Nutzeffect die vortheilhaftesten sind (Abschn. 1, §. 25).

Bezeichnet man allgemein mit V die mittlere Geschwindigkeit des Angriffspunctes des Bewegers in Metern für die Secunde, mit P den mittteren Druck in Kilogrammen, welchen er in der Richtung jener Geschwindigkeit ausübt, und mit T die gesammte Dauer der täglichen Wirkung, welche entweder continuirlich, oder durch beliebige Ruhestunden unterbrochen sein kann, in Secunden; so hat die Quantität der von dem Beweger hervorgebrachten Arbeit offenbar das Product:

$$PVT^{k.m}$$

zum Maaße. Dieses Product, welches man die tägliche Quantität der Arbeit nennt, kann, wie bereits erwähnt ist, bei gleichbleibender täglicher Ermüdung zu einem Maximum gemacht werden, wenn man den Größen P, V und T diejenigen Werthe gibt, welche eine lange Erfahrung als die angemessensten herausgestellt hat. In keinem Falle kann man den Beweger unter einem Drucke und mit einer Geschwindigkeit arbeiten lassen, welche die gleichfalls durch die Erfahrung gegebenen Grenzen überschreiten, und ebenso wenig ist es möglich, die tägliche Arbeitszeit T über eine gewisse Grenze auszudehnen, wie gering auch die in jeder Secunde gelieferte Arbeit PV sein möge. Diese äußerste Grenze scheint 18 Stunden des Tages oder etwa das Doppelte von der gewöhnlichen und vortheilhaftesten Arbeitszeit zu betragen.

Was die Grenze des Druckes anlangt, so variirt dieselbe zwischen dem Dreifachen und Fünffachen des Druckes, welcher dem Maximum des Effectes entspricht, je nach den Umständen und der größeren oder geringeren Dauer dieses Effectes. Ebenso scheint die Grenzgeschwindigkeit im Verhältniß zu der gesammten Dauer der Bewegung zu variiren und zwischen dem Vier- und Zehnfachen der günstigsten Geschwindigkeit zu liegen.

Zwischen diesen äußersten Grenzen haben die belebten Motoren die Fähigkeit, ihren Druck und ihre Geschwindigkeit willkürlich zu ändern, vorausgesetzt, daß, wenn der erste wächst, die letzte abnimmt, und daß, wenn beide die vortheilhaftesten Werthe überschreiten, die tägliche Arbeitszeit T vermindert wird. Das Product PVT kann unter solchen Umständen niemals sein Maximum erreichen, ohne daß die Ermüdung des Thieres vermehrt und seine Gesundheit gefährdet würde, wenn diese Arbeit mehrere Tage hinter einander wiederholt werden soll. Die Fähigkeit der Thiere, die Quantität der Arbeit *PV* in der Secunde bis zu einem gewissen Puncte zu steigern, hat in der Industrie oft einen sehr großen Werth; man darf dabei jedoch nicht vergessen, daß alsdann die ganze Dauer der Arbeit durch häufige Ruhepuncte unterbrochen werden muß, und daß der tägliche Nutzeffect *PVT* geringer ausfallen wird, als bei einer besser geleiteten Arbeit desselben Bewegers.

Vortheile der continuirlichen Wirkung der belebten Motoren vor der intermittirenden.

§. 206. Einige Schriftsteller, und unter andern Coulomb, sind zwar der Meinung, daß bei gewissen Arten der Arbeit, wie z. B. beim Einrammen von Pfählen, beim Läuten einer Glocke u. s. f. die intermittirende Wirkung besondere Vortheile darbiete und fähig sei, einen täglichen Nutzeffect zu erzeugen, welcher beträchtlicher ist, als wenn der Beweger mit mehr Continuität und unter geringerem Drucke und geringerer Geschwindigkeit arbeitete. Aber obgleich diese Art zu arbeiten oft durch besondere Umstände zu einer Nothwendigkeit wird, so scheint doch auch die Vermehrung der täglichen Arbeit nicht weniger zweifelhaft zu sein. So hat man z. B. Ursache zu glauben, daß die Menschen, welche an einer Ramme arbeiten und einen Druck von 18 Kilogramm ausüben, wobei die Arbeit durch häufige Ruhezeiten unterbrochen wird, einen bedeutend geringeren täglichen Nutzeffect hervorbringen, als diejenigen, welche mit einem Drucke von höchstens 10 Kilogrammen eine Säge führen.

Der Ingenieur Hubert hat in dem Arsenale von Rochefort sehr ausgedehnte Versuche angestellt, aus deren hervorgeht, daß die täglichen Arbeitsquantitäten der Schmiede, welche mit Hämmern von $7^k,06$ Gewicht an 2560 Schläge täglich ausführen, $67000^{k \cdot m}$ betrugen. Aus anderen Beobachtungen von Hubert folgt aber, daß sich die Arbeit merklich vermehrt, wenn sich das Gewicht des Hammers vermindert, und er ist der Meinung, daß sich mit dem Hammer der Nagelschmiede, bei gleicher Ermüdung, der größte tägliche Nutzeffect erzielen läßt. Hierbei ist in der That die Wirkung gleichmäßiger und die Arbeit in der Secunde geringer, und man kann ohne Bedenken annehmen, daß unter den letzten Umständen, wie beim Sägen, die tägliche Arbeit eines Menschen sich auf $160000^{k \cdot m}$ oder auf mehr als das Doppelte der früheren Arbeit steigern kann, ohne daß eine größere Ermüdung die Folge davon wäre.

Erfahrungsresultate über die Wirkungsquantitäten verschiedener belebter Motoren.

§. 207. Diese Resultate der Erfahrung sind in der nachstehenden Tabelle, welche aus Navier's Ausgabe der **Architecture hydraulique de *Bélidor*, pages 394 et suiv.** entlehnt ist, zusammengestellt. Es wird hierbei mit Navier bemerkt, daß sich die Angaben dieser Tabelle auf diejenigen Werthe der Geschwindigkeit, des Druckes und der Arbeitszeit beziehen, welche in jedem besonderen Falle die vortheilhaftesten zu sein scheinen, und daß die Resultate nur als Mittelwerthe anzusehen sind, welche sich je nach dem Alter und der Stärke der Individuen, nach ihrer Nahrung und nach dem Klima um $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ von der wirklichen Leistung entfernen können. Diese Beobachtungen gehören übrigens verschiedenen Schriftstellern und namentlich Coulomb an. Endlich muß noch bemerkt werden, daß man nach dem Vorhergehenden, ohne eine merkliche Verminderung des täglichen Nutzeffectes zu befürchten, die Geschwindigkeit und den Druck etwas variiren lassen kann, wofern nur nicht das Product zu sehr geändert und die tägliche Arbeitszeit danach berichtigt wird.

Tabelle der Arbeitsquantitäten, welche der Mensch und verschiedene Thiere unter verschiedenen Umständen leisten können.

Laufende №.	Art der Arbeit.	Gehobenes Gewicht oder ausgeübter Druck.	Geschwindigkeit in der Secunde.	Quantität der Arbeit in der Secunde.	Dauer der täglichen Arbeitszeit.	Tägliche Quantität der Arbeit.
		Kilog.	Met.r	k. m	Stunde	k. m
	1) Verticale Hebung von Lasten.					
1	Ein Mensch, welcher eine flache Rampe oder eine Treppe hinaufsteigt, wobei seine Arbeit in der Hebung des Gewichtes seines Körpers besteht	65	0,15	9,75	8	280,800
2	Ein Mensch, welcher vermittelst einer Rolle an einem Seile Lasten in die Höhe zieht und nach gehobener Last das Seil leer zurückgehen läßt	18	0,20	3,60	6	77,760
3	Ein Mensch, welcher Lasten mit der Hand hebt	20	0,17	3,40	6	73,440
4	Ein Mensch, welcher auf seinem Rücken Lasten eine flache Rampe oder eine Treppe hinaufträgt und leer zurückkehrt	65	0,04	2,60	6	56,160
5	Ein Mensch, welcher vermittelst einer Handkarre Materialien transportirt, indem er eine Rampe von $\frac{1}{12}$ hinaufsteigt und leer zurückkehrt	60	0,02	1,20	10	43,200
6	Ein Mensch, welcher mit der Schaufel Erde auf eine mittlere Höhe von $1^m,6$ wirft	2,7	0,40	1,08	10	38,880
	2) Wirkung auf Maschinen.					
	Ein Mensch, welcher auf ein Spillrad wirkt,					
1	1) in der Höhe der Axe des Rades	60	0,15	9,00	8	259,200

Laufende Nr.	Art der Arbeit.	Gehobenes Gewicht oder ausgeübter Druck.	Geschwindigkeit in der Secunde.	Quantität der Arbeit in der Secunde.	Dauer der täglichen Arbeitszeit.	Tägliche Quantität der Arbeit.
		Kilog.	Meter	k . m	Stunde	k . m
2	2) gegen den unteren Theil des Rades oder unter einem Winkel von 24°	12	0,70	8,4	8	251,120
3	Ein Mensch, welcher geht und in horizontaler Richtung schiebt oder zieht	12	0,60	7,2	8	207,360
4	Ein Mensch, welcher auf eine Kurbel wirkt	8	0,75	6,0	8	172,800
5	Ein geübter Arbeiter, welcher in verticaler Richtung abwechselnd schiebt und zieht	5	1,1	5,5	8	158,400
6	Ein Pferd, welches vor ein gewöhnliches Fuhrwerk gespannt ist und im Schritte geht	70	0,90	63,0	10	2168,000
7	Ein Pferd, welches an einen Göpel gespannt ist und im Schritte geht	45	0,9	40,5	8	1166,400
8	Ein Pferd, welches an einen Göpel gespannt ist und im Trabe läuft	30	2,0	60,0	4,5	972,400
9	Ein Ochse, welcher an einen Göpel gespannt ist und im Schritte geht	65	0,6	39,0	8	1123,200
10	Ein Maulesel	30	0,9	27,0	8	777,600
11	Ein Esel	14	0,8	11,6	8	334,080

Horizontaler Transport von Lasten.

Bemerkungen über die Maaßeinheit, welche für den horizontalen Transport von Lasten angenommen ist.

§. 208. Geschickte Beobachter, an deren Spitze Coulomb steht, haben auch über diese Art von Arbeit, welche nicht mit der wirklichen mechanischen Arbeit verwechselt werden darf (Abschnitt 1), Versuche angestellt. Die Einheit, welche für den horizontalen Transport angenommen ist, unterscheidet sich von der der mechanischen Arbeit wesentlich, obgleich sie derselben analog ist, indem es sich hier gar nicht um einen in der Richtung des durchlaufenen Weges ausgeübten Druck oder überwundenen Widerstand handelt. Es versteht sich von selbst, daß der horizontale Transport von Seiten des Bewegers die Hervorbringung einer inneren mechanischen Arbeit erfordert, woraus denn auch ein größerer oder geringerer Grad von Ermüdung hervorgeht. Da man hier aber in dem Maaße für den Nutzeffect das eigene Gewicht der Last anstatt des Widerstandes, welchen jene Last der Bewegung entgegensetzt, substituirt, und da dieser Widerstand in jedem Falle sich ändern kann, ohne daß der Nutzeffect geringer wird; so erhellet, daß man mit dem Maaße dieses Nutzeffectes nicht denselben Begriff verbinden darf, wie mit dem der mechanischen Arbeit, welche erforderlich ist, um jenen Nutzeffect hervorzubringen, wie z. B. wenn die Last auf ein Fuhrwerk oder auf ein Fahrzeug gelegt ist, oder wenn sie blos auf der Erde oder auf einem Schlitten fortgezogen werden soll.

Es ist nun leicht einzusehen, daß, wenn man ein und dieselbe Art des Transportes betrachtet, die wirklich hervorgebrachte Quantität Arbeit proportional dem Gewichte der Last und dem durchlaufenen Raume oder dem Producte dieser beiden Größen proportional wachsen muß, und man begreift, wie man für die Maaßeinheit des Nutzeffectes die Gewichtseinheit, transportirt auf die Längeneinheit, annehmen kann. Auch ist hierbei zu bemerken, daß, wenn sich die bei dem Transporte obwaltenden Umstände oder auch nur die Beschaffenheit des Weges, oder die Geschwindigkeit ändern, die mechanische Arbeit oder der Grad der Ermüdung, welchen dieser Transport erfordert, sehr verschieden ausfallen kann, obgleich der Nutzeffect derselbe bleibt.

Bemerken wollen wir noch, daß die in der nachfolgenden Tabelle verzeichneten Transporte auf Wagen, Karren u. s. w. Wege von gewöhnlicher Beschaffenheit voraussetzen und daß sich der Nutzeffect für sehr gut unterhaltene Straßen ebenso vermehren würde, wie er sich für schlechte Straßen vermindert.

§. 209. Tabelle der Nutzeffecte, welche der Mensch und die Thiere durch den Transport von Lasten unter verschiedenen Umständen hervorbringen kann.

Laufende Nr.	Art des Transportes.	Transportirtes Gewicht.	Geschwindigkeit oder Weg in der Secunde.	Nutzeffect in der Secunde, ausgedrückt durch Kilogramme, welche 1 M. weit transportirt sind.	Dauer der täglichen Arbeitszeit.	Täglicher Nutzeffect.
		Kil.	Meter	k . m	Stunde	k . m
1	Ein Mensch, welcher unbelastet auf einem horizontalen Wege geht und nur das Gewicht seines Körpers transportirt . .	65	1,50	79,5	10,0	3510,000
2	Ein Mensch, welcher in einem zweirädrigen Karren Materialien transportirt und leer zurückkehrt	100	0,50	50,0	10,0	1800,000
3	Ein Mensch, welcher in einer Handkarre Materialien transportirt und leer zurückkehrt, um neue Ladungen zu holen	60	0,50	30,0	10,0	1080,000
4	Ein wandernder Mensch, welcher Lasten auf seinem Rücken trägt.	40	0,75	30,0	7,0	756,000

Laufende Nr.	Art des Transportes.	Transportirtes Gewicht.	Geschwindigkeit oder Weg in der Sekunde.	Nutzeffect in der Secunde, ausgedrückt durch Kilogramme, welche 1 M. weit transportirt sind.	Dauer der täglichen Arbeitszeit.	Täglicher Nutzeffect.
		Kil.	Meter	k . m	Stunde	k . m
5	Ein Mensch, welcher Materialien auf seinem Rücken trägt und leer zurückkehrt, um neue Ladungen zu holen . . .	65	0,50	32,5	6,0	702,000
6	Ein Mensch, welcher auf einer Tragbahre Lasten trägt und leer zurückkehrt, um neue Ladungen zu holen	50	0,33	16,5	10,0	594,000
7	Ein Pferd, welches auf einem Karren Lasten transportirt und, fortwährend belastet, im Schritte geht	700	1,10	770,0	10,0	27720,000
8	Ein Pferd, welches vor ein Fuhrwerk gespannt ist und, fortwährend belastet, im Trabe läuft	350	2,20	770,0	4,5	12474,000
9	Ein Pferd, welches auf einem Karren Lasten transportirt und leer zurückkehrt, um neue Ladungen zu holen . . .	700	0,60	420,0	10,0	15120,000
10	Ein Pferd, welches auf seinem Rücken belastet ist und im Schritte geht	120	1,1	132,0	10,0	4752,000
11	Ein Pferd, welches auf seinem Rücken belastet ist und im Trabe läuft	80	2,2	176,0	7,0	4435,000

Von den Apparaten, welche dazu dienen, die Leistung der Motoren und der Maschinen, sowie die Gesetze ihrer Bewegung direct zu bestimmen.

Mannigfaltigkeit der von den Mechanikern vorgeschlagenen Apparate.

§. 210. Schon seit langer Zeit haben die Mechaniker die Nothwendigkeit erkannt, durch directe Mittel die den rotirenden Wellen mitgetheilte Quantität Arbeit zu messen, um die Resultate der Rechnung mit denen der Erfahrung vergleichen und um den Nutzeffect der verschiedenen Operatoren bestimmen und danach die Kraft der Motoren einrichten zu können. Zu diesem Ende sind verschiedene Apparate in Vorschlag gebracht, von denen der älteste das Dynamometer des englischen Maschinisten White zu sein scheint. Ein anderer ist von Walter erfunden, und auch Coriolis hat der société d'encouragement im Jahre 1829 das Modell eines Dynamometers vorgelegt, mit Hülfe dessen die veränderlichen Widerstände der Maschinen gemessen werden können.

Diese und verschiedene andere Dynamometer erfüllen sehr gut den Zweck, zu welchem sie von ihren Erfindern bestimmt sind; sie sind aber zu complicirt, zu schwer zu transportiren und können nicht in kurzer Zeit und mit wenig Kosten hergestellt werden. Diese großen Mängel, welche ihnen allen gemein sind, werden immer ihre Anwendung sehr beschränken und einem anderen Apparate, welcher im Jahre 1821 von Prony angegeben und unter dem Namen der Prony'schen Bremse bekannt ist, den Vorrang verstatten. Der letztere wurde von seinem Erfinder selbst auf die Dampfmaschine von Gros-Caillou angewandt und hat nachher zu vielen Versuchen gedient, wobei es sich immer herausgestellt hat, daß er so befriedigende Resultate lieferte, wie man bei dergleichen Untersuchungen nur erwarten kann. Wir erwähnen hierbei unter anderem der Versuche über das Wasserrad mit gekrümmten Schaufeln im Jahre 1826 von Poncelet, der von Morin im Jahre 1828 über verschiedene Motoren und derjenigen, welche Egen im Jahre 1830 auf Kosten der preußischen Regierung in den Maschinenwerken von Westphalen ausfgeführt hat. Diese letzteren Versuche, welche sich besonders auf die Wasserräder der Schmieden bezogen, haben ihrem Unternehmer Gelegenheit zu mehreren sinnreichen Vervollkommnungen des fraglichen Instrumentes gegeben, welche dasselbe zu dem zweckmäßigsten und bequemsten aller bisher erfundenen Apparate machen.

Beschreibung der Prony'schen Bremse.

§. 211. Die dynamometrische Bremse, wie sie von Prony vorgeschlagen und beschrieben ist, besteht aus einem Hebel *ab* (Fig. 70), an welchem sich ein Backenstück *e* befindet, das auf der rotirenden Welle *c* ruhet, indem der Hebel senkrecht gegen dieselbe gerichtet ist. Ein anderes Verbandstück *a'b'*, welches unter der Welle liegt, ist mit dem ersteren *ab* durch zwei Schraubenbolzen *d,d* verbunden, vermittelst welcher man die Welle zwischen den beiden Backen *e* und *a'b'* nach Belieben einzwängen kann. Durch die Einklemmung der Welle *c* zwischen diese Backen entsteht an ihrem Umfange eine Reibung, welche während der Rotationsbewegung den Hebel *ab* mit herumzunehmen strebt; aber ein Gewicht *P*, welches constant ist, wenn es in einem veränderlichen Abstande von der Axe *c* angebracht werden kann, oder veränderlich, wenn es in eine unverrückbare Schale gelegt werden soll, verhindert die Bewegung des Hebels und hält der Reibung am Umfange der Welle fortwährend das Gleichgewicht, wovon man sich bei dem Experimente versichert, indem man entweder das Gewicht *P*, oder seinen Abstand von der Axe *c* dergestalt verändert, daß der Hebel *ab* immer horizontal bleibt, oder nur wenig um diese Lage oscillirt. Dieser Apparat kann übrigens auch an verticalen Wellen angebracht werden; aber alsdann ist es zweckmäßig, den langen Arm des Hebels, der durch sein Gewicht eine Torsion der ganzen Bremse herbeiführen würde, zu unterstützen und das Gewicht *P* an einem Seile aufzuhängen, welches über eine Rolle geleitet ist und den Hebel in horizontaler Richtung anzieht. In dieser Art ist das Instrument mit Erfolg angewendet worden.

Hat nun die zu untersuchende Maschine die Geschwindigkeit angenommen, welche man erhalten will, so folgt aus dem Principe der Uebertragung der Wirkung, daß die der Welle mitgetheilte Quantität der Arbeit durch das Product aus der an ihrem Umfange stattfindenden Reibung F und dem Wege, welchen dieser Umfang durchläuft, gemessen wird, und daß, wenn n die Anzahl der Umdrehungen in einer Secunde, und r den Halbmesser der Welle bezeichnet, diese Arbeit ausgedrückt wird durch:

$$Fn \cdot 2\pi r.$$

Das am Ende des Hebels ab in dem horizontalen Abstande l von der Axe c aufgehängte Gewicht P, in welchem wir auch die Componente des eigenen Gewichtes des Hebels für denselben Abstand l von der Axe c mitbegreifen, ist aber so beschaffen, daß es der Reibung F fortwährend das Gleichgewicht hält. Mat hat daher:

$$Pl = Fr \text{ und mithin:}$$

$$2\pi rnF = 2\pi lnP.$$

Die der Welle c mitgetheilte Quantität Arbeit hat also auch das Product aus dem Gewichte P und dem Wege, welchen der Aufhängepunct b desselben durchlaufen würde, wenn sich der Hebel mit der Winkelgeschwindigkeit der Welle herumdrehete, zum Maaße.

Hieraus sieht man, daß man weder den Druck der Backen der Bremse gegen die Welle, noch das Verhältniß dieses Druckes zur Reibung F, welche er erzeugt, zu kennen braucht, und daß es hinreicht, ihn so lange durch Anziehen oder Loslassen der Bolzen d, d und durch gleichzeitige Vermehrung oder Verminderung des Gewichtes P zu verändern, bis die Welle die Geschwindigkeit angenommen hat, bei welcher man die Beobachtung anstellen will.

§. 212. Zu dieser sehr einfachen Theorie des Apparates haben wir nur noch einige Details über die Verbesserungen hinzuzufügen, welche von verschiedenen Experimentatoren in Vorschlag gebracht sind. Hachette und mehrere andere Mechaniker haben das Gewicht P durch die Spannung eines Seiles ersetzt, welches an ein festes Dynamometer gehängt ist, dessen Biegung den Druck anzeigt, welcher erforderlich ist, um der Reibung in jedem Augenblicke das Gleichgewicht zu halten. Ferner hat man, um den Hebelarm constant zu erhalten, am Ende von ab einen mit c concentrischen Kreisbogen angebracht; jedoch machen die Oscillationen des Hebels und des Dynamometers die Beobachtung schwierig; wenn man aber in dieser Art von Versuchen einige Fertigkeit erlangt hat, so kann man bei etwas Geschicklichkeit jene Oscillationen bei den Maschinen mit gleichförmiger Bewegung vermindern; bei denjenigen Maschinen aber, wo die Bewegung ihrer Natur nach veränderlich ist, würde es fast unmöglich sein, die verschiedenen Werthe der Spannungen des Seiles genau zu beobachten.

Poncelet hat den Vorschlag gemacht, parallel zu dem Dynamometer eine Drehscheibe anzubringen (Fig. 71), welche durch eine Schnur ohne Ende, die sich in einer Nuth um die Welle schlingt, in Bewegung gesetzt wird; die Scheibe bekommt alsdann durch einen an der Feder befestigten Griffel eine bleibende Spur von den verschiedenen

Werthen der Spannng des Dynamometers. Mit Hülfe dieser sinnreichen Einrichtung wird es leicht, für jeden von der Welle beschriebenen Raum nicht nur den auf den Hebel ausgeübten Druck und mithin auch die Reibung am Umfange der Welle, sondern auch die von der Reibung der Bremse absorbirte Quantität Arbeit zu bestimmen, da die letztere sich offenbar wie die Flächen verhält, welche von den Radienvectoren beschrieben werden, die die Spannungen der Feder auf der Drehscheibe messen.

Diese Verbesserung war in der Praxis noch nicht angewandt, als Morin im Jahre 1830 seine Versuche über die Reibung begann, deren Resultate in einer Abhandlung vom 12. December 1831 der Academie der Wissenschaften zu Paris vorgelegt und am 26. März 1832 von einer aus Poisson, Arago und Navier bestehenden Commission geprüft wurden. Da die Academie die Veröffentlichung dieser Abhandlung für den **recueil des savans Etrangers** bestimmt hat, so wird dieselbe wahrscheinlich bald erscheinen, und wir verweisen darauf hinsichtlich aller einzelnen Vervollkommnungen, welche dem Apparate die vollständige Brauchbarkeit verschafft haben, namentlich wegen der Einrichtung der Drehscheibe, der Feder des Dynamometers, welche aus zwei an den Enden verbundenen Stücken besteht, und des Griffels, welcher zum Einreißen der Spur dient und hier durch einen in Tusch getauchten Pinsel vertreten wird, welchen man dem Papiere der Drehscheibe vermittelst einer Schraube nach Belieben nähern kann.

Die Oertlichkeit gestattet zuweilen die Anbringung des unteren Stückes $a'b'$ (Fig. 70) nicht; in diesem Falle, und oft bloß in der Absicht, die Welle auf eine größere Ausdehnung zu umfassen, vertauscht man dasselbe mit einem Streifen von dünnem Eisenblech, welcher an den Bolzen d,d befestigt wird. Dieser Streifen, welcher einer bedeutenden Spannung widerstehen muß, ist jedoch selten biegsam genug, um sich überall genau an den Umfang der Welle anzuschließen, und Egen schlägt daher vor, denselben aus platten Kettengliedern zusammenzusetzen, welche sich leicht um den Umfang der Welle biegen (Fig. 72).

Dimensionen, welche dem cylindrischen Theile der Welle zu geben sind.

§. 213. Man sieht leicht ein, daß, je größer der Halbmesser des cylindrischen Theiles der Welle ist, auf welchem man die Bremse anbringt, desto geringer der Druck und die Reibung sein werden, wodurch die Versuche sehr erleichtert und zuverlässiger gemacht werden. Bei kleinen Wellen wäre es sogar zuweilen nicht einmal möglich, einen Widerstand zu erhalten, der groß genug wäre, damit die entsprechende Quantität Arbeit der zu messenden gleich würde. Endlich eigenen sich auch die hölzernen Wellen nicht gut zu diesen Versuchen, besonders wenn sie fortwährend von Wasser benetzt werden und bei den eisernen Wellen findet man nicht immer ein Stück, welches bereits abgedrehet ist, oder leicht abgedrehet werden könnte. Aus diesen Gründen ist es zweckmäßig, um die Welle einen eisernen Kranz zu legen, welcher im Voraus wie der von Egen angewandte zubereitet ist und sich vermittelst der Schraubenbolzen c,c (Fig. 72) leicht centriren läßt. Zwischen den Kranz und den Umfang der Welle werden Unterlagen fest eingetrieben, so daß derselbe nicht verdrückt und seine Form verändert werden kann. An dem oberen Arme der Bremse ist ebenfalls eine eiserne Backe befestigt, so daß nur metallische Flächen mit einander in Berührung kommen, deren Reibung regelmäßiger ist und welche der Veränderung nicht so leicht unterworfen sind.

Es ist leicht, die Dimensionen des Kranzes durch die Bedingung zu bestimmen, daß die Reibung an der Welle oder die Spannung der Bolzen einen Werth nicht übersteige, welchen ein oder zwei Menschen mit Hülfe eines Schraubenschlüssels von gegebenen Dimensionen leicht hervorbringen können. Wir beschränken uns hier auf die Bemerkung, daß man auf einem cylindrischen Stücke

von $0^m,16$ Durchmesser, bei einer Geschwindigkeit von 20 bis 30 Umdrehungen in der Minute, leicht eine Kraft von 6 bis 8 Pferdekraft,

von $0^m,30$ bis 0^m40 Durchmesser, bei einer Geschwindigkeit von 15 bis 30 Umdrehungen in der Minute, leicht eine Kraft von 15 bis 25 Pferdekraft,

von $0^m,65$ bis $0^m,80$ Durchmesser, bei einer Geschwindigkeit von 15 bis 30 Umdrehungen in der Minute, leicht eine Kraft von 40 bis 60 Pferdekraft

messen kann.

Da die Reibung fortwährend ein Bestreben äußert, den Hebel der Bremse bei der Umdrehung der Welle mit herumzuführen, so beschränkt man zuweilen die Weite des Ausschlagswinkels durch ein an dem Boden befestigtes Seil. Bei plötzlichen Stößen aber, welche sich hin und wieder trotz aller Vorsichtsmaßregeln ereignen, kann das Seil zerreißen und große Unglücksfälle herbeiführen; deshalb wird es immer sicherer sein, wenn man zu beiden Seiten der Welle unter dem Hebel feste Böcke stellt, welche so hoch sind, daß sie den Hebelarm nur geringe Oscillationen über und unter der Horizontalen verstatten, und welche im äußersten Falle zwar ein Zerreißen der Kette oder der Bolzen veranlassen können, aber doch die Gefahr für die experimentirenden Personen abwenden.

Bemerkungen über den Einfluß der Trägheit.

§. 214. Endlich wird es nicht unnütz sein, zu bemerken, daß man sich, ehe das Gleichgewicht zwischen der Last des Hebels und der bewegenden Kraft als hergestellt betrachtet wird, durch mehrere Beobachtungen davon überzeugen muß, daß die Geschwindigkeit der Welle auch wirklich, wenn auch nicht gleichförmig, so doch periodisch geworden ist, und die Umdrehungen alle in derselben Zeit erfolgen; denn wenn sich die Bewegung während des Versuches verzögerte oder beschleunigte, so würde die Trägheit der Massen eine Quantität Arbeit hervorbringen, welche im ersteren Falle eine zu große und im letzteren eine zu geringe Schätzung derjenigen Arbeitsquantität herbeiführen würde, welche der Welle wirklich mitgetheilt ist.

Apparate zur Messung der Arbeit bei der geradlinigen Bewegung und besonders bei dem Zuge der Thiere.

§. 215. Die im Vorhergehenden beschriebenen Vorrichtungen sind nur auf die Wellen feststehender Maschinen, aber nicht auf Locomotiven und auf Fuhrwerke, welche von Zugthieren bewegt werden, anwendbar. Gewöhnlich bedient man sich in diesem Falle des Regnier'schen Dynamometers mit einer ovalen Feder, welches direct zwischen der Kraft und dem Widerstande angebracht wird, und dessen Gebrauch, trotz der Unsicherheit seiner Angaben und der Veränderungen, welche eine in sich selbst zurückkehrende Feder durch wiederholte Spannungen und Temperaturwechsel erleiden kann, ziemlich allgemein verbreitet ist. Mit diesem Instrumente, welches vermittelst eines Zeigers und eines getheilten Kreises die Zugkräfte in der Richtung der großen oder der kleinen Axe der Feder angibt, hat Regnier selbst einige Versuche über die Kraft der Pferde und den Widerstand der Fuhrwerke angestellt, und auch Rumfort, Boulard und Hachette haben durch ähnliche Mittel die Kraft der Zugthiere an Fuhrwerken und an Drehbahnen (Göpeln) zu messen versucht; aber wegen der Ungleichmäßigkeit der Bewegung und der Wirkung in diesen Fällen begreift man, daß die Beobachtungen mit dem Dynamometer sehr schwierig sein müssen und nur zu groben und oft irrthümlichen Schätzungen führen können, da man sich hier nicht damit begnügen kann, zwischen den größten und kleinsten Angaben des Zeigers arithmetische Mittel zu nehmen, um das wirkliche Maaß der hervorgebrachten Arbeit zu erhalten.

In einer Abhandlung, welche Didion im Jahre 1829 der königlichen Academie zu Metz überreichte, schlug derselbe zur directen Messung der Arbeit der Pferde vor, man solle dieselben vermittelst eines horizontalen Stranges auf eine Welle wirken lassen, an welcher die Prony'sche Bremse angebracht ist. Man sieht jedoch leicht ein, daß man mit diesem Apparate die Bewegung der Pferde nicht lange unterhalten und auch wegen der fremden Widerstände, welche demselben eigen sind und nicht direct bestimmt werden können, keine sehr genauen Resultate erwarten kann. Auch gab die Commission, welche von der Academie mit der Prüfung und Berichterstattung über diesen Apparat beauftragt war, den Mitteln den Vorzug, welche darin bestehen, daß man die Pferde vor ein zweckmäßig belastetes Fuhrwerk spannt und die Zugkraft durch die Angaben eines Dynamometers direct mißt; indessen führte sie in ihrem Berichte weder die Einrichtung des Instrumentes, noch die Art des Experimentirens an.

Mittel, welche von Poncelet in Vorschlag gebracht sind.

1) Für Fuhrwerke.

§. 216. Poncelet, welcher an der Commission Theil nahm, brachte bei dieser Gelegenheit die Anwendung von Federschwengeln wie die vom Genieofficier Delille in den **Bulletins de la société d'encouragement, année 1825, page 279,** beschriebenen, in Vorschlag, mit Hülfe welcher die heftigen Stöße, die bei der gewöhnlichen Art des Anspannens der Pferde nicht zu umgehen sind, vermieden werden. Das eine Ende dieser Federn würde, wie bei dem obigen Apparate, einen Griffel tragen, welcher auf den Drehscheiben, die mit den Vorderrädern in Verbindung gesetzt sind, die Spirallinien einreißt, welche in jedem Augenblicke das Verhältniß der Spannung zu dem durchlaufenen Raume und selbst die von den Pferden mitgetheilten Arbeitsquantitäten angibt. Diese sehr einfache Idee, welche von der Mehrzahl der Commissionsmitglieder nicht gehörig gewürdigt wurde, kann auf verschiedene Arten durch ein System von Rollen oder kleinen verzahnten Rädern in der Praxis verwirklicht und einer unendlichen Menge besonderer Umstände angepaßt werden, wo es sich darum handelt, die Arbeit der Motoren und der Maschinen genau zu ermitteln.

In dem vorliegenden Falle z. B., wo es sich darum handelt, die an einem Fuhrwerke, einem Schlitten oder einem Pfluge anzubringende Quantität Arbeit direct zu bestimmen, wobei die gleichzeitige Anwendung mehrerer Pferde erforderlich ist, deren Wirkung einzeln zu messen einige Schwierigkeiten hat, kann man das gewöhnliche Geschirr durch ein horizontales Stück von einem Strange ersetzen, an dessen vorderem Ende eine passende Zugvorrichtung angebracht ist, auf welche die Pferde wirken und welche sich zur Aufnahme des Dynamometers und der Drehscheibe eignet. Was die Bewegung der letzteren betrifft, so kann dieselbe von den Rädern oder auch von der Wagenaxe, wenn sich diese drehet, durch Rollen mitgetheilt werden. In vielen Fällen wird es jedoch vorzuziehen sein, daß man diese Bewegung von einem Seile erzeugen läßt, welches in gerader Linie längs des Weges gespannt, an den beiden Enden befestigt ist und ein oder zweimal die Kehle einer Rolle umschlingt, welche mit der Drehscheibe an ein und derselben Axe sitzt.

2) Für Drehbahnen (Göpel).

Wenn es sich darum handelt, die dynamische Arbeit eines in einer Drehbahn angespannten Pferdes zu messen, so befestige man den einen Schenkel der dynamometrischen Feder am äußersten Puncte der Deichsel (Fig. 73) und zwar so, daß er sich frei um diesen Punct drehen und dem Zugwinkel folgen kann, bringe die Drehscheibe concentrisch zu demselben Puncte an und befestige an der Axe desselben eine kleine Rolle, welche mit der verticalen Welle der Drehbahn durch eine gut gespannte Schnur ohne Ende verbunden ist, die um eine größere unbewegliche Rolle geht, welche einen Ring um die Welle bildet und auf dem cylindrischen Umfange der letzteren fortgleitet, ohne von der allgemeinen Bewegung afficirt zu werden.

Die Mittel, welche angewandt werden können, um zu verhindern, daß die letztgedachte Rolle von der Welle nicht mit herumgezogen wird, sind zu einfach, als daß wir uns hier dabei aufzuhalten brauchten. Das Verfahren, durch welches man das Verhältniß der Zugkräfte zu dem wirklich beschriebenen Wege oder die der Welle mitgetheilten Arbeitsquantitäten findet, ist ebenso evident, und man sieht allgemein, daß bei einer Arbeit, wo Kraft und Geschwindigkeit periodische Werthe haben, der Mittelwerth der ersteren (Abschnitt 1, §. 9) durch die größte Anzahl der Wendepuncte der auf der Drehscheibe eingerissenen Linie gegeben wird, indem diese Linie alsdann um denjenigen Kreis undulirt, welcher dem mittleren Drucke entspricht. Kennt man nun den mittleren Druck, so braucht man denselben nur mit dem Wege, welchen der Angriffspunct der Kraft in der Zeiteinheit beschreibt, oder mit der mittleren Geschwindigkeit des Angriffspunctes zu multipliciren, um die entsprechende Quantität Arbeit zu erhalten, welche immer nach der Richtung des gedachten Weges oder der erwähnten Geschwindigkeit geschätzt werden muß.

Verfahren, um die Geschwindigkeit und die Zeit direct zu messen.

§. 217. Ehe wir diesen Gegenstand schließen, müssen wir noch der Mittel gedenken, mit Hülfe deren man die Geschwindigkeit der Bewegung bei den obigen Versuchen messen kann.

Wenn die Bewegung vollkommen gleichförmig oder periodisch ist, so ergibt sich die constante oder mittlere Geschwindigkeit leicht aus der Anzahl der Umdrehungen irgend eines Maschinentheiles und aus dem Wege, welchen ein bestimmter Punct in einer gegebenen und hinreichend langen Zeit zurücklegt. Handelt es sich namentlich um ein Rad, welches sich mit einer sehr großen Geschwindigkeit um eine feste Axe drehet; so ersieht man sich auf den Zapfen oder auf der Welle einen Punct, dessen Zusammentreffen mit einem andern festen Puncte oder einer festen Richtung leicht beobachtet werden kann, und zählt die Anzahl dieser Zusammentreffungen in einer bestimmten Zeit, um daraus ihre Anzahl in der Secunde zu berechnen. Gibt es keinen solchen in die Augen springenden Punct, so macht man sich ein Zeichen mit Kreide; zuweilen ist auch die Bewegung mit Tönen oder Schlägen begleitet, deren periodische Wiederkehr die Anzahl der Umdrehungen sehr genau bezeichnet, ohne daß man dabei das Gesicht in Anspruch zu nehmen braucht, welches alsdann zur Beobachtung der Zeit ungestört bleibt. Die Zeit wird mit Hülfe einer gewöhnlichen Uhr gemessen, wenn die Bewegung lange Zeit gleichförmig bleibt, oder mit einer Secundenuhr, wenn dieses nicht der Fall ist. Statt der Uhr wendet man in vielen Fällen auch ein kleines Pendel an, welches aus einer Bleikugel besteht, die an einem dünnen Faden aufgehängt ist. Die Schwingungsdauer einer Oscillation in Secunden ist bekanntlich durch die Formel:

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

gegeben, worin $\pi = 3{,}1415926$, $g = 9^m{,}8088$ ist und a die Länge des Pendels zwischen dem Aufhängepuncte und dem Schwingungspuncte bezeichnet. Der Schwingungspunct kann hier ohne merklichen Fehler im Schwerpuncte der Kugel angenommen werden. Nach dieser Formel hat man $a = 0^m{,}994$ zu nehmen, wenn das Pendel Secunden schlagen soll, $a = \frac{1}{4} \cdot 0^m{,}994 = 0^m{,}248$, wenn es die halben Secunden angeben soll, und allgemein:

$$a = 0^m{,}9938\ T^2,$$

wenn die Schwingungsdauer T Secunden betragen soll.

Es gibt Fälle, wo es nothwendig wird, Zehntel der Secunden zu schätzen. Die Beobachtung eines Pendels, dessen Oscillationen nur diese Dauer hätten, würde sehr ungenau und fast unmöglich sein. Die

Astronomen, welche in der Messung der Zeit eine große Gewandtheit erlangen, bedienen sich auch hierzu eines Secundenpendels, indem sie die Zehntel dadurch abschätzen, daß sie während des Zwischenraumes zwischen zwei Pendelschlägen die Zahlenreihe von 0 bis 10 abzählen. Breguet hat indessen auch Chronometer construirt, welche Zehntel der Secunden angeben, und nach Egen, dessen Versuche oben bereits erwähnt sind, hat man in Deutschland Chronometer, welche die Zeit bis auf Hundertstel der Secunde genau messen. Solche Instrumente haben übrigens einen sehr hohen Preis und stehen dem Experimentator selten zu Gebote. Wenn man weder eine Secundenuhr, noch ein Pendel zur Hand hat, so zählt man auch wohl die Pulsschläge, deren Anzahl man zuvor während einiger Minuten mit einer guten gewöhnlichen Uhr beobachtet hat.

Verfahren zur Bestimmung des Gesetzes der veränderlichen Bewegungen.

§. 218. Die gleichzeitige Beobachtung des von irgend einem Puncte einer Maschine durchlaufenen Raumes und der dabei verflossenen Zeit, um daraus die Geschwindigkeit zu bestimmen, bietet zuweilen Schwierigkeiten dar und macht oft selbst bei einer gleichförmigen oder periodischen Bewegung einen Gehülfen nöthig. Noch mehr ist dies der Fall, wenn sich die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke ändert und man ihre Werthe oder das Gesetz ermitteln will, welches sie in Beziehung zum Raume und zu der Zeit befolgt. Man wendet alsdann verschiedene Verfahren an, von denen das einfachste darin besteht, daß man den zu durchlaufenden Raum durch sichtbare Striche in eine Anzahl gleicher Theile theilt, so daß der erste Theilstrich mit der ersten Lage des beweglichen Maschinentheiles zusammenfällt, und dann die Zeiten beobachtet, welche zur Beschreibung dieser gleichen Räume erforderlich sind. Verzeichnet man hierauf eine Curve, welche jene Zeiten und Räume respective zu Abscissen und Ordinaten hat; so drückt die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Berührungslinien an den verschiedenen Puncten der Curven gegen die Abscissenaxe die entsprechende Geschwindigkeit aus.

Operirt man mit einem Pendel und ist die Bewegung nicht zu rasch, so ist es oft bequemer, dem beweglichen Striche mit der Hand zu folgen und seine Lage bei jedem Pendelschlage durch ein Zeichen zu bemerken. Diese Methoden werden jedoch völlig unbrauchbar, sobald die Bewegung sehr rasch und von kurzer Dauer ist; man muß alsdann zu besonderen Vorrichtungen seine Zuflucht nehmen, welche mehr oder weniger complicirt sind und sich nach den Umständen ändern. Hierher gehört z. B. das Wurfpendel von Robins und die Trommel mit gleichförmiger Geschwindigkeit von Grobert, welche nur dazu dienen, die Geschwindigkeit geworfener Körper auf einem kurzen Theile ihrer Bahn zu messen; ferner der Apparat, welchen Eytelwein anwandte, um das Gesetz der Bewegung des Stoßventiles eines hydraulischen Widders zu beobachten, und der, dessen sich kürzlich Morin bei seinen Versuchen über die Reibung bediente, um das Gesetz der Bewegung eines Schlittens auf langen parallelen Lagern zu entdecken. Die eine wie die andere dieser beiden Vorrichtungen besteht in der Verbindung und Vergleichung der veränderlichen Bewegung des gegebenen Maschinentheiles mit der gleichförmigen und bekannten Bewegung eines anderen Körpers, vermittelst des Zuges eines Griffels, welcher an dem einen dieser beiden Stücke befestigt ist.

Angabe einiger Vorrichtungen, welche bei sehr raschen und kurzen Bewegungen zu diesem Zwecke dienen können.

§. 219. Handelte es sich z. B. darum, das Gesetz der geradlinigen Bewegung irgend eines Ziehgatters oder Schlittens zu finden, so könnte man parallel zu seinen Seiten eine cylindrische, mit Papier überzogene Trommel anbringen, welcher man durch irgend einen Mechanismus eine bekannte gleichförmige Rotationsbewegung mittheilte. Befestigte man alsdann den Griffel auf dem Boden, so leuchtet ein, wie die davon zurückgelassene Spur dazu dienen könnte, für einen jeden Drehungswinkel der Trommel und mithin für jeden bekannten Zeitraum die Größe des von dem Griffel oder von dem Schlitten beschriebenen Raumes zu bestimmen, woraus sich dann nach der oben angegebenen Methode das Gesetz der Bewegung und der Geschwindigkeit finden ließe. Statt der Trommel könnte man auch eine ebene Scheibe mit gleichförmiger Bewegung anwenden. Eine ähnliche Einrichtung kann zur Entdeckung des Gesetzes der veränderlichen Bewegung eines rotirenden Maschinentheiles dienen, wenn man derselben mit einem Griffel versieht, dessen Spitze sich in der Ebene der Drehscheibe bewegt, welche letztere eine gleichförmige Geschwindigkeit hat, aber excentrisch zu dem Maschinentheile angebracht ist. Endlich kann man bei einem Schlitten die geradlinige Bewegung auch in eine rotirende verwandeln, welche man einer festen Axe vermittelst einer daran angebrachten Rolle und eines an dem Schlitten befestigten Fadens mittheilt, und alsdann das Gesetz der letzteren Bewegung durch das eben beschriebene Verfahren mit der Drehscheibe beobachten.

Dieser letzteren Methode hat sich besonders Morin bei seinen Versuchen bedient, wobei er zur Hervorbringung einer gleichförmigen Bewegung für den Griffel oder Pinsel von einem Uhrwerke, ähnlich dem der Bratenwender, Gebrauch machte. Im Allgemeinen kann man auf sehr viele verschiedene Weisen zum Zwecke gelangen, und die einzige Schwierigkeit besteht in der Herstellung einer durchaus gleichförmigen Rotationsbewegung, deren Gesetz genau bekannt ist, was viel schwieriger ist, als es auf den ersten Blick zu sein scheint, und außerdem sehr sorgfältiger Prüfungen bedarf. Was das Verfahren bei der Bestimmung der wahren Bewegung aus der Verbindung der beiden beobachteten Umdrehungsbewegungen betrifft, so ist dieses eine rein geometrische Aufgabe über eine einfache Coordinatenverwandlung, welche immer leicht zu lösen ist. Hinsichtlich der Genauigkeit und Gleichförmigkeit der Bewegung der Drehscheibe empfehlen wir für viele Fälle die Anwendung von kleinen gut centrirten und gut equilibirten Schaufelrädern, welche durch einen vollkommen regulirten Wasserstrom bewegt werden.

Achter Abschnitt.

Von dem Widerstande fester Körper.

Berechnung des Widerstandes und der Biegung fester Stäbe oder Stangen von einfacher oder doppelter Krümmung, wenn die nach allen Richtungen darauf wirkenden Kräfte zugleich in Betracht gezogen werden.

§. 220. Es ist bei dieser Untersuchung unsere Absicht, die bekannte Theorie des Widerstandes der festen Körper, welche gewöhnlich bei Constructionen angewandt werden, in mehreren Puncten zu vervollständigen, zu berichtigen und zu vereinfachen.

Wenn man die Bedingungen des Gleichgewichtes der auf einen festen Körper (Stab) wirkenden äußern Kräfte und der in einem Querschnitte desselben thätigen innern Kräfte aufstellt, so kann man die Ausdehnungen und Zusammenziehungen seiner verschiedenen Theile, die Bedingungen des Widerstandes bei gegebenen Kräften und endlich die Verrückungen seiner materiellen Theile, sowie die daraus entspringenden Formveränderungen berechnen. Bekanntlich wird aber das Gleichgewicht zwischen im Raume wirkenden Kräften im Allgemeinen durch sechs Gleichungen, drei zwischen Componenten und drei zwischen Momenten, ausgedrückt, und dennoch stellt Navier bei seinen für diesen Gegenstand so nützlichen und wichtigen Untersuchungen immer nur zwei Gleichungen auf; allein er umfaßt auch die Fälle nicht, wo der Körper doppelt gekrümmt ist, wo er zugleich gebogen und gedreht wird ꝛc., und er läßt selbst in den betrachteten Fällen mehrere wesentliche Umstände unbeachtet. — Diese Naviersche Theorie setzt ferner voraus, daß die ebenen Querschnitte des Körpers auch eben bleiben, und daß die Fasern, woraus man sich den Körper zusammengesetzt denkt, keine gegenseitige Wirkung auf einander ausüben und völlig unabhängig von einander sind. Diese beiden Voraussetzungen sind aber in mehreren Fällen nach neueren Untersuchungen, welche auf den Arbeiten von Navier selbst beruhen und deren Resultate durch die Beobachtungen von Savart und Cagniard de Latour als richtig bestätigt sind, nicht mehr zulässig. Auch hat man der Navierschen Theorie den Vorwurf gemacht, daß sie zu complicirt sei, wenigstens scheinbar; denn sie gibt die Berechnung der Verrückungen der materiellen Puncte früher, als die Bedingungen des Nichtzerreißens. Diese Rechnung ist jedoch in den meisten Fällen überflüssig, und man kann die Gleichungen des Widerstandes, welche für die Praxis am wichtigsten sind, einfacher erhalten. Endlich gibt diese Theorie keine allgemeine Methode zur Bestimmung der Reactionen fester Puncte, so wie der unbekannten gegenseitigen Einwirkungen der verschiedenen Theile desselben Systemes, so daß Navier, obgleich er viele neue Fälle genügend behandelt, in vielen andern Fällen doch wieder auf die alten, rein hypothetischen Kräftezerlegungen zurückkommt. Wir wollen hier diese Lücken ausfzufüllen, diese Mängel zu berichtigen und jede unnütze Complication zu vermeiden suchen. Wir bringen auch die Wirkungen der Seitengleitung mit in Rechnung, welche von den Transversalcomponenten herrühren, in deren Nichtbeachtung der Haupteinwurf besteht, welchen Vicat gegen die ganze Theorie des Widerstandes der festen Körper gemacht hat. Wir zeigen ferner, wie man vermittelst einer zweiten Gleichung der Transversalmomente den allgemeinen von Persy angegebenen Fall, wo das gewöhnliche Gleichgewicht nicht stattfinden kann und wo die Biegung des Körpers nothwendig in einer andern Richtung stattfindet, als die, nach welcher man denselben zu biegen sucht, sehr einfach behandeln kann. Wir dehnen unsere Rechnungen auch auf die Fälle aus, wo zu gleicher Zeit Biegung und Drehung stattfindet, und welche häufig vorkommen müssen, wenn man bemerkt, daß ein Körper fast niemals durch ein sogenanntes Kräftepaar gedreht wird. Endlich bringen wir den Umstand in Rechnung, daß die anfangs ebenen Querschnitte des Körpers windschief werden, sich also etwas gegen die Centralfaser (Axe) neigen, und daß die Fasern auch eine gegenseitige Wirkung auf einander ausüben, welche nicht ganz vernachlässigt werden kann. Wir stellen für die kleinen Verrückungen der Theilchen doppelt gekrümmter Stäbe oder Stangen neue Differentialgleichungen auf, sowie die sehr einfachen Integrale, welche sich aus diesen drei gleichzeitigen Differentialgleichungen der dritten Ordnung mit veränderlichen Coefficienten ergeben. Auch geben wir von den meisten der neuen Formeln praktische Anwendungsbeispiele, und endlich eine allgemeine Methode zur Bestimmung der gegenseitigen Einwirkungen und Rückwirkungen, welche sich nicht durch die gewöhnlichen Gleichungen der Statik aus den gegebenen Kräften ableiten lassen. Wenn man alle Gleichungen, auf welche unsere Theorie in jedem besonderen Falle führt, die zwar etwas zahlreich, aber alle vom ersten Grade sind, aufstellt und auflöst; so wird der Ausdruck der Bedingungen des Widerstandes in beliebigen Systemen der Zimmerkunst ebenso wenig Unbestimmtheiten und Willkürlichkeiten darbieten, als bei den Hängebrücken.

Gleichungen des Gleichgewichtes der innern und äußern Kräfte.

§. 221. Unter Ausdehnung in der Richtung einer innerhalb eines Körpers genommenen kleinen materiellen geraden Linie verstehen wir die verhältnißmäßige positive, oder negative Verlängerung dieser geraden Linie in Folge der Verrückungen der Molecule, und unter

Gleitung auf einer kleinen ebenen materiellen Fläche im Innern des Körpers die Neigung, welche eine ursprünglich auf dieser Fläche senkrechte gerade Linie gegen dieselbe angenommen hat.

Es sei

ω einer der Querschnitte des Körpers, und zwar normal auf der geraden oder krummen Axe, welche ihre Schwerpuncte verbindet;

u und v seien die Coordinaten des Mittelpunctes m des Elementes $d\omega$ in Beziehung auf die beiden Hauptaxen der Trägheit des durch den Schwerpunct M des Körpers gehenden Querschnittes;

r bezeichne die Entfernung Mm;

d sei die Längenausdehnung einer Faser oder eines nahezu zur Axe des Körpers parallelen prismatischen Theiles desselben, dessen Grundfläche $= d\omega$ ist, und welcher zwischen den beiden einander sehr nahe liegenden Querschnitten ω, ω' liegt;

g die Gleitung auf dem Querschnitte ω im Puncte m;

g', g'' resp. dieselbe Gleitung parallel zu den beiden Coordinatenaxen der u und v;

d_0, g_0, g'_0, g''_0 seien die Werthe dieser Größen für $u = o$, $v = o$;

$\mu = \int v^2 d\omega$, $\mu' = \int u^2 d\omega$ die Trägheitsmomente des Querschnittes ω in Beziehung auf die Axe der u und der v.

Wenn man sehr kleine Größen einer sichern Ordnung vernachläßigt, sowie den geringen Einfluß der Krümmung der Querschnitte auf die Länge der Fasern, so sieht man leicht ein, daß der Ausdruck dieser Länge zwischen den beiden Querschnitten ω, ω' nach wie vor den Verrückungen in Beziehung auf u und v vom ersten Grade sein wird, und dasselbe gilt von der Ausdehnung. Man hat folglich für diese einen Ausdruck von der Form:

$$d = d_0 + au + bv. \tag{1}$$

Das Gleiten im Puncte m rührt her: 1) davon, daß sich der Querschnitt ω' gegen den Querschnitt ω um einen kleinen Winkel gedreht hat. Wenn θ den Quotienten aus diesem kleinen Winkel und der gegenseitigen Entfernung der beiden Querschnitte bezeichnet, so drückt θr die Neigung aus, welche die ursprüngliche Normale auf dem Querschnitte ω im Puncte m gegen die Axe des Körpers bekommt und θv, $-\theta u$ sind die Projectionen auf zwei durch die Axen der u und v gehenden und auf ω senkrechten Ebenen; 2) davon, daß sich die Axe selbst gegen den Querschnitt um einen kleinen Winkel g_0 geneigt hat, dessen Projectionen auf dieselben beiden Ebenen mit g'_0, g''_0 bezeichnet sind; 3) davon, daß dieser Querschnitt selbst windschief geworden ist. Wenn w die sehr kleine Entfernung eines Punctes dieser Fläche von ihrer Centralberührungsebene bezeichnet, so läßt sich leicht an Beispielen einsehen, daß sie durch die Gleichung $w = \gamma uv$ ausgedrückt wird, also ungefähr die Form eines doppelten Windmühlenflügels hat, wie auch aus einer Untersuchung von Cauchy folgt, so daß der von dem Windschiefwerden des Querschnittes herrührende Antheil an dem Gleiten nach den Axen der u und v näherungsweise, resp. durch $-\gamma v$, $-\gamma u$, ausgedrückt werden kann. Mat hat folglich:

$$g' = g'_0 + \theta v - \gamma v, \quad g'' = g''_0 - \theta u - \gamma u.$$

Das (2) (2) wird richtig, da es sich aus den St. Venant'schen Theoremen ableiten lassen (vgl. Querschnitt). Die zum Gleichgewicht aber nur ... Wirkung der Torsion vgl. Clebsch pag. 91. 82.

Aber die Windschiefe γ und die Torsion θ sind nicht unabhängig von einander. Cauchy hat für einen rechteckigen Querschnitt gefunden:

$$\gamma = \theta \cdot \frac{\mu - \mu'}{\mu + \mu'}, \quad (22)$$

und wir haben durch Anwendung seiner Analyse auf einen Querschnitt von einer andern Form dasselbe Resultat erhalten. Es ist folglich:

$$(2) \qquad g' = g'_0 + \frac{2\mu'}{\mu + \mu'}\theta v, \quad g'' = g''_0 - \frac{2\mu}{\mu + \mu'}\theta u.$$

§. 222. Es bezeichne nun:

P_t die Summe der zu der Tangente an der Axe des Körpers im Puncte M parallelen Componenten aller Kräfte, welche von diesem Puncte bis an das eine der Enden des Körpers wirken;

P_u, P_v dieselben Componenten in der Richtung der Hauptaxen Mu, Mv des Querschnittes;

M_t, M_u, M_v die Summen der Momente derselben Kräfte in Beziehung auf dieselben drei auf einander senkrechten Linien;

E den Coefficienten, womit man die Ausdehnung eines isolirten Prismas von 1 Quadratmeter Grundfläche multipliciren muß, um die entsprechende Kraft zu erhalten;

G denselben Coefficienten in Beziehung auf das Gleiten;

π_u, π_v die Seitenpressungen, welche die betrachtete Faser auf ihren beiden auf den Axen der u und v senkrechten Flächen für die Flächeneinheit erfährt, indem wir den seltenen Fall bei Seite setzen, wo diese Druckkräfte nicht auf den Fasern senkrecht sind, was z. B. stattfindet, wenn an den Seiten des Körpers beträchtliche Reibungen wirken; so wird die Kraft, welche die Ausdehnung des Körpers ohne die Druckkräfte π_u, π_v bewirken könnte:

$$Ed\omega\ (d_0 + au + bv).$$

Aber bekanntlich bewirkt jede der Kräfte π_u, π_v eine Längenausdehnung, welche den vierten Theil der ihnen entsprechenden Seitencontraction beträgt, wenn die Elasticität nach allen Richtungen gleich angenommen wird, und folglich ist die Längenkraft nur:

$$(3) \qquad [E(d_0 + au + bv) - \tfrac{1}{4}(\pi_u + \pi_v)]\ d\omega$$

und wir wollen sie durch:

$$(4) \qquad E\ (d'_0 + a'u + b'v)$$

ausdrücken, indem wir voraussetzen, daß π_u, π_v Functionen des ersten Grades von u und v sind.

Die innern Transversalkräfte erhält man, wenn man die Ausdrücke (2) mit $Gd\omega$ multiplicirt. Nehmen wir also die Summen der Componenten und der Momente der innern Kräfte in Beziehung auf dieselben Axen, wie die äußern Kräfte, so haben wir wegen $\int ud\omega = o$, $\int vd\omega = o$, $\int uvd\omega = o$ für das Gleichgewicht:

$$(5) \quad \begin{cases} P_t = E\omega d'_0, \quad P_u = G\omega g'_0, \quad P_v = G\omega g''_0, \\ M_u = E\mu b', \quad M_v = E\mu' a', \quad M_t = G \cdot \dfrac{2\mu \cdot 2\mu'}{\mu + \mu'}\theta. \end{cases}$$

Die Gl. (4) folgt ebenfalls aus der Theorie von St. Venant in seinen Anwendungen auf die Stabilität ... Ausdehnungen ... geschlossen.

Bedingung des Zerreißens oder der Elasticitätsänderung.

§. 223. Aus den Formeln (2), (3), (4), (5) ergibt sich:

$$(6)\qquad d = \frac{P_l}{E\omega} + \frac{M_u}{E\mu}v + \frac{M_v}{E\mu'}u + \tfrac{1}{4}\,\frac{\pi_u + \pi_v}{E},$$

$$(7)\qquad g' = \frac{P_u}{G\omega} + \frac{M_l}{2G\mu}v,\quad g'' = \frac{P_u}{G\omega} - \frac{M_l}{2G\mu'}u;$$

und man hat:

$$g = \sqrt{g'^2 + g''^2}.$$

Es seien also $\frac{R_0}{E}$, $\frac{\Gamma_0}{G}$ die größte Ausdehnung und die größte Transversalgleitung, welche ein Prisma von derselben Substanz ohne Gefahr vertragen kann (wo der Index o anzeigen soll, daß die Elasticität auch bei längerer Dauer der Wirkung der Kräfte R_0, Γ_0 nicht geändert wird), so hat man für die Gleichungen des Widerstandes 1) wenn $P_u = P_v = M_l = 0$ ist, d. h. wenn nur Ausdehnungen (Verlängerungen) oder eigentliche Bewegungen stattfinden, welche von den ungleichen Ausdehnungen der Fasern herrühren:

$$(8)\qquad R_0 \geqq \text{größt. Zahlenwerth von } \frac{P_l}{\omega} + \frac{M_u}{\frac{1}{v}\mu} + \frac{M_v}{\frac{1}{u}\mu'} + \tfrac{1}{4}(\pi_u + \pi_v);$$

2) wenn $P_l = M_u = M_v = \pi_u = \pi_v = 0$ ist, d. h. wenn nur Gleiten oder Torsion stattfindet:

$$(9)\qquad \Gamma_0 \geqq \text{größt. Zahlenwerth von } \left(\frac{P_u}{\omega} + \frac{M_l}{2\cdot\frac{1}{v}\mu}\right)^2 + \left(\frac{P_v}{\omega} - \frac{M_l}{2\cdot\frac{1}{u}\mu'}\right)^2.$$

§. 224. Aber wenn zu gleicher Zeit Ausdehnungen und Gleitungen stattfinden, so können diese Formeln nicht mehr angewandt werden; jedes Gleiten bewirkt in gewissen schiefen Richtungen gegenseitige Annäherungen und Entfernungen der Molecule und kann deßhalb nachtheilig werden, so daß sich also ihre Wirkungen mit denen der Ausdehnungen verbinden. Nun läßt sich aber leicht zeigen, daß, wenn d_g die in dem betrachteten Puncte m in der Richtung des Gleitens g stattfindende Ausdehnung bezeichnet, die in einer Richtung, welche mit der Faser einen solchen Winkel φ bildet, daß $tang.\,\varphi = \frac{g}{d - d_g}$ ist, stattfindende Ausdehnung durch:

$$(10)\qquad \tfrac{1}{2}(d + d_g) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(d - d_g)^2 + g^2}$$

ausgedrückt wird und die größte ist, welche um den Punct m herum stattfindet.

Das Maximum des Ausdruckes (10) muß man $= \frac{R_0}{E}$ setzen, um die in allen Fällen anwendbare Gleichung des Widerstandes zu erhalten. Wenn π_u, π_v vernachläßigt werden können, so ist bekanntlich $d_g = -\frac{1}{4}d$, und der Ausdruck (10) wird:

$$(11) \qquad \tfrac{3}{8}d \pm \tfrac{5}{8}\sqrt{d^2 + (\tfrac{4}{5}g)^2}.$$

Da nun bekanntlich $G = \frac{2}{5}E$ ist, so hat man:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_0 \overline{\overline{>}} \text{ größt. Zahlw. von } \frac{3}{8}\left(\frac{P_l}{\omega} + \frac{M_u}{\frac{1}{v}\mu} + \frac{M_v}{\frac{1}{u}\mu'}\right) \\ \pm \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{P_l}{\omega} + \frac{M_u}{\frac{1}{v}\mu} + \frac{M_v}{\frac{1}{v}\mu'}\right)^2 + \left(2\frac{P_u}{\omega} + \frac{M_l}{\frac{1}{v}\mu}\right)^2 + \left(2\frac{P_v}{\omega} - \frac{M_l}{\frac{1}{u}\mu'}\right)^2}. \end{array} \right.$$

Dieser Ausdruck gibt die Gleichung (9) wieder, wenn P_l, M_u, M_v Null sind und $\Gamma_0 = \frac{4}{5}R_0$ genommen wird. Derselbe ist einfacher und symmetrischer, als nach der gewöhnlichen Theorie, bei welcher das Gleiten unberücksichtigt gelassen wird. In den gewöhnlichen Fällen, wo man die Glieder mit P_l, P_u, P_v vernachläßigen kann, vereinfacht er sich noch mehr, und besonders, wenn alsdann der Querschnitt ein Kreis, ein Quadrat, oder einer der viereckigen Sterne wird, welche man häufig bei gußeisernen Stücken anwendet. Alsdann ist $\mu = \mu'$, und wenn M_d das größte der beiden Momente in Beziehung auf die Diagonalen oder größten Durchmesser $2r'$ des Querschnittes ist, so hat man:

$$(13) \qquad R_0 = \text{größt. Zahlw. von } \frac{1}{\frac{1}{r'}\mu}\left(\tfrac{3}{8}M_d \pm \tfrac{5}{8}\sqrt{M^2_d + M^2_l}\right);$$

und die Größe im zweiten Theile dieser Gleichung reducirt sich auf:

$$\frac{1}{\frac{1}{4}\pi r'^2}\left(\tfrac{3}{8}M_d \pm \tfrac{5}{8}M\right),$$

wenn der Querschnitt ein Kreis und M das Totalmoment der Kräfte ist.

Anwendung auf einige Beispiele. — Unterschied zwischen den Resultaten nach unserer und nach der alten Theorie.

§. 225. **Der Querschnitt ist ein Rechteck und die Kraft wirkt senkrecht auf die Axe des Körpers, aber schief gegen die Seiten seiner Basis.** — Wen b, c die Seiten der Basis, a die Länge des an einem Ende befestigten Körpers, P die am andern Ende wirkende Kraft und φ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung dieser Kraft mit der Seite c bildet; so hat man nach der Formel (6):

$$R_0 = \frac{6\,aP}{b^2c^2}(b\cos.\varphi + c\sin.\varphi).$$

Diese Formel ist einfacher als die Formel:

$$R_0 = \frac{6aP}{bc} \cdot \frac{b \sin.\varphi + c \cos.\varphi}{b^2 \sin.^2\varphi + c^2 \cos.^2\varphi}$$

der alten Theorie, wo man nur ein Moment in Beziehung auf eine schiefe Gerade nimmt, indem man das andere Moment der innern Kräfte unbeachtet läßt.

Wenn $\varphi = 45^\circ$ ist, so ist das Verhältniß der aus der alten und neuen Formel abgeleiteten Werthe von P für $c = 1{,}5\,b$ gleich 1,08, für $c = 2\,b$ gleich 1,25 und für $c = 3\,b$ gleich 1,67. Hieraus sieht man, daß die alte Formel eine falsche Sicherheit geben kann, indem der Körper danach viel zu stark belastet werden könnte.

§. 226. Der Körper ist ein rechtwinkliges Parallelepipedum von einer geringen Länge, an dem einen Ende eingeklemmt und an dem andern Ende wirkt eine senkrechte Kraft. — In diesem Falle kann Pu nicht unberücksichtigt bleiben, und man findet:

$$R_0 = \frac{6aP}{bc^2}\left[\tfrac{3}{8} + \tfrac{5}{8}\sqrt{1 + \left(\frac{c}{3a}\right)^2}\right].$$

Der Einfluß dieser Transversalcomponente, welche die Fasern zu trennen strebt, und welchen die alte Theorie unbeachtet läßt, wird durch den Ueberschuß des Werthes der Größe zwischen den Klammern über die Einheit ausgedrückt und beträgt für $c = a,\ 2a,\ 3a,\ 4a$, resp. $3\tfrac{1}{2}$, $12\tfrac{1}{2}$, 26, 42 Procent.

§. 227. Derselbe Körper, wenn das Gewicht P gleichförmig auf seine obere Fläche vertheilt ist. — Alsdann ist:

$$\frac{\pi_u}{4} = \frac{P}{4\,ab},$$

und

$$R_0 = \frac{6\frac{a}{2}P}{bc^2}\left[\tfrac{3}{8}\left(1 + \tfrac{1}{12}\frac{c^2}{a^2}\right) + \tfrac{5}{8}\sqrt{\left(1 + \tfrac{1}{12}\frac{c^2}{a^2}\right)^2 + \tfrac{1}{9}\frac{c^2}{a^2}}\right].$$

Dieser Umstand hat einen viel größeren Einfluß, als das transversale Gleiten; denn die Größe zwischen den Klammern übersteigt die Einheit für $c = a$ und $c = 2a$ resp. um $11\tfrac{1}{2}$ und 43 Procent.

§. 228. Körper von gleichem Widerstande. — Wenn man das Gleiten in Betracht zieht, so verschwindet aus dieser Theorie ein Paradoxon, auf welches die gewöhnlichen Formeln führen und welches darin besteht, daß der Körper in den Stützpuncten eine Dicke $= 0$ haben soll, was daher kommt, daß die Transversalkraft P unberücksichtigt geblieben ist.

§. 229. Der Körper ist ein rechtwinkliges Parallelepipedum, welches gleichzeitig gebogen und gedrehet wird. Wenn das Gewicht P des Körpers an einem horizontalen Hebelarm h wirkend gedacht wird, so hat man:

$$R_0 = \frac{6aP}{b^2c^2}(b\cos.\varphi + c\sin.\varphi)^2\left[\tfrac{3}{8} + \tfrac{5}{8}\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}\cdot\frac{b^3 + c^2}{(b\cos.\varphi + c\sin.\varphi)^2}}\right].$$

Wenn $\varphi = 0$ ist, so übersteigt die zwischen den Klammern stehende Größe die Einheit um 0,14 für $c = b$, $h = \frac{1}{2}a$, um 0,46 für $c = b$, $h = a$, um 0,31 für $c = 2b$, $h = \frac{1}{2}a$, um 0,91 für $c = 2b$, $h = a$, wodurch der Einfluß der Torsion ausgedrückt wird, welchen die neuen Formeln in Betracht ziehen.

§. 230. **Welle mit einem kreisförmigen oder quadratischen Querschnitt, welche unter der Wirkung zweier Zahnräder oder Riemen zugleich gebogen und gedrehet wird.** — Die sehr einfache Formel (13) paßt für diesen Fall.

§. 231. **Horizontaler Halbkreis, dessen eines Ende eingeklemmt ist und an dessen anderm Ende ein Gewicht wirkt.** — Das Zerreißen findet nicht am Einklemmungspuncte statt, wie bei geraden Stücken, sondern in 0,226 der Länge, und der Widerstand ist das 1,408 fache von dem eines geraden Stückes von der Länge des Durchmessers.

§. 232. **Verticale schraubenförmige Feder, auf welche ein Gewicht P ziehend oder drückend wirkt.** — Wenn a den Halbmesser des Cylinders der Axe, r den der Feder mit kreisförmigem Querschnitte und φ den constanten Winkel bezeichnet, welchen die Axe mit dem Horizonte bildet, so gibt die vollständige Formel:

$$R_0 = \frac{4P}{\pi r^3}\left[\tfrac{3}{8}\left(a+\frac{r}{4}\right)\sin.\varphi + \tfrac{5}{8}\sqrt{\left(a+\frac{r}{4}\right)^2 \sin.^2\varphi + \left(a+\frac{r}{2}\right)\cos.^2\varphi}\,\right],$$

woraus der Einfluß der Längenausdehnung oder Verkürzung des Drahtes, seiner Biegung, des Seitwärtsgleitens seiner Molecule und seiner Torsion einzeln ersichtlich ist.

Bestimmung der Verrückungen der Molecule der Körper oder der Formveränderung derselben.

§. 233. Außer den Bezeichnungen in §§. 220—221 seien vor den Verrückungen:

x, y, z die Coordinaten des Punctes M der Axe des Körpers,
ds das Element dieser Axe,
ϱ ihr Krümmungshalbmesser,
e der Winkel, welchen die Verlängerung dieses Halbmessers auf dem Querschnitte ω mit der Hauptaxe der v bildet,
$\frac{ds}{\tau}$ der Winkel zwischen zwei benachbarten Osculationsebenen,
δ das Zeichen der Veränderungen in Folge der Verrückung,
$\xi = \delta x$, $\eta = \delta y$, $\zeta = \delta z$, $\varepsilon = \delta e$,

$$X = dyd^2z - dzd^2y,\quad Y = dzd^2x - dxd^2z,$$
$$Z = dxd^2y - dyd^2x,$$

so findet man, wenn π_u, π_v' unbeachtet bleiben können:

$$d = \frac{\delta ds}{ds} + (u\sin.e + v\cos.e)\frac{1}{ds}\delta\frac{ds}{\varrho} + (u\cos.e - v\sin.e)\frac{\varepsilon}{\varrho}$$
$$+ u\frac{dg'_0}{ds} + v\frac{dg''_0}{ds} - w\frac{d\varphi}{ds}\,\theta + \frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{1}{ds}\delta\frac{ds}{\tau}$$

Die Größe ε bezieht sich auf einen Bor-
strang. (Bremsbreifen)

Das letzte Glied von d drückt den Einfluß des **Windschiefwerdens** der Querschnitte auf die Ausdehnung aus; es gibt nur Nullcomponenten und Momente, welche gewöhnlich Null und immer sehr klein sind, weshalb wir es in §. 221 unbeachtet gelassen haben, und auch jetzt wieder hinweglassen werden.

Die Gleichungen (5) werden:

$$(14)\left\{\begin{aligned} &\frac{M_u}{E\mu} = \frac{\cos. e}{ds}\cdot\delta\frac{ds}{\varrho} - \sin. e\frac{\varepsilon}{\varrho} + \frac{dg''_0}{ds},\\ &\frac{M_v}{E\mu'} = \frac{\sin. e}{ds}\cdot\delta\frac{ds}{\varrho} + \cos. e\frac{\varepsilon}{\varrho} + \frac{dg'_0}{ds},\\ &\frac{P_t}{E\omega} = \frac{\delta ds}{ds},\quad \frac{M_t}{G\dfrac{4\mu\mu'}{\mu+\mu'}} = \frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{1}{ds}\,\delta\frac{ds}{\tau};\quad g'_0 = \frac{P_u}{G\omega},\quad g''_0 = \frac{P_v}{G\omega}, \end{aligned}\right.$$

und durch Elimination von g'_0, g''_0, ε ergibt sich daraus:

$$(15)\qquad \frac{\delta ds}{ds} = D,\quad \frac{1}{ds}\,\delta\frac{ds}{\varrho} = F,\quad \frac{1}{ds}\,\delta\frac{ds}{\tau} = T,$$

wo D, F, T gewisse Polynome sind, in denen alles bekannt ist, wenn ξ, η, ζ so klein sind, daß sie auf die Componenten und die Hebelarme der Kräfte keinen merklichen Einfluß haben. Im entgegengesetzten Falle hätte man dieselben Differentialgleichungen; aber die zweiten Theile enthielten ξ, η, ζ und die Integration würde nur schwieriger sein.

Wenn man die ersten Theile dieser Gleichungen entwickelt, indem man die bekannten Ausdrücke von ds, $\frac{ds}{\varrho}$ und $\frac{ds}{\tau}$ mit x, y, z nach δ differentiirt und ξ, η, ζ für δx, δy, δz setzt; so erhält man zwischen diesen Verrückungen drei Differentialgleichungen der ersten, zweiten und dritten Ordnung, durch deren Integration sich ergibt:

$$(16)\left\{\begin{aligned} d\xi &= Ddx - dy\int\left(Tdz + \frac{\varrho Z}{ds^2}F\right) + dz\int\left(Tdy + \frac{\varrho Y}{ds^2}F\right),\\ \delta\eta &= Ddy - dz\int\left(Tdx + \frac{\varrho X}{ds^2}F\right) + dx\int\left(Tdz + \frac{\varrho Z}{ds^2}F\right),\\ d\zeta &= Ddz - dx\int\left(Tdy + \frac{\varrho Y}{ds^2}F\right) + dy\int\left(Tdx + \frac{\varrho X}{ds^2}F\right). \end{aligned}\right.$$

Es kann auffallend erscheinen, daß in unsern Gleichungen eine neue Größe ε vorkommt, welche noch Niemand in Betracht gezogen hat und welche mit den Contingenz- und Osculationswinkeln $\frac{ds}{\varrho}$, $\frac{ds}{\tau}$ in gleicher Weise auftritt; allein es läßt sich leicht an einem Beispiele zeigen, daß diese Winkelverrückung des Krümmungshalbmessers auf dem Querschnitte in unserer Analyse nothwendig vorkommen muß. Denn denkt man sich eine doppelt gekrümmte elastische Stange, welche von einem festen und starren Kanale eng umschlossen ist, aber darin um sich selbst gedrehet werden kann, weil ihr Querschnitt, so wie der des Kanales kreisförmig ist; so müssen bei einer solchen Drehung sich die längsten Fasern nothwendig verkürzen und die kürzesten sich verlängern,

Die Gleichungen 14 liefern auch:

$dl = \ldots ds \cdot \sigma + \ldots \cdot dx$ wobei ...

und es finden auch Torsionen statt, wenn die Drehung nicht für alle Querschnitte dieselbe ist, und die Elasticität der Stange widersteht in allen Fällen der Verrückung ihrer Theilchen. Gleichwohl haben sich sowohl die Krümmungshalbmesser, als die Osculationsebenen der Axe auf keine Weise geändert. Die sogenannten Biegungs- und Torsionswiderstände hängen also nicht bloß von den Veränderungen der Contingenzwinkel und der Winkel, welche die Osculationsebenen mit einander bilden, sondern auch von der Art der in dem angeführten Beispiele stattfindenden Verrückungen ab, und diese Winkelverrückung auf jedem Querschnitte haben wir eben mit ε bezeichnet. Man sieht hieraus, daß man bei der Bestimmung der Formveränderung elastischer Stäbe oder Stangen von doppelter Krümmung nicht blos die in der Axe, sondern auch die außerhalb derselben liegenden Molecule in Betracht ziehen muß.

Grenzbedingungen. Allgemeine Methode zur Bestimmung der gegenseitigen Einwirkungen eines beliebigen Systemes fester Körper.

§. 234. Diese Methode besteht darin, daß man die Verrückungen der materiellen Puncte des Körpers bestimmt, indem man die Größen, die Hebelarme und die Richtungen der fraglichen Kräfte unbestimmt läßt. Sind alsdann die Verrückungen einmal als Functionen der gesuchten Größen ausgedrückt, so stellt man die Bedingungen auf, welchen sie an den Stütz- oder Befestigungspuncten, oder an den Vereinigungspuncten der verschiedenen Stücke, oder endlich an den Verbindungspuncten der verschiedenen Theile, in welche man dasselbe Stück zerlegen muß, weil die entsprechenden Verrückungen durch verschiedene Gleichungen ausgedrückt werden, genügen müssen. Auf diese Weise erhält man ebenso viele Gleichungen, als man unbekannte Größen hat; denn bei den Aufgaben der physischen Mechanik kann offenbar keine Unbestimmtheit stattfinden. Aber zuweilen ist die Anzahl dieser unbekannten Kräfte unendlich groß, wohin namentlich die Reactionen der umschließenden Wände an den Befestigungspuncten, die gegenseitigen Einwirkungen der Stücke, welche sich in einer gewissen Fläche berühren, so wie die Wirkungen anderer Theile ein und desselben Stückes gehören. Alle diese kleinen Kräfte werden durch folgendes Verfahren in Rechnung gebracht: Es seien p_x, p_y, p_z die zu den Axen parallelen Componenten, einer dieser kleinen Kräfte, a, b, c die Coordinaten ihres Angriffspunctes; so ist ihr Moment in Beziehung auf eine gerade Linie, welche durch den Punct der Axe des Körpers, dessen Coordinaten x, y, z sind, zu der Axe der x parallel gezogen ist, offenbar $= (b - y)\, p_z - (c - z)\, p_y$. Aber man braucht nur die Summen der Momente und der zu den drei Coordinatenaxen parallelen Componenten. Es seien daher A_x, A_y, A_z diese letzten Summen, so hat man für die der Momente:

$$B_x + A_y z - A_z y, \quad B_y + A_z x - A_x z, \quad B_z + A_x y - A_y x;$$

woraus folgt, daß sich alles, was man über diese Kräfte, wie groß ihre Anzahl auch sein mag, wissen muß, für jeden Theil der einzelnen Körper oder Stücke durch sechs Unbekannte ausdrücken läßt. Wenn man die Stücke in mehrere Theile theilt, so braucht man wegen der

Discontinuität keine transcendenten Größen anzuwenden, sondern hat blos die Axen der Theile ein und desselben Stückes durch eine gemeinschaftliche Tangente, oder vielmehr durch die von dem Gleiten herrührenden kleinen Winkel $g' = \frac{P_u}{G\omega}$, $g'' = \frac{P_v}{G\omega}$ zu verbinden. Auch muß man bei Stücken von doppelter Krümmung der Winkelverrückung:

$$\varepsilon = \varrho\left(\frac{M_u}{E\mu} - \frac{d}{ds}\cdot\frac{P_v}{G\omega}\right) sin.\, e + \varrho\left(\frac{M_v}{E\mu'} - \frac{d}{ds}\cdot\frac{P_u}{G\omega}\right) cos.\, e$$

an den Grenzen den entsprechenden Werth geben, indem man diese Verrückung $= 0$ setzt, welches den freien Enden entspricht, oder sie so annimmt, daß die Hauptaxen des Querschnittes unbeweglich bleiben, welches dem Falle des Einklemmens entspricht u. s. f.

Integration einer Differentialgleichung, welche in der Theorie der Biegung elastischer Stäbe vorkommt.

§. 235. Nach der Theorie der Biegung elastischer Stäbe von doppelter Krümmung, auf welche beliebige Kräfte wirken, hat man die drei Gleichungen:

$$(1') \qquad \frac{\delta ds}{ds} = D, \quad \frac{1}{ds}\,\delta\,\frac{ds}{\varrho} = F, \quad \frac{1}{ds}\,\delta\,\frac{ds}{\tau} = T,$$

worin D, F, T bekannte Functionen der ursprünglichen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punctes m der krummen Axe des Körpers, s die Länge des Bogens dieser Axe bis zu dem Puncte m, $\frac{ds}{\varrho}$ den Contingenzwinkel, $\frac{ds}{\tau}$ den Winkel zweier aufeinanderfolgender Krümmungsebenen derselben Curve in diesem Puncte, und endlich δ die Veränderungen bezeichnen, welche von den sehr kleinen Verrückungen der Puncte der Axe herrühren, welche durch die Wirkung der gegebenen Kräfte bestimmt werden, deren Componenten und Momente in D, F, T vorkommen.

Diese Verrückungen $\xi = \delta x$, $\eta = \delta y$, $\zeta = \delta z$, parallel zu den Axen der x, y, z, müssen gefunden werden, zu welchem Zwecke wir die durch δ angezeigten Differentiationen in den ersten Theilen der vorhergehenden Gleichungen verrichten, und wenn wir für $\frac{ds}{\varrho}$, $\frac{ds}{\tau}$ ihre allgemeinen und bekannten Ausdrücke mit x, y, z substituiren; so erhalten wir drei gleichzeitige Differentialgleichungen der ersten, zweiten und dritten Ordnung mit ξ, η, ζ. Eliminiren wir alsdann zwei dieser Unbekannten, z. B. η, ζ, was sich leicht bewerkstelligen läßt, wenn man die erste Gleichung differentiirt und daraus die Werthe von $d^2\eta$, $d^2\zeta$ ableitet, woraus sich vermöge der zweiten Gleichung die Werthe von $d\eta$, $d\zeta$ ergeben, welche man in die dritte Gleichung substituirt; so verschwinden die Integrale und wir erhalten eine Gleichung mit ξ:

$$(2') \quad \left\{ \begin{aligned} & d\xi d^2y d^3z - d\xi d^2z d^3y + dy d^2z d^3\xi - dy d^2\xi d^3z \\ & \quad + dz d^2\xi d^3y - dz d^2y d^3\xi = S ds^6, \end{aligned} \right.$$

worin S eine gewisse bekannte Function der ursprünglichen Coordinaten des Punctes m, oder des Bogens s, welchen man zu unabhängigen Veränderlichen nehmen kann, bezeichnet.

Wenn man in dem ersten Theile dieser letzten Gleichung für y und z ihre aus den Gleichungen der ursprünglichen Curve der Axe abgeleiteten Werthe als Functionen von s setzt, so kommen darin nur noch die Größen ξ und s vor. Diese Differentialgleichung der dritten Ordnung ist linear; aber die Coefficienten von $\frac{d\xi}{ds}$, $\frac{d^2\xi}{ds^2}$, $\frac{d^3\xi}{ds^3}$ sind nicht constant, und es gibt keine allgemeine Methode, eine solche Gleichung nach ξ aufzulösen.

Wir haben die Gleichung (2′) direct integrirt, ohne ihren zweiten Theil zu specialisiren und zu dem Zwecke gesetzt:

$$d\xi = udz, \quad dy = vdz.$$

Die Substitution dieser Werthe in die sechs Glieder des ersten Theiles erzeugt 22 Glieder, wovon sich aber 20 gegenseitig aufheben, und dieser erste Theil reducirt sich auf:

$$dz^3\,(dud^2v - dvd^2u) = -\,dz^3dv^2d\cdot\frac{du}{dv}.$$

Man hat folglich die Gleichung:

$$-\,dz^3\left(d\cdot\frac{dy}{dz}\right)^2 d\cdot\frac{d\cdot\frac{d\xi}{dz}}{d\cdot\frac{dg}{dz}} = Sds^6,$$

welche sich integriren läßt, und woraus sich ergibt:

$$\frac{d\xi}{dz} = -\int\left(d\cdot\frac{dy}{dz}\right)\int\frac{Sds^6}{dz^3\left(d\cdot\frac{dy}{dz}\right)^2};$$

oder wenn man das doppelte Integral durch theilweise Integration fortschafft:

$$d\xi = dz\int\frac{Sds^6}{(dyd^2z - dzd^2y)^2}\,dy - dy\int\frac{Sds^6}{(dyd^2z - dzd^2y)^2}\,dz.$$

Aehnliche Ausdrücke erhielte man für $d\eta$, $d\zeta$. Die Bestimmung der kleinen Verrückungen der Puncte der Axe eines doppelt gekrümmten Stückes ist also auf die Quadraturen zurückgeführt, und man sieht, daß der erste Theil der Gleichung (2′) integrabel ist, wenn man denselben mit dz oder dy multiplicirt und durch $(dyd^2z - dzd^2y)^2$ dividirt.

Anwendung der allgemeinen Formeln in §. 233—234.

§. 236. Wir wollen in die Gleichungen (16) für D, F, T die Werthe substituiren, welche sich aus den Gleichungen (14) für $\frac{\delta ds}{ds}$, $\frac{1}{ds}\delta\frac{ds}{\varrho}$, $\frac{1}{ds}\delta\frac{ds}{r}$ ergeben und die Glieder mit $d\sigma$ theilweise integriren;

so drücken die Glieder mit ε unter dem Integralzeichen die Momente der Kräfte in Beziehung auf den verlängerten Krümmungshalbmesser aus; denn man hat:

$$(17) \quad \varepsilon = \varrho \left(\frac{M_v}{E\mu'} - \frac{d}{ds}\frac{P_u}{G\omega}\right) cos.\, e - \varrho \left(\frac{M_u}{E\mu} - \frac{d}{ds}\frac{P_v}{G\omega}\right) sin.\, e,$$

und die Cosinus der Winkel, welche diese Verlängerung des Krümmungshalbmessers mit den Coordinatenaxen bildet, werden ausgedrückt durch:

$$-\varrho\, \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right),\; -\varrho\, \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right),\; -\varrho\, \frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

Wenn man also bemerkt, daß $\frac{\varrho X}{ds^3}$, $\frac{\varrho Y}{ds^3}$, $\frac{\varrho Z}{ds^3}$ die Cosinus der Winkel sind, welche die Binormale das Perpendikel auf der Krümmungsebene mit denselben Axen bildet, ferner α_u, β_u, γ_u die Winkel bezechnen, welche die Hauptaxe Mu des Querschnittes, und α_v, β_v, γ_v die Winkel, welche die Hauptaxe Mv mit den Axen der x, y, z bilden; so nehmen die Gleichungen (16) folgende Form an:

$$(18) \quad \begin{cases} d\xi = \frac{P_t}{E\omega}\, dx + y dz - z dy, \quad d\eta = \frac{P_t}{E\omega}\, dy + z dx - x dz, \\ d\zeta = \frac{P_t}{E\omega}\, dz + x dy - y dx, \end{cases}$$

wenn man setzt:

$$(19) \quad \frac{4\mu\mu'}{\mu + \mu'} = 2\mu'',$$

und:

$$(20) \quad \begin{cases} \int \left\{ \left[\frac{M_t}{2G\mu''}\frac{dx}{ds} + \left(\frac{M_u}{E\mu} - \frac{d}{ds}\frac{P_v}{G\omega}\right) cos.\, \alpha_u \right\} ds \\ \quad - \int \left(\frac{M_v}{E\mu'} - \frac{d}{ds}\frac{P_u}{G\omega}\right) cos.\, \alpha_v \right] ds = X, \\ \int \left\{ \left[\frac{M_t}{2G\mu''}\frac{dy}{ds} + \left(\frac{M_u}{E\mu} - \frac{d}{ds}\frac{P_v}{G\omega}\right) cos.\, \beta_v \right\} ds \\ \quad - \int \left(\frac{M_v}{E\mu'} - \frac{d}{ds}\frac{P_u}{G\omega}\right) cos.\, \beta_v \right] ds = Y, \\ \int \left\{ \left[\frac{M_t}{2G\mu''}\frac{dz}{ds} + \left(\frac{M_u}{E\mu} - \frac{d}{ds}\frac{P_v}{G\omega}\right) cos.\, \gamma_u \right\} ds \\ \quad - \int \left(\frac{M_v}{E\mu'} - \frac{d}{ds}\frac{P_u}{G\omega}\right) cos.\, \gamma_v \right] ds = Z. \end{cases}$$

Diese Formeln, wodurch die Bestimmung der kleinen Verrückungen auf Quadraturen zurückgeführt werden, lassen sich leicht auf alle specielle Fälle anwenden, indem man auf jedem Querschnitte die halben positiven Hauptaxen der u, v so wählt, daß die Verlängerung des Krümmungshalbmessers in dem von denselben gebildeten Winkel liegt. Zu bemerken ist noch, daß die verschiedenen Glieder in den ersten Theilen der Gleichungen (20) kleine Rotationen der Elemente der Axe des Körpers um die Axen der x, y, z in Folge der Wirkung der Kräfte ausdrücken.

Wir wollen die obigen Gleichungen zuerst im Allgemeinen auf den Fall anwenden, wo die Curve der Axe des Körpers eben ist und auch während der Formveränderung eben bleibt. Wenn x, y die Coordinaten dieser Curve bezeichnen, so muß man haben:

$$M_t = 0, \quad M_v = 0, \quad P_u = 0, \quad cos.\, \alpha_u = 0, \quad cos.\, \beta_u = 0,$$

und folglich:

$$cos.\, \gamma_u = 1, \quad cos.\, \alpha_v = -\frac{dy}{ds}, \quad cos.\, \beta_v = \frac{dx}{ds}, \quad cos.\, \gamma_v = 0,$$

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = \frac{P_v}{G\omega} + \int \frac{M_u}{E\mu}\, ds;$$

also:

$$d\xi = \frac{P_t}{E\omega}\, dx + \frac{P_v}{G\omega}\, dy - dy \int \frac{M_u}{E\mu}\, ds,$$

$$d\eta = \frac{P_t}{E\omega}\, dy - \frac{P_v}{G\omega}\, dx + dx \int \frac{M_u}{E\mu}\, ds.$$

Wenn man die zweiten Theile dieser beiden letzten Gleichungen auf ihre letzten Glieder reducirt, so erhält man die Ausdrücke:

$$-dy \int \frac{M_u}{E\mu}\, ds, \; dx \int \frac{M_u}{E\mu}\, ds,$$

welche Navier zuerst für geringe Biegungen ebener Stücke gegeben hat.

Wir wollen nun zu specielleren Anwendungen übergehen.

§. 237. Der Körper ist ein rechtwinkliges Parallelepipedum, welches an dem einen Ende befestigt ist, und an dessen anderm Ende eine auf seiner Länge a und auf der Seite b der Grundfläche senkrechte Kraft wirkt. Es sei c die andere Seite der Grundfläche und x die Entfernung der Befestigungsstelle von einem beliebigen Puncte der Axe des Körpers, so geben die Formeln (21) wegen $x = 0$ und $\frac{dy}{dx} = g'_0 = \frac{P}{G\omega}$:

$$d\xi = 0, \quad d\eta = \frac{P}{G\omega}\, dx + dx\, \frac{P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)}{E\mu};$$

folglich:

$$\eta = \frac{Px}{G\omega} + \frac{P}{E\mu}\left(a\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Der Krümmungspfeil (Sagitta) oder der Werth von η für $x = a$ ist, wenn man für ω, μ, G ihrer Werthe bc, $\frac{1}{12}\, bc^3$, $\frac{3}{5} E$ setzt:

$$f = \frac{4\, Pa^3}{Ebc^3}\left(1 + \tfrac{5}{8}\,\frac{c^2}{a^2}\right).$$

Hieraus sieht man, daß das Gleiten nur bei kurzen Stücken einen merklichen Einfluß auf die Krümmung hat, und zwar ist der Einfluß desselben auf den Krümmungspfeil weit beträchtlicher, als auf die Bedingungen des Widerstandes; denn dieser letzte Einfluß wird ausgedrückt durch $\frac{5}{8}\frac{c^2}{a^2}$, und beträgt folglich für $c = 3a,\ 2a,\ a$ resp. 0,07, 0,16, 0,62, so daß es folglich nothwendig ist, das Gleiten sowohl bei der Berechnung der Biegungen, wie bei der Berechnung der Bedingung des Widerstandes in Betracht zu ziehen.

§. 238. **Derselbe Körper, wenn die darauf wirkende Kraft gegen die als ungleich vorausgesetzten Seiten der Grunfläche eine schiefe Richtung hat.** — Alsdann erfolgt nach dem Obigen die Biegung des Körpers nicht in der Ebene, in welcher die Kraft liegt, und die Formeln (18), (20) lehren, in welchem Sinne die Biegung stattfindet, und geben, wenn φ den Winkel bezeichnet, welcher die Richtung der Kraft mit der Seite c bildet:

$$d\eta = \quad Zdx = dx\int\frac{P\,sin.\,\varphi\,(a-x)}{E\mu'}\,dx,$$

$$d\zeta = -\,Ydx = dx\int\frac{P\,cos.\,\varphi\,(a-x)}{E\mu}\,dx.$$

Wenn man diese Ausdrücke so integrirt, daß man für $x = 0$ hat:

$$\eta = 0,\ \zeta = 0,\ \frac{d\eta}{dx} = -\,g'_0 = -\,\frac{Pu}{G\omega},\ \frac{d\zeta}{dx} = -\,g''_0 = -\,\frac{P_e}{G\omega},$$

so erhält man:

$$\eta = \frac{P\ sin.\ \varphi}{G\omega}\,x + \frac{P\ sin.\ \varphi}{E\mu'}\left(a\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right),$$

$$\zeta = \frac{P\ cos.\ \varphi}{G\omega}\,x + \frac{P\ cos.\ \varphi}{E\mu}\left(a\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right);$$

und hieraus ergibt sich für die Projectionen der beiden Richtungen des Krümmungspfeiles f und für den Winkel ψ, welchen derselbe mit der zu der Seite c parallelen Axe der z bildet:

$$f_y = \frac{4\,Pa^3\,sin.\,\varphi}{Eb^3c},\ f_z = \frac{4\,Pa^3\,cos.\,\varphi}{Ebc^3},$$

$$f = \frac{4\ Pa^3}{Ebc}\sqrt{\frac{sin.^2\,\varphi}{b^4} + \frac{cos.^2\,\varphi}{c^4}},\ tang.\ \psi = \frac{c^2}{b^2}\,tang.\ \varphi.$$

Die alte Theorie zieht nur ein einziges Moment in Beziehung auf eine auf der Kraft der P senkrechte gerade Linie in Betracht und läßt das andere Moment unbeachtet, obgleich dasselbe für die innern Kräfte nicht Null ist, wodurch man die falschen Resultate:

$$f = \frac{4\,Pa^3}{Ebc\,(b^2\ sin.^2\ \varphi + c^2\ cos.^2\ \varphi)}\quad \text{und}\quad tang.\ \psi = tang.\ \varphi$$

erhält. Das Verhältniß der Tangenten der Winkel ψ, welche die neue und alte Formel geben, ist $\frac{c^2}{b^2} = 1{,}44;\ 2;\ 4$ und 9 wenn das Verhältniß $\frac{c}{b}$ resp. $= 1{,}2;\ 1{,}41;\ 2$ und 3 ist, so daß also beträchtliche Differenzen stattfinden. Wenn ferner $\varphi = \frac{1}{4}\pi = 45^{\circ}$ ist, so ist das Verhältniß des wirklichen Krümmungspfeiles zu dem nach der alten Theorie bestimmten resp. $= 1{,}185$; $1{,}825$; $3{,}56$, wenn das Verhältniß $\frac{c}{b} = 1{,}41$; 2 und 3 ist.

§. 239. Derselbe Körper ist horizontal eingeklemmt, wenn das Gewicht P gleichförmig auf seine ganze Länge vertheilt und der Einfluß des Seitendruckes der Fasern in Betracht gezogen wird. — Dieser Druck, welchen wir weiter oben mit π_u bezeichnet haben, ist auf der einen Fläche $= \frac{P}{ab}$ und auf der entgegengesetzten Fläche $= 0$. Nehmen wir ferner an, daß sich dieser Druck nahezu der Ordinate v proportionar ändert, so ist $\pi_u = \frac{P}{2\,ab} + \frac{P}{abc}\,v$ und man muß in den obigen Formeln $\frac{P}{abc}$ zu $\frac{M_u}{E\mu}$ addiren. Man hat also für den Krümmungspfeil:

$$f = \frac{2\,a^2 P}{Ebc^3}\left(1 + \tfrac{5}{8}\,\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{2a^2}\right).$$

Das Glied $\frac{5}{8}\,\frac{c^2}{a^2}$ drückt den Einfluß des Gleitens und das Glied $\frac{c^2}{2\,a^2}$ den des Seitendruckes aus, woraus man sieht, daß diese beiden Ursachen fast dieselben Wirkungen hervorbringen.

§. 240. Der Körper ist ein kreisförmiger Ring, welcher eine verticale Stellung hat und durch ein auf seinen Scheitel wirkendes Gewicht P gebogen wird. — Wir können nur die äußeren Kräfte betrachten, welche von einem bestimmten Puncte bis an das eine Ende eines Theiles des Ringes, z. B. des vom Scheitel aus genommenen vierten Theiles desselben, wirken, weil der Ring gleichsam ohne Ende ist, und müssen uns zur Bestimmung des unbekannten Momentes der Reactionen des untern Theiles des Ringes des in §. 234 erwähnten Verfahrens bedienen.

Es seien daher $B_z + P_x$ das Totalmoment dieser Kräfte, deren Resultante $= -P$ ist, in Beziehung auf einen Punct M des vierten Theiles des Ringes, a der Halbmesser desselben, t der Winkel, welchen der nach dem Puncte M gehende Halbmesser mit dem verticalen Durchmesser bildet, und $x = a\ sin.\ t$, $y = a\ cos.\ t$ die Coordinaten des Punctes M in Beziehung auf die Tangente im Scheitel und auf den verticalen Durchmesser als Axen; so hat man, wenn der Einfluß des Gleitens und der der Längencontraction, welche nur bei einer beträchtlichen Dicke des Ringes merklich sind, unberücksichtigt läßt:

$$d\xi = -\frac{a\ sin.\ tdt}{E\mu}\int (B_z + Pa\ sin.\ t)\ adt,$$

$$d\eta = \frac{a\ cos.\ tdt}{E\mu}\int (B_z + Pa\ sin.\ t)\ adt.$$

Das Integral:

$$B_z at - Pa^2\ cos.\ t + const.$$

muß für $t = 0$ und $t = \pi$ verschwinden; denn im Scheitel muß $\frac{d\eta}{dt} = 0$ und im Endpuncte des horizontalen Durchmessers $\frac{d\xi}{dt} = 0$ sein. Diese beiden Grenzbedingungen geben:

$$const. = Pa^2, \quad B_z = -\frac{2}{\pi} Pa.$$

Substituirt man diese Werthe und integrirt nochmals, so erhält man die allgemeinen Ausdrücke der Verrückungen ξ, η, woraus sich die horizontale Ausdehnung und die verticale Abplattung resp. gleich:

$$\frac{Pa^3}{E\mu}\left(\frac{4}{\pi} - 1\right) \text{ und } \frac{Pa^3}{E\mu}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right)$$

ergibt. Die erste beträgt 0,82 und die zweite 0,89 des Krümmungspfeiles eines eingeklemmten geraden Stückes, dessen Länge dem Halbmesser des Ringes gleich ist und worauf dasselbe Gewicht P wirkt.

Auf dieselbe Weise könnte man die Biegung der Feder eines Dynamometers, z. B. des Regnier'schen, berechnen.

§. 241. Der Körper ist ein horizontaler Ring, auf welchen verticale Kräfte wirken. — Es bezeichne a den Halbmesser dieses Ringes, von welchem wir annehmen wollen, daß derselbe in den Endpuncten A, A' eines Durchmessers unterstützt sei, und daß in den Endpuncten B, B' eines auf dem ersten senkrechten Durchmessers zwei Kräfte P wirken. Ferner seien x, y die Coordinaten eines Punctes M des Quadranten AB des Ringes in Beziehung auf die beiden erwähnten Durchmesser als Axen, und t sei der Winkel, welchen der nach dem Puncte M gehende Halbmesser mit dem Durchmesser $A'A$ bildet; so werden die Momente der unbekannten Reactionen des jenseits des Punctes B liegenden Theiles des Ringes in Beziehung auf die durch den Punct M zu den Axen der x, y gezogenen Parallelen nach §. 234 ausgedrückt durch:

$$aB_x + Py, \quad aB_y - Px.$$

Wenn man folglich die Verlängerung des Halbmessers zur Axe der u nimmt, so ist $x = a\cos. t$, $y = a\sin. t$ und man hat:

$$M_t = -aB_x \sin. t + aB_y \cos. t - Pa,$$
$$M_u = aB_x \cos. t + aB_y \sin. t,$$

woraus folgt:

$$\xi = 0, \quad \eta = 0,$$

und wenn man das Gleiten unberücksichtigt läßt:

$$(22)\left\{\begin{aligned}\zeta = {} & a^3C'' + \frac{a^3}{2G\mu''}\left[B_x\left(\frac{t\sin. t}{2} + \cos. t\right) + B_y\left(\frac{\sin. t}{2} - \frac{t\cos. t}{2}\right) - Pt\right] \\ & + \frac{a^3}{E\mu}\left[B_x\frac{t\sin. t}{2} + B_y\left(\frac{\sin. t}{2} - \frac{t\cos. t}{2}\right)\right] + Ca^3\sin. t - C'a^3\cos. t.\end{aligned}\right.$$

Die fünf Constanten B_x, B_y, C, C', C'' haben verschiedene Werthe, je nach den Umständen, worin sich die Endpuncte A, B des betrachteten Quadranten des Ringes befinden.

1) Wenn der Ring im Puncte A eingeklemmt und im Puncte B aufgeschnitten oder völlig frei wäre, so hätte man:

$$\text{für } t = \tfrac{1}{2}\pi: \quad M_t = 0, \quad M_u = 0;$$

$$\text{und für } t = 0: \qquad \zeta = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Allein es ist noch eine fünfte Bedingungsgleichung erforderlich, welche die Unbeweglichkeit der Puncte des Querschnittes an der Einklemmungsstelle A ausdrückt. Um diese Gleichung zu erhalten, muß man die Winkelverrückung ε des Krümmungshalbmessers auf diesem Querschnitte in Betracht ziehen. Der allgemeine Ausdruck (17) derselben reducirt sich im gegenwärtigen Falle auf:

$$\varepsilon = -\frac{a^2}{E\mu}(B_x \cos. t + B_y \sin. t),$$

oder für den Punct A auf $\frac{Pa^2}{E\mu}$, weil die beiden ersten Bedingungsgleichungen geben:

$$B_x = -P, \quad B_y = 0.$$

Man muß also ausdrücken, daß der Krümmungshalbmesser nach der Verrückung mit seiner ursprünglichen Richtung, d. h. mit der Axe der x, den Winkel $\frac{Pa^2}{E\mu}$ bildet. Die Cosinus der Winkel, welche der Krümmungshalbmesser vor der Verrückung der Puncte einer beliebigen Curve mit den Axen der x, y, z bildet, werden, wenn das Differential ds des Bogens als constant betrachtet wird, bekanntlich ausgedrückt durch:

$$\frac{d^2x}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}, \quad \frac{d^2y^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}},$$

$$\frac{d^2z^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}},$$

und ihre Ausdrücke haben nach der Verrückung noch dieselbe Form, wenn man statt d^2x, d^2y, d^2z die Größen:

$$d^2x + d^2\xi, \quad d^2y + d^2\eta, \quad d^2z + d^2\zeta$$

setzt. Hieraus ergibt sich als die fünfte Bedingungsgleichung:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{Pa^3}{E\mu}, \quad \text{für } t = 0.$$

Mithin sind die fünf Constanten:

$$B_x = -P, \quad B_y = 0, \quad C = C'' = \frac{1}{2G\mu''}, \quad C' = 0,$$

und folglich:

$$\zeta = -\frac{Pa^3}{2G\mu''}(t - 1 + \cos. t - \sin. t + \tfrac{1}{2} t \sin. t) - \frac{Pa^3}{E\mu} \cdot \tfrac{1}{2} t \sin. t.$$

Der verticale Krümmungspfeil im Puncte B wird ausgedrückt durch:

$$\frac{Pa^3}{2G\mu''}(\tfrac{3}{4}\pi - 2) + \frac{Pa^3}{E\mu} \cdot \tfrac{1}{4}\pi,$$

woraus man sieht, welchen Antheil die gewöhnliche Biegung und die Torsion daran haben.

2) Wir wollen annehmen, daß der Ring nur in A unterstützt, aber in B nicht aufgeschnitten sei, wie es gewöhnlich der Fall ist; so ist es gerade dasselbe, als wenn sich der Quadrant AB des Ringes in horizontalen Fassungen frei um sich selbst drehen kann, und die fünf Bedingungsgleichungen sind:

$$\text{für } t = \tfrac{1}{2}\pi: \quad M_t = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0;$$

$$\text{für } t = 0 \;: \quad M_t = 0, \quad \zeta = 0, \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Wenn man die Constanten demgemäß bestimmt und substituirt, so erhält man:

$$\zeta = -\frac{Pa^3}{2G\mu''}(t + 2\cos. t - \sin. t + t\sin. t - 2)$$
$$-\frac{Pa^3}{E\mu}\left(\tfrac{1}{2}\cos. t - \tfrac{1}{2}\sin. t + \tfrac{1}{2}t\sin. t + \tfrac{1}{2}t\cos. t - \tfrac{1}{4}\pi\cos. t + \frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\right),$$

und der Krümmungspfeil am Aufhängungspuncte B wird ausgedrückt durch:

$$\frac{Pa^3}{2G\mu''}(\pi - 3) + \frac{Pa^3}{E\mu}(\tfrac{1}{2}\pi - 1), \text{ oder } \frac{Pa^3}{E\mu}(\tfrac{7}{4}\pi - \tfrac{19}{4}),$$

wenn $\mu = \mu''$, $G = \frac{2}{5}E$ ist.

3) Wenn der Ring in A horizontal eingeklemmt wäre und der Querschnitt desselben in B sich frei um sich selbst drehen könnte, so hätte man:

$$\text{für } t = 0: \qquad \zeta = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{Pa^2}{E\mu}.$$

$$\text{für } t = \tfrac{1}{2}\pi: \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0, \quad M_t = 0.$$

4) Wenn der Ring auch in B horizontal eingeklemmt wäre, aber sich dieser Punct abwärts bewegen könnte, so hätte man statt der fünften Bedingung im vorhergehenden Falle $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0$ für $t = \frac{1}{2}\pi$, weil im Puncte B der Werth von $s = 0$ ist.

Wir wollen die Rechnung in Beziehung auf diese beiden letzten Fälle nicht ausführen, da aus dem Mitgetheilten zur Genüge hervorgeht, wie die Bedingungen für die Grenzen im Allgemeinen ausgedrückt werden müssen.

§. 242. **Widerstand des Zerreißens oder der Aenderung der Elasticität der Ringe in §§. 240 und 241.** — Die Gleichungen dieses Widerstandes lassen sich nach §. 223 jetzt leicht aufstellen, da wir durch die Betrachtung der Verrückungen auf die in §. 234 angegebene Weise zur Bestimmung der Momente der unbekannten Kräfte gelangt sind.

§. 243. **Schraubenförmige Feder, auf welche nach der Richtung ihrer Länge die Kraft wirkt.** — Es sei a der Halbmesser des Cylinders, worauf die schraubenförmige Axe der Feder liegt, P die Kraft, welche nach der Axe des als vertical vorausgesetzten Cylinders wirkt, und φ sei der constante Winkel, welchen die Schraubenlinie vor ihrer Ausdehnung oder Zusammendrückung mit dem Horizonte bildet. Ferner wollen wir die Axe des Cylinders zur Axe der z nehmen und mit t den Winkel bezeichnen, welchen der nach dem Puncte M, dessen Coordinaten x, y, z sind, gehende Halbmesser mit der Ebene der xy bildet, indem wir annehmen, daß dieser Winkel für jede Windung um 2π zunimmt. Nehmen wir endlich die Verlängerung dieses Halbmessers auf dem Querschnitte zur Axe der v, so haben wir:

$$x = a\ cos.\ t,\quad y = a\ sin.\ t,\quad z = at\ tang.\ \varphi;$$

$$cos.\ \alpha_u = sin\ \varphi\ sin.\ t,\quad cos.\ \beta_u = -\ sin.\ \varphi\ cos.\ t,$$

$$cos.\ \gamma_u = cos.\ \varphi,\quad cos.\ \alpha_v = cos.\ t,\quad cos.\ \beta_v = sin.\ t,\quad cos.\ \gamma_v = 0;$$

$$P_t = 0,\quad P_u = P\ cos.\ \varphi,\quad P_v = 0,\quad M_u = -\ Pa\ sin.\ \varphi,$$

$$M_v = 0,\quad M_t = Pa\ cos.\ \varphi;$$

woraus folgt, wenn α die Verkürzung $-\ \delta a = -\ \xi\ cos.\ t - \eta\ sin.\ t$ des Halbmessers des Cylinders und C, C', C'', C^{IV}, C^{V} die Constanten bezeichnen:

$$\zeta = C^{V} + \frac{Pa\ sin.\ \varphi\ tang.\ \varphi}{E\omega}\ t + \frac{Pa^3}{cos.\ \varphi}\left(\frac{cos.^2\ \varphi}{2\,G\mu''} + \frac{sin^2\ \varphi}{E\mu}\right)$$
$$[t + C\ sin.\ t + C'\ (1 - cos.\ t)];$$

$$\alpha = -\ \frac{Pa\ sin.\ \varphi}{E\omega} + Pa^3\ sin.\ \varphi\left(\frac{1}{2\,G\mu''} - \frac{1}{E\mu}\right)$$
$$+ \frac{Pa^3\ tang.\ \varphi}{cos.\ \varphi}\left(\frac{cos.^2\ \varphi}{2\,G\mu''} + \frac{sin.^2\ \varphi}{E\mu}\right)[1 + Ct\ sin.\ t + C't(1 - cos.\ t)]$$
$$+ C'''\ cos.\ t + C^{IV}\ sin.\ t.$$

Die fünf Constanten hängen von den verschiedenen Bedingungen ab, welche den Endpuncten der Feder beigelegt werden können. Die Constante C^{V} ist Null, wenn $\zeta = 0$ für $t = 0$ ist, und die fünf andern Constanten afficiren nur die periodischen Größen, welche an bestimmten Puncten jeder Windung verschwinden. Wenn also die Befestigungspuncte so beschaffen sind, daß die schraubenförmige Feder bei der Ausdehnung ihre regelmäßige Form behält, so müssen alle Glieder, worin diese Constanten vorkommen, hinwegfallen, woraus folgt: 1) daß die Verlängerung ζ der Länge der Feder proportional und 2) ihre Verengung constant ist, welche beide Gesetze bei einer gewissen Entfernung der Befestigungspuncte immer näherungsweise stattfinden. Ferner sieht man, daß das Gleiten, welches auf die Bedingungen des Widerstandes der Feder wegen der Neigung der Querschnitte gegen die Axe Einfluß hat, auf die Verrückungen der Puncte dieser Axe keinen Einfluß hat. Die Längenausdehnung hat im Allgemeinen nur einen geringen Einfluß, so daß man die durch $E\omega$ dividirten Glieder hinweglassen kann, und alsdann bleibt:

$$\zeta = \frac{Pa^3}{cos.\ \varphi}\left(\frac{cos.^2\ \varphi}{2\,G\mu''} + \frac{sin.^2\varphi}{E\mu}\right)t,\qquad t = 2\sqrt{\pi}$$

$$\alpha = \zeta\ tang.\ \varphi + Pa^3\ sin.\ \varphi\left(\frac{1}{2\,G\mu''} - \frac{1}{E\mu}\right).$$

Das zweite Glied dieses Ausdruckes für die halbe Verengung α rührt davon her, daß die Feder eine kleine Rotation um die Axe ihres

Cylinders bekommen hat, welche nur durch horizontale Kräfte verhindert werden könnte.

Wenn $\mu = \mu''$, $G = \frac{2}{5} E$ ist, so hat man:

$$\zeta = \frac{Pa^3}{E\mu \cos. \varphi} \left(\tfrac{5}{4} \cos.^2 \varphi + \sin.^2 \varphi\right),$$

und die Biegung oder die Drehung überwiegt, je nachdem $\sin. \varphi$ groß oder klein ist.

§. 244. Für diesen letzten Fall und für Schrauben von einer geringen Weite hat Giulio (Mém. de l'Acad. de Turin 1841) seine interessanten Versuche angestellt; und die Formel, welche derselbe durch Betrachtungen aufgestellt hat, die sich speciell auf die Schrauben beziehen und nur in dem Falle anwendbar sind, wo der Winkel $e = 0$ ist, kommt auf folgende zurück:

$$\zeta = \frac{Pa^3}{E\mu \cos. \varphi} \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \frac{1}{\cos.^2 \varphi},$$

welche nur für $\cos. \varphi = 1$ mit der unsrigen übereinstimmt. Wenn man nur die vierte Potenz von $\sin. \varphi$ vernachlässigt, so ist die Formel von Giulio:

$$\frac{Pa^3}{E\mu} \left(\tfrac{5}{4} + \tfrac{15}{8} \sin.^2 \varphi\right),$$

und die unsrige:

$$\frac{Pa^3}{E\mu} \left(\tfrac{5}{4} + \tfrac{3}{8} \sin.^2 \varphi\right).$$

Unsere Formel drückt also die Resultate der Beobachtungen von Giulio etwas besser aus, als die seinige; denn er nimmt beständig $\cos. \varphi = 1$ oder $\zeta = \frac{5}{4} \frac{Pa^3}{E\mu}$, um denselben zu genügen.

Wir haben die vorhergehenden Methoden auch auf die Bestimmung der Vertheilung des Druckes auf die verschiedenen Theile einer hölzernen Brücke angewandt; allein wir wollen hier die sich darauf beziehenden, ziemlich complicirten Rechnungen nicht mittheilen, weil es hinreichend ist, gezeigt zu haben, daß sich diese Methoden auf alle Untersuchungen des Widerstandes von Körpern anwenden lassen, deren Puncte unter der Wirkung beliebiger Kräfte, sie mögen a priori gegeben sein, oder nicht, kleine Verrückungen annehmen können.

Ueber die Torsion der Prismen, deren Grundfläche ein Rechteck oder eine Raute ist, und über eine kleine Correction, welche im Allgemeinen an den Torsionsmomenten vorzunehmen ist.

§. 245. Wir wollen jetzt zeigen: 1) wovon der Unterschied herrührt, welcher zwischen dem Ausdrucke, den Cauchy für das Moment des Torsionswiderstandes eines Prismas mit rechteckiger Grundfläche erhalten hat und dem durch die alte Theorie erhaltenen Ausdrucke für dasselbe Moment, stattfindet; nämlich davon, daß die ursprünglich ebenen Querschnitte durch die Torsion windschief werden, wenn die

Transversaldimensionen des Körpers **ungleich** sind, während die alte Theorie annimmt, daß sie **eben bleiben**, wodurch sich für den Widerstand ein zu **großer** Werth ergibt;

2) wollen wir zeigen, daß man an den Ausdrücken der Torsionsmomente im Allgemeinen eine kleine Zahlencorrection vornehmen muß, weil die Componenten des Druckes gegen den Umfang zu, wo sie verschwinden müssen, schnell abnehmen;

3) wollen wir die Analyse von Cauchy auch auf den Fall ausdehnen, wo der Querschnitt des Prismas eine Raute ist, und der Ausdruck des Torsionsmomentes als Function der beiden Hauptträgheitsmomente des Querschnittes ist alsdann derselbe, als wenn die Grundfläche ein Rechteck ist. Da aber dieselbe Analyse nicht auf die Fälle anwendbar zu sein scheint, wo der Querschnitt eine beliebige vielseitige oder krummlinige Figur ist, den Kreis ausgenommen, für welchen dasselbe Resultat stattfindet; so wollen wir annehmen, daß in der Praxis dieselben Ausdrücke für das Torsionsmoment und das Windschiefwerden auch für alle übrigen Querschnitte gelten, zumal da das Rechteck und die Raute gleichsam zwei äußerste Fälle bilden, wovon der erste durch die Versuche von **Savart** bekanntlich bestätigt ist.

Uebersicht der Formeln der Molecularmechanik. Allgemeiner Ausdruck des Torsionsmomentes.

§. 246. Für einen beliebigen Punct m eines Körpers, dessen ursprüngliche Coordinaten x, y, z sind, seien ξ, η, ζ die Verrückungen nach den Richtungen der drei Coordinatenaxen, ferner p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} die zu den Axen des x, y, z parallelen Componenten des innern Druckes, welcher auf die Einheit einer kleinen auf der Axe der x senkrechten ebenen Fläche in Folge der Verrückung der materiellen Puncte des Körpers wirkt, und p_{yy}, p_{yz}, p_{zz} seien die ähnlichen Componenten für die auf den Axen der y und der z senkrechten ebenen Flächen, so daß bekanntlich $p_{yz} = p_{zy}$, $p_{xz} = p_{zx}$, $p_{xy} = p_{yx}$ ist; dann sei ϱ die Dichtigkeit, und X, Y, Z seien die beschleunigenden Kräfte, welche auf die Masseneinheit des Körpers wirken; ferner sei $\bar{\omega}$ der auf die Flächeneinheit wirkende äußere Druck, $C_{\bar{\omega}x}$, $C_{\bar{\omega}y}$, $C_{\bar{\omega}z}$ seien die Cosinus der Winkel, welche die Richtung dieses Druckes mit den Axen der x, y, z bildet, C_{nx}, C_{ny}, C_{nz} die Cosinus der Winkel, welche die Normale auf der äußeren Fläche in demselben Puncte mit diesen Axen bildet, und endlich seien a_{xx}, a_{xy}, ... sechs constante Coefficienten, welche die Elasticität des Körpers in verschiedenen Richtungen ausdrücken, wobei vorausgesetzt wird, daß es Elasticitätsaxen gibt, welche zu denen der x, y, z parallel sind; so hat man bekanntlich:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} p_{xx} &= 3a_{xx}\frac{d\xi}{dx} + a_{xy}\frac{d\eta}{dy} + a_{xz}\frac{d\zeta}{dz}, \\ p_{yy} &= a_{xy}\frac{d\xi}{dx} + 3a_{yy}\frac{d\eta}{dy} + a_{yz}\frac{d\zeta}{dz}, \\ p_{zz} &= a_{xz}\frac{d\xi}{dx} + a_{zy}\frac{d\eta}{dy} + 3a_{zz}\frac{d\zeta}{dz}, \end{aligned}\right.$$

$M = \frac{1}{4}$ ([illegible])

$$(2)\quad\begin{cases} p_{yz} = a_{yz}\left(\dfrac{d\eta}{dz} + \dfrac{d\zeta}{dy}\right), \quad p_{zx} = a_{zx}\left(\dfrac{d\zeta}{dx} + \dfrac{d\xi}{dz}\right), \\ p_{xy} = a_{xy}\left(\dfrac{d\zeta}{dy} + \dfrac{d\eta}{dx}\right). \end{cases}$$

Die unbestimmten Differentialgleichungen, welche für alle Puncte des Körpers erfüllt werden müssen, sind:

$$(3)\quad\begin{cases} \dfrac{dp_{xx}}{dx} + \dfrac{dp_{xy}}{dy} + \dfrac{dp_{xz}}{dz} = -\varrho X, \\ \dfrac{dp_{xy}}{dx} + \dfrac{dp_{yy}}{dy} + \dfrac{dp_{yz}}{dz} = -\varrho Y, \\ \dfrac{dp_{zx}}{dx} + \dfrac{dp_{yz}}{dy} + \dfrac{dp_{zz}}{dz} = -\varrho Z, \end{cases}$$

und die bestimmten Gleichungen, welche für alle Puncte der Oberfläche erfüllt werden müssen, sind:

$$(4)\quad\begin{cases} p_{xx}C_{nx} + p_{xy}C_{ny} + p_{xz}C_{nz} = \tilde{\omega}C_{\tilde{\omega}x}, \\ p_{xy}C_{nx} + p_{yy}C_{ny} + p_{yz}C_{nz} = \tilde{\omega}C_{\tilde{\omega}y}, \\ p_{xz}C_{nx} + p_{yz}C_{ny} + p_{zz}C_{nz} = \tilde{\omega}C_{\tilde{\omega}z}. \end{cases}$$

§. 247. Die Differentialcoefficienten im zweiten Theile der Ausdrücke (1) sind nichts anders, als die Ausdehnungen in den verschiedenen Richtungen, und die Differentialbinome im zweiten Theile der Ausdrücke (2) sind die s. g. Gleitungen in den verschiedenen Richtungen, indem das eine der beiden Glieder die Winkelverrückung einer kleinen Fläche und das andere die der materiellen geraden Linie, welche ursprünglich darauf senkrecht war, ausdrückt.

Wenn die Elasticität um die Axe der x, welche zugleich die des Körpers ist, dieselbe bleibt, so hat man:

$$a_{xz} = a_{xy}, \quad a_{yy} = a_{zz} = a_{yz},$$

und wenn alle a einander gleich sind, so ist die Elasticität in allen Richtungen gleich. Die Gleichungen (1) geben alsdann:

$$p_{xx} = \tfrac{5}{2}\, a\, \frac{d\xi}{dx} + \frac{p_{yy} + p_{zz}}{4},$$

und wenn p_{yy}, p_{zz} Null sind:

$$\frac{d\eta}{dy} = \frac{d\zeta}{dz} = -\tfrac{1}{4}\,\frac{d\xi}{dx},$$

was nichts anders ist, als die Ausdrücke in §. 222 und §. 224; denn es ist $a = G$, $\frac{5}{2}a = E$, $p_{yy} = -\pi_u$, $p_{zz} = -\pi_v$.

§. 248. Der Körper sei ein Prisma, ω sein Querschnitt in der Entfernung x vom Anfangspuncte der Coordinaten, $d\omega$ das Element im Puncte m, dessen Transversalcoordinaten y, z sind, welche zu den Hauptaxen des Querschnittes parallel angenommen werden und folglich dieselbe Bedeutung haben, wie früher u, v, und M_t sei das Torsionsmoment oder das Moment in Beziehung auf die Axe des

Prismas oder der x der auf die verschiedenen Puncte des Querschnittes ω wirkenden Druckkräfte; so hat man:

$$M_t = \int_0^\omega (p_{xz}y - p_{xy}z)\, d\omega. \tag{5}$$

§. 249. Das allgemeine Verfahren, welches Poisson und Cauchy zur Umgehung einer bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis unmöglichen Integration angewandt haben, besteht darin, daß man für den Fall eines Körpers, dessen Transversaldimensionen gegen die übrigen gegebenen Größen im Allgemeinen sehr klein sind, die Druckkräfte p und die Verrückungen ξ, η, ζ in convergente Reihen entwickelt, welche nach den ganzen und positiven Potenzen der mit y, z bezeichneten Coordinaten fortlaufen, und successive die Glieder von einer höheren Ordnung gegen die von einer niedrigeren Ordnung vernachlässigt.

Es seien:

$$p^0,\ \frac{dp^0}{dy},\ \frac{d^2p^0}{dy\,dz},\ \ldots,\ \xi^0,\ \frac{d\xi^0}{dy},\ \ldots$$

die Werthe der Druckkräfte und Verrückungen und ihrer Differentialcoefficienten für den Mittelpunct des Querschnittes, so haben wir:

$$(6)\left\{\begin{aligned} p = p^0 &+ \frac{dp^0}{dy}y + \frac{dp^0}{dz}z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2p^0}{dy^2}y^2 + 2\frac{d^2p^0}{dydz}yz + \frac{d^2p^0}{dz^2}z^2\right) \\ &+ \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3p^0}{dy^3}y^3 + 3\frac{d^3p^0}{dy^2dz}y^2z + 3\frac{d^3p^0}{dydz^2}yz^2 + \frac{d^3p^0}{dz^3}z^3\right) + \text{rc.}\end{aligned}\right.$$

(7) und ξ, η, ζ, sowie X, Y, Z gleich ähnlichen Reihen.

§. 250. Wenn man diese Entwickelungen in die Gleichungen (1), (2), (3) substituirt und in beiden Theilen die Coefficienten derselben Potenzen oder Producte von y, z zusammennimmt, so sieht man, daß man in diesen drei Gleichungen nach Belieben die darin vorkommenden Größen durch dieselben Größen oder ihre Differentialcoefficienten einer beliebigen Ordnung mit dem Index 0 ersetzen kann, und wenn man sie in den Ausdruck des Torsionsmomentes substituirt und den Querschnitt als symmetrisch annimmt, so daß:

$$\int y^3 d\omega = 0,\quad \int yz^3 d\omega = 0,\quad \int y^3 z d\omega = 0,\quad \int z^3 d\omega = 0$$

ist; so hat man:

$$(8)\left\{\begin{aligned} M_t = {} & \frac{dp^0_{xz}}{dy}\int y^2 d\omega - \frac{dp^0_{xy}}{dz}\int z^2 d\omega \\ & + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^3p^0_{xz}}{dydz^2} - \frac{d^3p^0_{xy}}{dy^2dz}\right)\int y^2z^2 d\omega + \text{rc.}\end{aligned}\right.$$

Prisma mit einer rechteckigen Grundfläche.

§. 251. Es seien $2h$, $2i$ die zu den Axen der y, z parallelen Seiten der Grundfläche, die Trägheitsmomente des Querschnittes in Beziehung auf dieselben Axen:

$$\mu = \int z^2 d\omega = \tfrac{4}{3}hi^3,\quad \mu' = \int y^2 d\omega = \tfrac{4}{3}h^3i,$$

G der Werth der Größen a_{xx}, a_{xy}, ..., wenn sie alle einander gleich sind, θ die Torsion oder der Winkel, um welchen sich die Querschnitte für eine der Einheit gleiche Entfernung gegen einander gedreht haben, und endlich wollen wir die äußern Druckkräfte $= 0$ setzen; so werden die Gleichungen (4):

$$(9)\quad p_{yy}=0,\ p_{xy}=0,\ p_{yz}=0 \text{ für } y=\pm h, \text{ und für jedes } z,$$
$$(10)\quad p_{zz}=0,\ p_{xz}=0,\ p_{yz}=0 \text{ für } z=\pm i, \text{ und für jedes } y.$$

Wenn man in die ersten die Entwickelungen (6) substituirt, so erhält man Relationen wie folgende:

$$p^0+\frac{dp^0}{dy}h+\tfrac{1}{2}\frac{d^2p^0}{dy^2}h^2+\ldots=0,$$
$$\frac{dp^0}{dz}+\tfrac{2}{2}\frac{d^2p^0}{dydz}+\frac{3}{2\cdot 3}\frac{d^3p^0}{dy^2dz}h^2+\ldots=0, \text{ rc.};$$
$$p^0-\frac{dp^0}{dy}h+\tfrac{1}{2}\frac{d^2p^0}{dy^2}h^2-\ldots=0,$$
$$\frac{dp^0}{dz}-\tfrac{2}{2}\frac{d^2p^0}{dydz}+\frac{3}{2\cdot 3}\frac{d^3p^0}{dy^2dz}h^2+\ldots=0, \text{ rc.}$$

Durch successive Addition und Subtraction dieser Relationen erhält man die einfacheren:

$$(11)\left\{\text{für } \begin{matrix}p_{xy}\\ p_{yz}\\ p_{yy}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{aligned}&p^0+\frac{d^2p^0}{dy^2}\frac{h^2}{2}+\ldots=0,\quad \frac{dp^0}{dz}+\frac{d^3p^0}{dy^2dz}\frac{h^2}{2}+\ldots=0,\\ &\frac{d^2p^0}{dz^2}+\frac{d^4p^0}{dy^2dz^2}\frac{h^2}{2}+\ldots=0, \text{ rc.}\\ &\frac{dp^0}{dy}+\frac{d^3p^0}{dy^3}\frac{h^2}{6}+\ldots=0,\quad \frac{d^2p^0}{dydz}+\frac{d^4p^0}{dy^3dz}+\ldots=0, \text{ rc.}\end{aligned}\right.$$

und die Gleichungen (10) geben ebenso:

$$(12)\left\{\text{für } \begin{matrix}p_{xz}\\ p_{yz}\\ p_{zz}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{aligned}&p^0+\frac{d^2p^0}{dz^2}\frac{i^2}{2}+\ldots=0,\quad \frac{dp^0}{dy}+\frac{d^3p^0}{dydz^2}\frac{i^2}{2}+\ldots=0,\\ &\frac{d^2p^0}{dy^2}+\frac{d^4p^0}{dy^2dz^2}\frac{i^2}{2}+\ldots=0, \text{ rc.}\\ &\frac{dp^0}{dz}+\frac{d^3p^0}{dz^3}\frac{i^2}{6}+\ldots=0,\quad \frac{d^2p^0}{dydz}+\frac{d^4p^0}{dy^3dz}\frac{i^2}{6}+\ldots=0, \text{ rc.}\end{aligned}\right.$$

Man bemerkt, daß p_{yz} sowohl den Relationen (12), wie den Relationen (11) angehört, und man kann folglich p^0_{yz} aus der ersten jeder derselben ableiten und für die Differentialcoefficienten der zweiten Ordnung ihre aus der dritten Relation der andern Reihe abgeleiteten Werthe setzen. Auf diese Weise erhält man:

$$p^0_{yz}=-\frac{d^2p^0_{yz}}{dy^2}\frac{h^2}{2}+\ldots=-\frac{d^2p^0}{dz^2}\frac{i^2}{2}+\ldots=\frac{h^2i^2}{4}\frac{d^4p^0_{yz}}{dy^2dz^2}+\text{ rc.},$$

woraus folgt, daß p^0_{yz} nur von den Gliedern der dritten Ordnung abhängt und $= 0$ gesetzt werden kann, so daß man nach dem weiter oben Gesagten und der ersten der Gleichungen (2) hat:

$$(13) \qquad \frac{d\eta^0}{dz} + \frac{d\zeta^0}{dy} = 0,$$

d. h. das Gleiten auf einem Längendurchschnitte des Prismas hat eine Transversalcomponente $= 0$.

Diese Gleichung (13) drückt auch aus, daß zwei gerade Linien, welche in dem Querschnitte ω durch den Mittelpunct desselben senkrecht auf einander und zu den Axen der y und z ursprünglich parallel gezogen sind, auch nach der Verrückung der materiellen Puncte des Körpers auf einander senkrecht bleiben; aber jedes Glied, woraus der erste Theil der Gleichung (13) besteht, drückt die Winkelgröße der Rotation dieser beiden geraden Linien um die Axe des Prismas aus. Man hat folglich für die Torsion:

$$(14) \qquad \theta = \frac{d}{dx}\frac{d\zeta^0}{dy} = -\frac{d}{dx}\frac{d\eta^0}{dz},$$

so daß die Gleichungen (2) nach dem in §. 250 Gesagten geben:

$$(15) \qquad \frac{dp^0{}_{xz}}{dy} = a_{xz}\left(\theta + \frac{d^2\xi^0}{dydz}\right), \quad \frac{dp^0{}_{xy}}{dz} = a_{xy}\left(-\theta + \frac{d^2\xi^0}{dydz}\right),$$

woraus sich durch Elimination von $\frac{d^2\xi^0}{dydz}$ ergibt:

$$(16) \qquad \frac{1}{a_{xz}}\frac{dp^0{}_{xz}}{dy} - \frac{1}{a_{xy}}\frac{dp^0{}_{xy}}{dz} = 2\theta.$$

§. 252. Es kommt nun darauf an, noch eine andere Relation zwischen den in dem Ausdrucke (8) des Torsionsmomentes vorkommenden Größen $\frac{dp^0{}_{xz}}{dy}$, $\frac{dp^0{}_{xy}}{dz}$ zu erhalten, um die Werthe derselben als Functionen der Torsion θ substituiren zu können.

Zu dem Zwecke wollen wir die erste der Gleichungen (3), nämlich:

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = -\varrho X$$

anwenden, so gibt dieselbe nach dem in §. 250 Gesagten:

$$(17) \qquad \frac{d^3p^0{}_{xx}}{dx\,dy\,dz} + \frac{d^3p^0{}_{xy}}{dy^2dz} + \frac{d^3p^0{}_{xz}}{dy\,dz^2} = -\varrho\frac{d^2X^0}{dy\,dz};$$

aber die Relationen (11), (12) geben:

$$(18) \qquad \frac{dp^0{}_{xz}}{dy} = -\frac{d^3p^0{}_{xz}}{dyd^2z}\frac{i^2}{2} + \ldots, \quad \frac{dp^0{}_{xy}}{dz} = -\frac{d^3p^0{}_{xy}}{dy^2dz}\frac{h^2}{2} + \ldots,$$

woraus folgt:

$$(19) \qquad h^2\frac{dp^0{}_{xz}}{dy} + i^2\frac{dp^0{}_{xy}}{dz} = -\frac{h^2i^2}{2}\left(\frac{d^3p^0{}_{xz}}{dy\,d^2z} + \frac{d^3p_{xy}}{dy^2\,dz}\right)$$
$$+ \text{Glieder der sechsten Ordnung.}$$

Die im zweiten Theile zwischen den Parenthesen stehenden Glieder würden, obgleich sie mit der Größe h^2i^2 von der vierten Ordnung multiplicirt sind, für sich betrachtet, doch nicht hinweggelassen werden können; denn die Gleichungen (18) zeigen, daß sie von derselben Größenordnung sind, als die blos mit den Quadraten von h, i multiplicirten Glieder im ersten Theile. Aber die Gleichung (17) zeigt, daß ihre Summe hinweggelassen werden kann; denn wenn man diese daraus ableitet und sie in die Gleichung (19) substituirt, so erhält man:

$$(20)\qquad h^2 \frac{dp^0{}_{xz}}{dy} + i^2 \frac{dp^0{}_{xy}}{dz} = \frac{h^2 i^2}{2} \left(\frac{d^3 p^0{}_{xx}}{dx\, dy\, dz} + \varrho \frac{d^2 X^0}{dy\, dz} \right)$$
$$+ \text{ Glieder der sechsten Ordnung.}$$

Nun ist aber die im zweiten Theile dieser letzten Gleichung zwischen den Parenthesen stehende Größe nicht mehr von einer höheren Ordnung, als die im ersten Theile der Gleichung vorkommenden Differentialcoefficienten; denn die nach der Axe des Prismas wirkende Zug- oder Druckkraft $p^0{}_{xx}$ ändert sich in den drei Richtungen der x, y, z niemals plötzlich oder sehr rasch, und dasselbe gilt von der Componente der beschleunigenden Kraft X^0. Höchstens in Beziehung auf die Längenzugkraft und für ganz besondere Puncte, wie die, worauf einzelne Kräfte wirken, kann eine Ausnahme stattfinden. Was aber in diesen Puncten oder in deren unmittelbaren Nähe stattfindet, hat keinen merklichen Einfluß auf den übrigen Theil. Man kann folglich den zweiten Theil der letzten Gleichung ganz hinweglassen, und man erhält für die gesuchte Relation:

$$(21)\qquad h^2 \frac{dp^0{}_{xz}}{dy} + i^2 \frac{dp^0{}_{xy}}{dz} = 0,$$

welche in Verbindung mit (16) gibt:

$$(22)\qquad \frac{dp^0{}_{xz}}{dy} = \frac{2 i^2}{\dfrac{h^2}{a_{xy}} + \dfrac{i^2}{a_{xz}}}\,\theta,\quad \frac{dp^0{}_{xy}}{dz} = \frac{-2 h^2}{\dfrac{h^2}{a_{xy}} + \dfrac{i^2}{a_{yz}}}\,\theta.$$

§. 253. Für die Verhältnisse der Quadrate h^2, i^2 kann man das Verhältniß der Trägheitsmomente μ', μ setzen, und wenn man in den allgemeinen Ausdruck (8) des Torsionsmomentes substituirt und nur die beiden ersten Glieder beibehält; so bekommt man:

$$(23)\qquad M_t = \frac{4 \mu\mu'}{\dfrac{\mu}{a_{xz}} + \dfrac{\mu'}{a_{xy}}}\,\theta,$$

oder wenn $a_{xz} = a_{xy} = G$ ist:

$$(24)\qquad M_t = G\,\frac{2\mu \cdot 2\mu'}{\mu + \mu'}\,\theta,$$ Bew. der Gleich. (2)

oder auch:

$$(25)\qquad M_t = \tfrac{16}{3}\, G\, \frac{h^3 i^3}{h^2 + i^2}\,\theta.$$ (stimmt nicht+)

Wir wollen nun sehen, wodurch sich dieser Ausdruck von dem durch die alte Theorie gegebenen:

$$M_t = G\theta\,(\mu + \mu'),\quad \frac{dp^0{}_{xz}}{dy} = G\theta,\quad \frac{dp^0{}_{xy}}{dz} = -\,G\theta$$

+ und St. Venant [illegible]

unterscheidet. Wenn man diese Ausdrücke mit den Ausdrücken (15) vergleicht, so sieht man, daß die alte Theorie den Differentialcoefficienten $\frac{d^2\xi^0}{dy\,dz}$ unrichtig $= 0$ setzt; denn wenn man in einer der Gleichungen (15) für $\frac{dp^0_{xz}}{dy}$ oder $\frac{dp^0_{xy}}{dz}$ seinen Werth (22) setzt, so findet man:

$$(26) \qquad \frac{d^2\xi^0}{dy\,dz} = \frac{\frac{\mu'}{a_{xy}} - \frac{\mu}{a_{xz}}}{\frac{\mu'}{a_{xy}} + \frac{\mu}{a_{xz}}}\,\theta,$$

woraus folgt, daß nicht $\frac{d^2\xi^0}{dy\,dz} = 0$ sein kann, wofern die Torsion θ nicht selbst Null ist, oder die beiden Trägheitsmomente μ, μ' nicht einander gleich sind, wenn die Elasticität in den beiden Transversalrichtungen dieselbe ist.

Um nun zu erfahren, was die in der alten Theorie vernachlässigte Größe $\frac{d^2\xi^0}{dy\,dz}$ bedeutet, wollen wir $\frac{d^2\xi}{dy\,dz} = \gamma$ setzen, so ergibt sich daraus, wenn ξ mit y und z zugleich verschwindet:

$$\xi = \gamma yz,$$ (cf. p. 193)

welches die Gleichung einer windschiefen Fläche von der Art der doppelten Windmühlenflügel ist, und aus der Veränderung des Zeichens in den von den Axen der y und z gebildeten vier rechten Winkel sieht man, daß diese Fläche aus vier symmetrischen Theilen besteht, wovon zwei gegen die Ebene $\xi = 0$ hohl und die beiden andern erhaben sind. Nun ist aber ξ die kleine Größe, um welche sich ein materieller Punct eines Querschnittes von der ursprünglichen Ebene dieses Querschnittes entfernt hat. Der anfänglich ebene Querschnitt ist also windschief geworden, und γ mißt den Grad der Windschiefe, wenigstens wenn man sich auf wenig vom Mittelpuncte des Querschnittes entfernte Puncte beschränkt oder Größen der zweiten Ordnung vernachlässigt.

Die alte Theorie ist also unrichtig, indem sie das Windschiefwerden der Querschnitte unbeachtet läßt, und gibt zu große Momente; denn da sich die Elemente der Querschnitte gegen die Axe des Prismas neigen, sobald Kräfte wirken, so nehmen sie eine geringere Neigung gegen die materiellen Linien an, welche ursprünglich darauf senkrecht waren, als wenn alle Elemente in derselben Ebene blieben.

Zahlencorrection an dem Torsionsmomente.

§. 254. Diese Correction entsteht, wenn man in dem Ausdrucke (8) das Glied von der vierten Ordnung in Betracht zieht, welches wir in §. 253 hinweggelassen haben.

Wenn man aus den Relationen (10) und (11) die Werthe der Differentialcoefficienten der dritten Ordnung $\frac{d^3p''_{xz}}{dy\,dz^2}$, $\frac{d^3p'_{xy}}{dy\,dz^2}$ als Functionen der Differentialcoefficienten von einer niedrigern Ordnung ableitet, so müßte man setzen:

$$(27)\quad \begin{cases} p_{xz} = \left(1 - \frac{z^2}{i^2}\right)\left(p^0_{xz} + \frac{dp^0_{xz}}{dy}y + \frac{dp^0_{xz}}{dz}z + \ldots\right), \\ p_{xy} = \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)\left(p^0_{xy} + \frac{dp^0_{xy}}{dy}y + \frac{dp^0_{xy}}{dz}z + \ldots\right), \end{cases}$$

d. h. man müßte den Ausdruck (23) des Torsionsmomentes durch $\frac{2}{3}$ multipliciren, um denselben genau zu machen. Aber die Substitution der unbestimmten Größen für die Differentialcoefficienten der höheren Ordnungen als Functionen der aus den Gleichungen (10) und (11) abgeleiteten Werthe von einer niedrigeren Ordnung würde auf ungereimte Resultate führen, und da die Bedingungen $p_{xy} = p_{xz} = 0$ für $z = \pm i$, $y = \pm h$ ebensowohl erfüllt werden, wenn man den Ausdrücken (27) die Factoren $1 - \frac{z^{2n}}{i^{2n}}$, $1 - \frac{y^{2n}}{h^{2n}}$, als wenn man ihnen die Factoren $1 - \frac{z^2}{i^2}$, $1 - \frac{y^2}{h^2}$ gibt, ferner diese Druckkräfte vielleicht nur in sehr kleinen Entfernungen vom Umfange merklich abnehmen; so ist es möglich, daß die vorzunehmende Correction viel kleiner ist, als $\frac{2}{3}$, was sich nur durch Beobachtungen entscheiden läßt. Die bekannten Beobachtungen zeigen aber, daß die fragliche Correction gering sein muß, und namentlich scheinen die Beobachtungen von Savart anzudeuten, daß man 0,9 für den Correctionscoefficienten des Torsionsmomentes und überhaupt aller Formeln nehmen muß, worin die Constante G vorkommt.

Prisma, dessen Grundfläche eine Raute ist.

§. 255. Es seien h, i die zu den Axen der y und z parallelen halben Diagonalen der Raute, und wir wollen die äußern Druckkräfte wieder $= 0$ setzen, so geben die Gleichungen (4) auf den vier Seiten der Raute:

$$(28)\quad \begin{cases} -hp_{xz} - ip_{xy} = 0 \text{ für } y = h\left(1 - \frac{z}{i}\right) \text{ und jedes } z, \\ hp_{xz} + ip_{xy} = 0 \text{ für } y = -h\left(1 + \frac{z}{i}\right) \text{ und jedes } z, \\ hp_{xz} - ip_{xy} = 0 \text{ für } y = h\left(1 + \frac{z}{i}\right) \text{ und jedes } z, \\ -hp_{xz} + ip_{xy} = 0 \text{ für } y = -h\left(1 - \frac{z}{i}\right) \text{ und jedes } z. \end{cases}$$

Substituirt man die Entwickelungen (7) von p_{xz}, p_{xy}, ordnet in Beziehung auf z und setzt die Coefficienten derselben Potenzen von $z = 0$, so erhält man eine Reihe von Relationen, woraus sich einfachere ergeben, wenn man sie paarweise zusammen addirt, oder von einander abzieht. Wenn man in Beziehung auf y ordnete, so erhielte man

Gleichungen, welche von den früheren nur der Form nach verschieden wären. Von allen diesen Gleichungen nimmt man die folgenden:

$$(29)\begin{cases} \dfrac{dp^0_{xz}}{dy} + \dfrac{h^2}{6}\dfrac{d^3p^0_{xz}}{dy^3} + \ldots = 0, \quad \dfrac{dp^0_{xy}}{dz} + \dfrac{i^2}{6}\dfrac{d^3p^0_{xz}}{dz^3} + \ldots = 0, \\ -\dfrac{h^2}{i^2}\dfrac{dp^0_{xz}}{dy} + \dfrac{dp^0_{xz}}{dz} - \frac{3}{6}\dfrac{h^4}{i^2}\dfrac{d^3p^0_{xz}}{dy^3} + \dfrac{h^2}{2}\dfrac{d^3p_{xy}}{dy^2\,dz} + \ldots = 0, \\ -\dfrac{h^4}{6i^4}\dfrac{d^3p^0_{xz}}{dy^3} + \dfrac{h^2}{2i^2}\dfrac{d^3p^0_{xy}}{dy^2\,dz} - \dfrac{h^2}{2i^2}\dfrac{d^3p^0_{xz}}{dy\,dz^2} + \frac{1}{6}\dfrac{d^3p^0_{xz}}{dz^3} + \ldots = 0, \end{cases}$$

und wenn man damit die Gleichung (17) verbindet; so kann man alle unbekannten Größen eliminiren, ausgenommen die Größen:

$$\frac{dp^0_{xz}}{dy}, \quad \frac{dp^0_{xy}}{dz} \text{ und } \frac{d^3p^0_{xx}}{dx\,dy\,dz} + \varrho\,\frac{d^2X_0}{dy\,dz}.$$

Diese letzte Summe ist wie in der Gleichung (20) mit $h^2 i^2$ multiplicirt, und wenn man sie nach dem in §. 253 Gesagten hinwegläßt; so erhält man:

$$3h^2\,\frac{d^1p_{xz}}{dy} + 3i^2\,\frac{dp^0_{xy}}{dz} = 0,$$

d. h. genau dieselbe Relation (21), welche wir für das Rechteck als Grundfläche oder Querschnitt gefunden haben. Hieraus folgt, daß man für ein Prisma, dessen Grundfläche oder Querschnitt eine Raute ist, dieselben Ausdrücke (24) und (26) des Torsionsmomentes und des Windschiefwerdens als für ein Prisma mit rechteckiger Grundfläche hat.

Ueber den Zustand des Gleichgewichtes einer doppelt gekrümmten elastischen Stange, wenn die Verrückungen ihrer materiellen Puncte in Folge der darauf wirkenden Kräfte nicht sehr klein sind.

§. 256. Binet und Wantzel haben die Integrale der Differentialgleichungen der elastischen Curve von doppelter Krümmung gefunden, welche durch die Biegung und Torsion einer ursprünglich geraden cylindrischen Stange entsteht, auf deren Endpuncte allein Kräfte wirken. Diese Integrale sind auf beliebig große Verrückungen der materiellen Puncte anwendbar, wofern die Elasticitätsgrenzen nicht überschritten werden, und setzen auch den Poisson'schen Lehrsatz: daß das Moment, welches die Torsion hervorzubringen strebt, in der ganzen Ausdehnung der Stange constant ist, voraus. Wir wollen jetzt die Differentialgleichungen für den Zustand des Gleichgewichtes einer elastischen Stange in dem allgemeinen Falle und für beliebige Verrückungen ihrer materiellen Theile aufstellen, und dann zeigen, innerhalb welcher Grenzen der Lehrsatz von Poisson und die Gleichungen, woraus er denselben abgeleitet hat, anwendbar sind.

§. 257. In dem ursprünglichen Zustande der Stange seien:

x_0, y_0, z_0 die rechtwinkligen Coordinaten eines Punctes M der Axe der Stange oder der krummen Linie, welche die Schwerpuncte der auf dieser Axe normalen Querschnitte verbindet, in Beziehung auf drei feste Ebenen;

s_0 die Länge des Bogens derselben Curve bis zu dem Puncte M;

ϱ_0 ihr Krümmungshalbmesser für denselben Punct M;

$\frac{ds_0}{\tau_0}$ der Winkel, welchen zwei Krümmungsebenen mit einander bilden, wovon die eine dem Puncte M und die andere einem unendlich wenig davon entfernten Puncte entspricht;

x, y, z, s, ϱ und $\frac{ds}{\tau}$ die Werthe derselben Größen für denselben materiellen Punct M der Axe für den gesuchten Gleichgewichtszustand;

ω der durch den Punct M gehende Querschnitt;

m ein Punct desselben; (u, v)

$d\omega$ das diesem Puncte m entsprechende Element;

u, v die Coordinaten des Punctes m in Beziehung auf die beiden Hauptaxen Mu, Mv des Querschnittes;

$\mu = \int_0^\omega v^2 d\omega$, $\mu' = \int_0^\omega u^2 d\omega$ die Trägheitsmomente von ω in Beziehung auf Mu, Mv und $\mu'' = \frac{2\mu\mu'}{\mu + \mu'}$;

e der Winkel, welchen die Hauptaxe Mv ursprünglich auf demselben Querschnitte mit der Krümmungsebene auf der Seite der Verlängerung des Krümmungshalbmessers ϱ_0 bildet;

$e + \varepsilon$ der Winkel, welchen die Linie Mv nach der Verrückung mit der neuen Krümmungsebene bildet, so daß ε die Winkelverrückung der Krümmungsebene oder des Krümmungshalbmessers in Beziehung auf die materiellen Puncte des Querschnittes ω ist;

M_x, M_y, M_z die drei Summen der Momente aller äußern Kräfte, welche in dem zweiten Zustande der Stange auf die zwischen dem Querschnitte ω und einem ihrer Enden liegenden Puncte wirken, in Beziehung auf drei durch den Punct M zu den Coordinatenaxen gezogene Parallelen;

M_t, M_u, M_v die drei Summen der Momente derselben Kräfte in Beziehung auf die Tangente im Puncte M der Axe der Stange und auf die Hauptaxen Mu, Mv des Querschnittes;

E und G die beiden bekannten Elasticitätscoefficienten, durch welche man die positive oder negative verhältnißmäßige Ausdehnung und das Transversalgleiten der Theilchen eines elastischen Körpers multipliciren muß, um für die Flächeneinheit die diesen Bewegungen entgegengesetzten innern Widerstände zu erhalten, wo gewöhnlich $G = \frac{2}{5} E$ ist;

δ die verhältnißmäßige Ausdehnung im Puncte m parallel zu der Axe, und

φ die Torsion oder φds der kleine Winkel, um welchen sich während der Verrückung die um die Länge ds von einander abstehenden Querschnitte ω und ω' gegenseitig gedreht haben.

Zwischen den beiden Querschnitten ω und ω' wollen wir uns die Stange in Fasern oder dünne Cylinder zerlegt denken, welche zu der Axe genau oder nahezu parallel sind, je nachdem die Querschnitte gleich oder etwas verschieden sind, und die Faser betrachten, deren Grundfläche das Element $d\omega$ ist, dessen Mittelpunct in m liegt.

Da die beiden Querschnitte ursprünglich Ebenen sind, deren Erweiterungen sich in einer dem Krümmungshalbmesser ϱ_0 gleichen Entfernung von der Axe schneiden, so verhält sich die Länge ds_0 der Centralfaser zu der Länge der in Rede stehenden Faser wie ϱ_0 zu der Summe aus diesem Krümmungshalbmesser und der Entfernung des Punctes m von einer durch den Punct M auf dem Querschnitte senkrecht auf ϱ_0 gezogenen geraden Linie. Diese Entfernung wird aber offenbar ausgedrückt durch:

$$u \sin. e + v \cos. e,$$

und folglich wird die Länge der Faser in ihrem ursprünglichen Zustande ausgedrückt durch:

$$(1) \qquad ds_0 \left(1 + \frac{u \sin. e + v \cos. e}{\varrho_0}\right).$$

Nach den Verrückungen der materiellen Puncte der Stange haben sich die ursprünglich ebenen Querschnitte derselben etwas gegen die Axe geneigt und sind windschief geworden, welchen Einfluß auf das Torsionsmoment wir früher in Rechnung gebracht haben, wovon wir aber jetzt, sowie von dem der Schiefe der Axe gegen die Richtung der Fasern abstrahiren wollen. Die Länge der Faser nach der Verrückung wird also ausgedrückt durch:

$$(2) \qquad ds \left[1 + \frac{u \sin. (e + \varepsilon) + v \cos. (e + \varepsilon)}{\varrho}\right].$$

Die verhältnißmäßige Ausdehnung ergibt sich, wenn man den Unterschied zwischen den Ausdrücken (2) und (1) durch (1) dividirt, bei welcher Division man aber den Ausdruck (1) auf ds_0 reduciren kann; denn die Transversaldimensionen, wovon u und v abhängen, werden immer gegen den Krümmungshalbmesser ϱ_0 als sehr klein vorausgesetzt. Auch wollen wir der Einfachheit wegen den gewöhnlich sehr geringen Einfluß der Ausdehnung der Centralfaser unbeachtet lassen, oder $\frac{ds}{ds_0} = 1$ setzen, wodurch sich ergibt:

$$(3) \quad \delta = u \left[\frac{\sin. (e + \varepsilon)}{\varrho} - \frac{\sin. e}{\varrho_0}\right] + v \left[\frac{\cos. (e + \varepsilon)}{\varrho} - \frac{\cos. e}{\varrho_0}\right].$$

Ferner wollen wir annehmen, daß der Seitendruck der Fasern auf einander nicht stattfinde oder unbeachtet bleiben könne, so daß diese Fasern der Verlängerung gerade so widerstehen, wie wenn sie unabhängig von einander wären; so wird der Widerstand der betrachteten Faser nach der Bedeutung des Coefficienten E ausgedrückt durch:

$$(4) \qquad E d \cdot \delta\omega.$$

Was die Torsion φds oder die relative Drehung der Querschnitte ω und ω' anlangt, so wird sie erhalten, wenn man bemerkt, daß ε die Größe ist, um welche sich ω gegen die Krümmungsebene in M gedreht hat, und $\varepsilon + d\varepsilon$ die Größe, um welche sich ω' gegen die um ds von M entfernte Krümmungsebene gedreht hat. Wenn man also zu $d\varepsilon$ die Größe $\frac{ds}{r} - \frac{ds_0}{r_0}$, um welche sich diese beiden Ebenen gegen einander gedreht haben, addirt; so erhält man die ganze relative Dre-

11" folgt nicht strenge nur aus der St. Venant'schen Theorie

hung der beiden Querschnitte, und wenn man den Unterschied zwischen $\frac{ds}{ds_0}$ und der Einheit wieder unbeachtet läßt; so erhält man:

$$\varphi = \frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0}. \tag{5}$$

Wenn man diese Größe durch den Coefficienten G und durch $2\mu'' = \frac{4\mu\mu'}{\mu + \mu'}$ multiplicirt, so muß für das Gleichgewicht das Product dem Momente M_t der äußern Kräfte gleich sein; denn die früheren Betrachtungen über diesen Gegenstand lassen sich leicht auf Winkelverrückungen von einer beliebigen Größe anwenden. Die beiden andern Momente M_u, M_v derselben Kräfte in Beziehung auf die Linien Mu, Mv müssen resp. den Momenten der Faserwiderstände (4) für alle Elemente $d\omega$ und in Beziehung auf dieselben Axen gleich sein. Wenn man also für δ seinen Werth (3) setzt, so erhält man wegen $\int_0^\omega u v d\omega = 0$ die drei Gleichungen des Gleichgewichtes: *)

$$(6) \quad \begin{cases} M_u = E\mu \left[\dfrac{\cos.(e+\varepsilon)}{\varrho} - \dfrac{\cos. e}{\varrho_0}\right], \\ M_v = E\mu' \left[\dfrac{\sin.(e+\varepsilon)}{\varrho} - \dfrac{\sin. e}{\varrho_0}\right], \\ M_t = 2G\mu'' \left[\dfrac{d\varepsilon}{ds} + \dfrac{1}{\tau} - \dfrac{1}{\tau_0}\right]. \end{cases}$$

§. 258. Wenn man die beiden ersten dieser Gleichungen resp. mit $\cos. e$ und $\sin. e$ multiplicirt und dann die beiden Producte zu einander addirt, hierauf die zweite Gleichung mit $\cos. e$ und die erste mit $\sin. e$ multiplicirt und endlich das erste Product von dem zweiten abzieht; so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{\cos.\varepsilon}{\varrho} = \dfrac{1}{\varrho_0} + \dfrac{M_u}{E\mu}\cos. e + \dfrac{M_v}{E\mu'}\sin. e; \\ \dfrac{\sin.\varepsilon}{\varrho} = \dfrac{M_v}{E\mu'}\cos. e - \dfrac{M_u}{E\mu}\sin e, \end{cases}$$

woraus der unbekannte Winkel ε eliminirt wird, wenn man zum Quadrate erhebt und addirt, und da $d\varepsilon = \frac{d \cdot \sin.\varepsilon}{\cos.\varepsilon}$ ist, so kann man diesen Winkel auch aus der dritten der Gleichungen (6) eliminiren Durch diese Elimination von ε ergibt sich alsdann:

$$(8) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\varrho^2} = \dfrac{1}{\varrho^2_0} + \dfrac{2}{\varrho_0}\left(\dfrac{M_u}{E\mu}\cos. e + \dfrac{M_u}{E\mu'}\sin. e\right) + \left(\dfrac{M_u}{E\mu}\right)^2 + \left(\dfrac{M_v}{E\mu'}\right)^2, \\ \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{\tau_0} + \dfrac{M_t}{2G\mu''} - \dfrac{\dfrac{d}{ds}\cdot\varrho\left(\dfrac{M_v}{E\mu'}\cos. e - \dfrac{M_u}{E\mu}\sin. e\right)}{\varrho\left(\dfrac{1}{\varrho_0} + \dfrac{M_u}{E\mu}\cos. e + \dfrac{M_v}{E\mu'}\sin. e\right)}, \\ \text{und} \qquad ds = ds_0. \end{cases}$$

Dieses sind die drei Differentialgleichungen, von deren Integration die Bestimmung der Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punctes der Axe der Stange nach der Verrückung ihrer materiellen Puncte als Function seiner ursprünglichen Coordinaten, oder einer derselben, z. B. x_0, oder einer andern unabhängigen Veränderlichen, wie etwa des Bogens s_0, abhängt. Denn ϱ, τ, ds, M_l, M_u, M_v lassen sich als Functionen der gesuchten neuen Coordinaten, ihrer Differentiale der drei ersten Ordnungen und des vermittelst der Gleichung (7) eliminirten Winkels ε ausdrücken, während sich alle übrigen Größen vermöge der Kenntniß der ursprünglichen Form der Curve und der anfänglichen Lage der Hauptaxen der Querschnitte als Function der unabhängigen Veränderlichen ausdrücken lassen.

§. 259. Diese drei gleichzeitigen Differentialgleichungen, welche von der dritten Ordnung und nicht linear sind, vereinfachen sich: 1) wenn der Querschnitt überall ein Kreis, ein Quadrat oder eine andere Figur ist, deren Axen sämmtlich Hauptaxen sind. Alsdann ist $\mu = \mu' = \mu''$, und da man die ursprüngliche Richtung des Krümmungshalbmessers auf dem Querschnitte zur Axe Mv nehmen kann; so kann man $e = 0$ machen; aber ε ist nicht Null, und die Integration der fraglichen Differentialgleichungen bleibt mit Schwierigkeiten verbunden. 2) Wenn die Stange ursprünglich gerade ist. Alsdann ist $\frac{1}{\varrho_0} = 0$, und da die ursprüngliche Krümmungsebene in jedem Puncte willkürlich angenommen werden kann, so kann man für die ganze Stange eine durch ihre geradlinige Axe gelegte Ebene für diese Krümmungsebene annehmen, wodurch auch $\frac{1}{\tau_0} = 0$ wird; allein e, ε bleiben und die Integration kann noch Schwierigkeiten haben.

Dieselben Gleichungen vereinfachen sich weit mehr, wenn die Verrückungen $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ sehr klein sind, sowohl als ε; denn alsdann kann man in den drei Momenten M die alten Coordinaten für die neuen setzen, und da die ersten Theile der Gleichungen linear werden, so erhält man das Integral ganz einfach, worin sich alles durch die unabhängigen Veränderlichen s und s_0 ausdrücken läßt und (uy), (vy), (ly), (uz), (vz), (lz) die Winkel bezeichnen, welche die Axen der M_u, M_v, M_l mit denen der y und z bilden, nämlich:

$$x - x_0 = \int \frac{dz_0}{ds} ds \int \left[\frac{M_u cos.(uy)}{E\mu} + \frac{M_v cos.(vy)}{E\mu'} + \frac{M_l\, cos.(ly)}{2G\mu''}\right] ds$$
$$- \int \frac{dy_0}{ds} ds \int \left[\frac{M_u cos.(uz)}{E\mu} + \frac{M_v cos.(vz)}{E\mu'} + \frac{M_l\, cos.(lz)}{2G\mu''}\right] ds.$$

Zwei ähnliche Ausdrücke erhält man für $y - y_0$, $z - z_0$, und folglich werden die Verrückungen durch Quadraturen erhalten.

§. 260. Die in Rede stehenden Gleichungen vereinfachen sich noch weit mehr, wenn die beiden vorhin erwähnten Umstände zu gleicher Zeit stattfinden, d. h. wenn die Stange ursprünglich gerade und ihr Querschnitt a eine Figur ist, für welche sämmtliche Trägheitsmomente μ einander gleich sind. Alsdann ist es am bequemsten, den Durchschnitt der Krümmungsebene der durch die Verrückungen erzeugten Curve auf jedem Querschnitte zur Axe Mv zu nehmen, was $e + \varepsilon = 0$ gibt, und eine einzige Krümmungsebene für die ganze Ausdehnung der Stange in ihrem ursprünglichen Zustande, weil die Winkel aus den beiden ersten der Gleichungen (6) verschwinden, während der Winkel ε in der dritten dieser Gleichungen immer noch vorkommt. Setzt man:

$$(9) \qquad 2G\mu\left(\frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{1}{\tau}\right) = -\theta,$$

so reduciren sich diese Differentialgleichungen auf:

$$(10) \qquad \frac{E\mu}{\varrho} = M_u, \quad 0 = M_v, \quad \theta = M_t.$$

Wenn man sie resp. mit den Cosinussen der drei Winkel multiplicirt, welche die Normale Mu auf der Krümmungsebene, die Verlängerung Mv des Krümmungshalbmessers und die Tangente an der Curve mit der Axe der x bilden und endlich die drei Producte zusammen addirt; so ist der zweite Theil der resultirenden Gleichung nichts anders, als das Moment M_x der äußern Kräfte in Beziehung auf eine durch den Punct M zu der Axe der x gezogenen Parallele. Man hat folglich:

$$(11) \qquad E\mu\,\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3} - \theta\,\frac{dx}{ds} = M_x.$$

Diese Gleichung und die ähnlichen für die Momente in Beziehung auf Parallelen zu der Axe der y und der z sind von Lagrange zuerst aufgestellt und vermittelst der Theorie von Binet durch Hinzufügung der zweiten Glieder ergänzt, woraus Poisson endlich durch Differentiation und Addition seinen Lehrsatz $d\theta = 0$ oder $M_t = const.$ abgeleitet hat. Dieses sind auch die Gleichungen, welche Binet und Wantzel integrirt haben, wenn μ constant ist, und die in den zweiten Theilen vorkommenden Kräfte nur an den Enden der Stange wirken, und ihre Analyse ist alsdann auf die Bedingung des Gleichgewichtszustandes der Stange anwendbar, wenn man noch die Gleichung (9) in Betracht zieht.

§. 261. Aber abgesehen von dem im Anfange des gegenwärtigen §. angeführten Falle kann man sagen, daß das Moment M_v der Kräfte in Beziehung auf den Krümmungshalbmesser niemals beständig $= 0$ ist, sondern im Allgemeinen eine endliche Größe hat, sowohl als das Moment M_t in Beziehung auf die Tangente der Axencurve und das Moment M_u in Beziehung auf die Normale der Krümmungsebene. Der Lehrsatz $M_t = const.$ und $M_v = 0$ findet also nur in dem Falle statt, wo die Stange ursprünglich gerade und $\mu = \mu'$ ist, und in jedem andern Falle sind die Gleichungen (10) und (11) unvollständig.

Wenn Poisson diesen Lehrsatz und die Gleichungen (11) auf eine allgemeine Weise aufzustellen scheint, so rührt dieses daher, daß er das dritte Moment M_v unbeachtet läßt, welches eine krumme Stange transversal zu ihrer jedesmaligen Krümmungsebene zu biegen strebt, so daß ihre Krümmungsebene verändert wird. Lagrange hat nur das Moment M_u in Betracht gezogen, welches die Krümmung in ihrer Ebene zu vermehren oder zu vermindern strebt, was bei eben bleibenden Curven hinreichend ist. Binet hat das Moment M_1 hinzugefügt, welches eine Torsion zu bewirken strebt, und dieses ist in dem vorhin angeführten besonderen Falle hinreichend, wenn man nur die allgemeinen Gleichungen der Axe der Stange sucht; aber in dem allgemeinen Falle, wo die doppelt gekrümmte Stange ursprünglich krumm war, oder wo bei einer geradlinigen Axe der Querschnitt nicht eine der Formen hat, welche $\mu = \mu'$ geben, ist es durchaus nothwendig, auch das dritte Moment M_v, welches auf den beiden andern senkrecht ist, und die gerade Stange schief gegen die Hauptaxen ihrer Querschnitte zu biegen oder den Krümmungshalbmesser auf der Ebene der Querschnitte der krummen Stange zu drehen strebt, in die Rechnung einzuführen, wo aber auch erfordert wird, daß man den Winkel ε in Betracht zieht, welcher diese Rotation mißt, namentlich in allen den Fällen, wo man die Verrückungen der außerhalb der Axe liegenden materiellen Puncte des Körpers und den Werth gewisser Constanten der definitiven Gleichungen der Axe bestimmen will.

§. 262. Wir haben vorhin bemerkt, daß der Poisson'sche Lehrsatz: daß das Moment der Torsion in der ganzen Ausdehnung einer elastischen Stange constant ist, nur dann stattfindet, wenn das Moment der Kräfte in Beziehung auf den Krümmungshalbmesser beständig $= 0$ ist. Diese Bedingung wird aber nur für alle Systeme von Kräften erfüllt, welche auf die Endpuncte und die verschiedenen andern Puncte der Stange stetig wirken können, wenn die Axe der Stange in ihrem ursprünglichen Zustande gerade ist und ihre Querschnitte sämmtlich regelmäßige Figuren sind, d. h. solche, für welche alle in ihrer Ebene durch ihren Schwerpunct gezogene gerade Linien Hauptaxen der Trägheit sind. Später werden wir sehen, daß diese Bedingung auch noch erfüllt werden kann, wenn die ursprüngliche Axe der Stange eine Schraubenlinie ist, aber blos für besondere Systeme von Kräften.

Wir wollen nun noch mehrere Bemerkungen hinzufügen und verschiedene Fälle betrachten, worin man den Gleichgewichtszustand der Stange bei Verrückungen ihrer materiellen Theilchen von beliebiger Größe leicht bestimmen kann.

§. 263. Es seien M_ϱ, M_n die Totalmomente der verschiedenen äußeren Kräfte, welche nach den Verrückungen zwischen dem Puncte M der Stange und einem Ende derselben wirken, in Beziehung auf den Krümmungshalbmesser der Axe im Puncte M und in Beziehung auf eine auf der Krümmungsebene senkrechte gerade Linie, so daß M_n, $-M_\varrho$ dieselbe Bedeutung haben wie M_u, M_v in §. 260, und wir wollen diese beiden letzten Bezeichnungen für die Momente in Beziehung auf die Hauptträgheitsaxen des Querschnittes im Puncte M beibehalten, wenn es nur zwei derselben gibt. Ferner sei:

$$X = dy\,d^2z - dz\,d^2y, \quad Y = dz\,d^2x - dx\,d^2z,$$
$$Z = dx\,d^2y - dy\,d^2x,$$

so hat man, wenn M_x, M_y, M_z wieder die Momente in Beziehung auf die durch den Punct M zu den Coordinatenaxen gezogenen Parallelen bezeichnen:

$$(12)\quad \begin{cases} M_n = \frac{\varrho X}{ds^3} M_x + \frac{\varrho Y}{ds^3} M_y + \frac{\varrho Z}{ds^3} M_z, \\ M_\varrho = M_x \frac{\varrho}{ds} d\frac{dx}{ds} + M_y \frac{\varrho}{ds} d\frac{dy}{ds} + M_z \frac{\varrho}{ds} d\frac{dz}{ds}, \\ M_t = \frac{dx}{ds} M_x + \frac{dy}{ds} M_y + \frac{dz}{ds} M_z. \end{cases}$$

Zunächst wollen wir bemerken, daß das Moment M_ϱ in dem allgemeinen Falle, wo es nicht $= 0$ ist, mit dem Torsionsmomente M_t oder θ durch eine Relation verbunden ist, welche den Poisson'schen Lehrsatz $dM_t = 0$ ersetzt. Diese allgemeine Relation, welche Wantzel gefunden hat, ist folgende:

$$(13)\qquad \frac{dM_t}{ds} = \frac{M_\varrho}{\varrho}.$$

Wenn man nämlich die dritte der Gleichungen (12) differentiirt, so erhält man unter Berücksichtigung der zweiten dieser Gleichungen und der Relation:

$$\frac{dx}{ds} dM_x + \frac{dy}{ds} dM_y + \frac{dz}{ds} dM_z = 0,$$

genau die von Wantzel angegebene Gleichung.

Ferner wollen wir bemerken, daß man in allen Fällen, wo der Querschnitt eine regelmäßige Figur ist, wieder wie in §. 260 die Größe $e + \varepsilon = 0$ setzen kann, wodurch sich die Gleichungen (6) auf folgende reduciren:

$$(14)\quad \begin{cases} M_n = E\mu\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{cos.\ \varepsilon}{\varrho_0}\right), \quad M_\varrho = E\mu \frac{sin.\ \varepsilon}{\varrho_0}, \\ M_t = 2G\mu\left(\frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0}\right). \end{cases}$$

Aber so lange nicht $M_\varrho = 0$ ist, kann die Integration schwierig bleiben.

§. 264. Der Fall, worin Binet und Wantzel die Gleichungen integrirt haben, ist der, wo nicht blos $\frac{1}{\varrho_0} = 0$, $\frac{1}{\tau_0} = 0$, sondern auch $\mu = const.$ ist, und die Kräfte nur auf das Ende der Stange wirken, so daß man, wenn man sie auf eine einzige Kraft g und auf ein auf ihrer Richtung senkrechtes Kräftepaar h zurückführt und diese Richtung zur Axe der z nimmt, folgende Gleichungen hat:

$$M_x = gy, \quad M_y = -gx, \quad M_z = h.$$

§. 265. Die Integration ist auch in dem Falle noch leicht, wo sich der Querschnitt der Stange von einem Puncte der ursprünglich geradlinigen Axe derselben zum andern sowohl der Größe als Form nach ändert, aber stets regelmäßig bleibt, und die Kräfte sich auf Kräftepaare zurückführen lassen, welche in parallelen Ebenen liegen. Alsdann ist μ veränderlich, das Kräftepaar h kann sich ebenfalls stetig ändern, und wenn man die Axe der z wieder auf den Ebenen der Kräftepaare senkrecht nimmt; so hat man:

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = h, \quad \frac{1}{\varrho_0} = 0, \quad \frac{1}{\tau_0} = 0,$$

und die Gleichungen (12) und (14) geben:

$$M_\varrho = 0 = h \frac{\varrho}{ds} d \frac{dz}{ds}, \quad M_t = h \frac{dz}{ds} \text{ (constant).}$$

Die Curve, welche die Axe der Stange ist, bildet folglich mit der Ebene der Kräftepaare einen constanten Winkel. Bezeichnet man diesen Winkel mit φ und berücksichtigt die Gleichung:

$$M_z = M_n \frac{\varrho X}{ds^3} + M_t \frac{dz}{ds},$$

so hat man zur Bestimmung von x, y, z als Functionen von s die drei Differentialgleichungen:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dz}{ds} = \sin. \varphi, \quad dx^2 + dy^2 = ds^2 \cos.^2 \varphi, \\ & dx d^2 y - dy d^2 x = \frac{h ds^3}{E\mu} \cos.^2 \varphi. \end{aligned} \right.$$

Wenn man die zweite differentiirt, so erhält man:

$$d^2 x = -\frac{h}{E\mu} dy ds, \quad d^2 y = \frac{h}{E\mu} dx ds,$$

und wenn man in diesen beiden letzten Gleichungen:

dy durch $\sqrt{ds^2 \cos.^2 \varphi - dx^2}$, dx durch $-\sqrt{ds^2 \cos.^2 \varphi - dy^2}$ ersetzt, so lassen sie sich integriren, und wenn $s = 0$ für $z = 0$ angenommen wird; so hat man:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & x = -\cos. \varphi \int ds \sin. \int \frac{hds}{E\mu}, \\ & y = \cos. \varphi \int ds \cos. \int \frac{hds}{E\mu}, \quad z = s \sin. \varphi. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen der Axe werden also durch Quadraturen erhalten, welche davon abhängen, was für eine Function $\frac{h}{E\mu}$ von s ist.

§. 266. Wenn $\frac{h}{E\mu}$ constant ist, und c, c', c'', c''' die willkürlichen Constanten bezeichnen, so erhält man die Gleichungen:

$$x = c'' + \frac{E\mu \cos. \varphi}{h} \cos. \left(c + \frac{hs}{E\mu}\right),$$

$$y = c''' + \frac{E\mu \cos. \varphi}{h} \sin. \left(c' + \frac{hs}{E\mu}\right), \quad z = s \sin. \varphi,$$

welche einer Schraubenlinie angehören. Schon Wantzel hat bemerkt, daß die Curve von doppelter Krümmung, welche die Axe einer ursprünglich cylinderschen Stange unter der Wirkung eines Kräftepaares darstellt, nothwendig eine Schraubenlinie ist. Dieser Satz ist eine

Verallgemeinerung des schon von Euler gefundenen Resultates: daß, wenn die ebenerwähnte Curve eben ist, sie nur ein Kreisbogen sein kann.

§. 267. Wenn die Stange mit ihrem einen Ende eingeklemmt ist, so kann man dasselbe zum Anfangspuncte der Coordinaten und eine durch die ursprüngliche Richtung der Axe der Stange gelegte Ebene zur Ebene der yz nehmen. Die Constanten müssen alsdann so bestimmt werden, daß man für $s = 0$ hat $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{dx}{ds} = 0$, $\frac{dy}{ds} = cos.\ \varphi$, und die Gleichungen der Axencurve werden:

$$x + \frac{E\mu\ cos.\ \varphi}{h} = \frac{E\mu\ cos.\ \varphi}{h} cos.\ \frac{hs}{E\mu},$$

$$y = \frac{E\mu\ cos.\ \varphi}{h} sin.\ \frac{hs}{E\mu},\quad z = s\ sin.\ \varphi.$$

Der Cylinder, auf welchen die Schraubenlinie gewickelt ist, hat folglich eine zur Ebene des Kräftepaares parallele Grundfläche, deren Mittelpunct von der ursprünglichen Axe der Stange und von dem Einklemmungspuncte um eine ihrem Halbmesser $\frac{E\mu}{h} cos.\ \varphi$ gleiche Länge entfernt ist, und die constante Neigung φ des Schraubenfadens gegen die Grundfläche ist der Neigung der ursprünglichen Axe gegen die Ebene des Kräftepaares gleich.

§. 268. Wenn die Axe der Stange bestimmt ist und man will die Lage der außerhalb dieser Axe befindlichen materiellen Puncte der Stange wissen, so muß man die Werthe des Winkels ε bestimmen. Vermittelst der Differentialgleichungen erhält man zunächst leicht:

$$(17)\qquad \frac{1}{\tau} = \frac{h\ sin.\ \varphi}{E\mu};$$

und wenn man in die Gleichung:

$$2G\mu\left(\frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{1}{\tau}\right) = M_{,} = h\ sin.\ \varphi$$

substituirt, so hat man:

$$\varepsilon = \left(\frac{E}{2G} - 1\right) sin.\ \varphi \int \frac{hds}{E\mu},$$

oder wenn $\frac{h}{E\mu}$ constant ist und man die ursprüngliche und wirkliche Krümmuugsebene der geraden Stange durch die Axe der x legt, so daß für den Einklemmungspunct $\varepsilon = 0$ ist; so hat man:

$$\varepsilon = \left(\frac{E}{2G} - 1\right) \frac{hz}{E\mu}.$$

Die materiellen geraden Linien, welche ursprünglich in der Ebene eines Querschnittes lagen, bilden jetzt mit den Krümmungsebenen der Schraubenlinie den Winkel ε, wodurch die neuen Lagen der verschiedenen Puncte der Querschnitte vollständig bestimmt sind.

§. 269. Eben so leicht könnte man die Werthe von:

$$\frac{1}{\tau} \text{ und } \varepsilon = \int \left(\frac{M_1}{2G\mu} - \frac{1}{\tau} \right) ds$$

in dem Falle in §. 264 bestimmen. Zu diesem Zwecke wollen wir bemerken, daß, wenn die Stange ursprünglich gerade ist, einen regelmäßigen Querschnitt hat und blos am einen Ende eingeklemmt, aber an dem andern frei oder blos unterstützt ist, zur Bestimmung der Constanten der Gleichung der Axe die Berechnung von ε nicht nothwendig ist; denn die Form und Lage dieser Axe läßt sich alsdann aus den von Binet ergänzten und integrirten Lagrange'schen Differentialgleichungen vollständig ableiten. Aber im Allgemeinen ist die Einführung des Winkels ε unerläßlich, z. B. wenn die Stange auch gerade und von einem regelmäßigen Querschnitte ist, aber ihr Querschnitt an einer zweiten Stelle, wie an der Einklemmungsstelle, eine gewisse Polarität darbieten muß, wie wenn sie z. B. einen quadratischen Querschnitt hätte, und irgendwo durch ein quadratisches Loch von denselben Dimensionen als dieser Querschnitt gehen müßte. Um alsdann die Werthe der unbestimmten Kräfte zu finden, welche diesen Zwang bewirken und nothwendig in den Differentialgleichungen vorkommen müssen, müßte man die Bedingung aufstellen, daß alle materielle Linien des Querschnittes an der fraglichen Stelle zu ihren ursprünglichen Richtungen parallel geblieben seien. Dieses erreicht man aber, wenn man ausdrückt, daß diejenige dieser Linien, welche ursprünglich mit der angenommenen Krümmungsebene einen Winkel = 0 bildete, mit der neuen Krümmungsebene einen Winkel:

$$\int \left(\frac{M_1}{2G\mu} - \frac{1}{\tau} \right) ds = \varepsilon$$

bildet, was wir bereits früher zur Bestimmung der geringen Biegung eines Ringes, welcher eingeklemmt ist und von Kräften solicitirt wird, die auf seiner Ebene senkrecht sind, gethan haben.

§. 270. Endlich wollen wir annehmen, daß die Stange ursprünglich eine Schraubenform habe. Unsere frühere Untersuchung über die geringe Verlängerung derselben zeigt, daß die Schraubenform verändert wird, und nur eine solche bleibt, wenn die Angriffspuncte der Kräfte so beschaffen sind, daß gewisse Constanten verschwinden. Die Aufgabe würde bei Verrückungen von einer beliebigen Größe noch complicirter werden, und es ist nicht abzusehen, wie man die allgemeine Integration der Gleichungen (14) bewerkstelligen sollte. Allein man kann den umgekehrten Weg einschlagen, nämlich voraussetzen, daß die Axencurve nach der Wirkung der Kräfte noch eine Schraubenlinie ist, und dann untersuchen, welches System von Kräften dieser Bedingung entspricht. Wir wollen hier das Detail dieser Rechnung, welche wir auf den allgemeinen Fall, wo die Querschnitte der Schraube alle einander gleich und gegen die Axe ihres Cylinders gleichgestellt, aber keine regelmäßigen Figuren sind, ausgedehnt haben, nicht mittheilen, sondern nur bemerken, daß wir gefunden haben, daß sich die Kräfte auf eine nach der Axe des Cylinders gerichtete Kraft und auf ein um diese Axe wirkendes Kräftepaar reduciren müßten, und daß zugleich zwischen den Momenten

M_u, M_v eine gewisse constante Relation stattfinden müßte, so daß man so viele Gleichungen erhält, als zur Bestimmung des Halbmessers und der Weite der neuen Schraube erforderlich sind.

Wenn der Querschnitt eine regelmäßige Figur ist, so kann man M_ϱ für M_v und M_n für M_u nehmen, und die ebenerwähnte Relation reducirt sich alsdann auf folgende:

$$M_\varrho = 0,$$

welche gibt:

$$\varepsilon = 0,$$

so daß man, wenn g die Kraft, h das Moment des Kräftepaares, R_0 den Halbmesser des Cylinders der ursprünglichen Schraube, φ_0 den constanten Winkel, welchen ihre Elemente mit der Grundfläche bilden, und R, φ dieselben dem neuen Zustande entsprechenden Größen bezeichnen, man zur Bestimmung derselben die erste und dritte der Gleichungen (14) oder:

$$gR \sin. \varphi + h \cos. \varphi = E\mu \left(\frac{\cos.^2 \varphi}{R} - \frac{\cos^2 \varphi_0}{R_0}\right),$$

$$-gR \cos. \varphi + h \sin. \varphi = 2G\mu\left(\frac{\sin. \varphi \cos. \varphi}{R} - \frac{\sin. \varphi_0 \cos. \varphi_0}{R_0}\right),$$

hat, welche sich leicht in Beziehung auf R und φ auflösen lassen, sobald die Zahlenwerthe der Größen g, h, R_0, φ_0, μ gegeben sind. Diese Formeln stimmen mit denen von Giulio überein, wenn zwischen g und h eine solche Relation stattfindet, daß sich die Schraube verlängert oder verkürzt, ohne mehr zusammen oder weiter auseinander gedreht zu werden, oder umgekehrt, und sie stimmen auch mit den Formeln überein, welche wir weiter oben (§. 231) erhalten haben, wenn $h = 0$ und $R - R_0$, $\varphi - \varphi_0$ sehr klein ist. Der Umstand $\varepsilon = 0$ und die Voraussetzung, daß die Glieder verschwinden, welche eine Aenderung der Schraubenform bewirken, machen die Resultate unserer beiden Analysen übereinstimmend und die Differenzen, welche wir bemerkt zu haben glaubten, waren nur scheinbar.

Neunter Abschnitt.

Weitere Ausführung der Dampfmaschinenlehre.

I. Von den mechanischen Gesetzen der Wirkung des Wasserdampfes.

A. Relation zwischen der Temperatur und der Spannkraft des Dampfes, wenn derselbe mit dem erzeugenden Wasser in Berührung ist.

§. 271. Ehe wir in die Betrachtungen näher eingehen, welche die Grundlage der mechanischen Wirkung des Dampfes bilden, müssen wir einige Gesetze wieder erörtern, nach welchen diese Wirkung erfolgt.

Bei der Berechnung der Dampfmaschinen kommen vier Eigenschaften des Wasserdampfes in Betracht, nämlich: 1) die Spannkraft desselben, welche auch seine Expansivkraft oder sein Druck genannt wird, indem man denselben auf die Flächeneinheit der umgebenden Gefäßwände bezieht, und zwar unterscheidet man einen absoluten und einen wirksamen Druck, indem man unter dem ersten die wirkliche Spannkraft des Dampfes oder den Totaleffect desselben und unter dem letzten blos den Ueberschuß dieser Spannkraft über den atmosphärischen Druck versteht; 2) seine Temperatur, worunter die Anzahl der Grade verstanden wird, welche ein in dem Dampfe befindliches Thermometer angibt; 3) seine Dichtigkeit, welche das Gewicht einer Volumeneinheit des Dampfes ist, und 4) sein specifisches Volumen, welches das Volumen eines gegebenen Gewichtes Dampf im Verhältniß zu dem Volumen desselben Gewichtes Wasser, woraus er sich gebildet hat, ist.

Wenn also S ein gegebenes Volumen Wasser, V das absolute Volumen des unter einem gewissen Drucke p daraus gebildeten Dampfes und V' das absolute Volumen des unter einem andern Drucke p' aus demselben Wasser gebildeten Dampfes bezeichnet, und μ das specifische Volumen des Dampfes unter dem Drucke p; so hat man offenbar:

$$\mu = \frac{V}{S}.$$

Wenn ferner μ' das specifische Volumen des Dampfes unter dem Drucke p' bezeichnet, so hat man ebenso:

$$\mu' = \frac{V'}{S},$$

und folglich:

$$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{V}{V'},$$

d. h. die absoluten Volumina desselben Gewichtes Dampf verhalten sich wie die specifischen Volumina.

Dieses vorausgesetzt, kann man den Dampf betrachten in dem Augenblicke, wo er sich in dem Kessel bildet, und noch mit dem Wasser, woraus er entsteht, in Berührung, oder von dem Wasser getrennt ist. Im ersten Falle lehrt die Beobachtung: daß dieselbe Temperatur immer demselben Drucke entspricht, und umgekehrt, so daß man die Temperatur des Dampfes nicht erhöhen kann, ohne daß seine Spannkraft oder seine Dichtigkeit zunimmt, und umgekehrt. In diesem Falle hat also der Dampf für seine Temperatur die größte Dichtigkeit und die größte Spannkraft, weshalb man in diesem Falle auch sagt: der Raum sei mit dem Dampfe gesättigt, und man sieht leicht ein, daß zwischen der Temperatur des Dampfes und seiner Spannkraft oder seiner Dichtigkeit ein unveränderlicher Zusammenhang stattfinden muß.

Eins der wichtigsten Gesetze, welche man in der Dampfmaschinenlehre in Beziehung auf die Eigenschaften des Wasserdampfes kennen muß, besteht darin: die Spannkraft des mit dem Wasser in Berührung stehenden Dampfes zu bestimmen, wenn man die Temperatur kennt, bei welcher er sich gebildet hat, oder umgekehrt, diese Temperatur zu bestimmen, wenn die Spannkraft bekannt ist. Diese Untersuchung hat nicht blos ein unmittelbares Interesse, sondern sie dient auch, wie man später sehen wird, zur Bestimmung der Dichtigkeit oder des specifischen Volumens des unter einem gegebenen Drucke gebildeten Dampfes, welches ein für die Berechnung der Dampfmaschinen durchaus erforderliches Element ist.

Nach den bisher angestellten Versuchen kann man diese Aufgabe von einem Drucke von $\frac{1}{150}$ Atmosphäre bis zu einem Drucke von 24 Atmosphären und von einer Temperatur von 0° bis zu einer Temperatur von 224° Centes. oder 436,5° Fahrh. lösen, und die practisch wichtigsten Formeln, welche man nach diesen Versuchen zwischen der Spannkraft und der Temperatur des Wasserdampfes aufgestellt hat, sind folgende:

1) die Southern'sche Formel für geringere Spannkräfte als von 1 Atmosph.:

$$p = 0{,}0034542 + \left(\frac{46{,}278 + t}{145{,}360}\right)^{5{,}13},$$

$$t = 145{,}360 \sqrt[5{,}13]{p - 0{,}0034542} - 46{,}278;$$

2) die Tredgold-Mellet'sche Formel für Spannkräfte von 1 bis 4 Atmosph.:

$$p = \left(\frac{75 + t}{174}\right)^6,$$

$$t = 174 \sqrt[6]{p} - 75;$$

3) die Pambour'sche Formel ebenfalls für Spannkräfte von 1 bis 4 Atmosph.:

$$p = \left(\frac{72,67 + t}{171,72}\right)^6,$$

$$t = 171,72 \sqrt[6]{p} - 72,67;$$

4) die Arago-Dulong'sche Formel für Spannkräfte von 4 bis 50 Atmosph.:

$$p = (0,28658 + 0,0072003\, t)^5,$$

$$t = 138,883 \sqrt[5]{p} - 39,802.$$

Die vorhergehenden Formeln beziehen sich auf französisches Maß (Kilogr., Quadratcent. u. Centesimalgrade) und für englisches Maß (Pfund, Quadratzoll u. Fahrenh. Grade) verwandeln sie sich resp. in folgende:

$$p = 0,04948 + \left(\frac{51,3 + t}{155,7256}\right)^{5,13},$$

$$t = 155,7256 \sqrt[5,13]{p - 0,04948} - 51,3;$$

$$p = \left(\frac{103 + t}{201,18}\right)^6,$$

$$t = 201,18 \sqrt[6]{p} - 103;$$

$$p = \left(\frac{98,806 + t}{198,562}\right)^6,$$

$$t = 198,562 \sqrt[6]{p} - 98,806;$$

$$p = (0,26793 - 0,0067585\, t)^5,$$

$$t = 147,961 \sqrt[5]{p} - 39,644.$$

Außerdem hat Biot für die ganze Thermometerscale folgende Formel aufgestellt:

$$log.\ p = a - a_1 b_1^{20+t} - a_2 b_2^{20+t}$$

worin $log.\ p$ der gewöhnliche Logarithmus des in Millimetern der Quecksilbersäule bei 0° angegebenen Druckes und t die Temperatur in Centesimalgraden des Luftthermometers bei Annahme des Gay-Lussac'schen Ausdehnungscoefficienten der Gase (0,00375) ist, und die Constanten a, a_1, a_2, b_1, b_2 folgende Werthe haben:

$$a = 5,96131330259,$$
$$log.\ a_1 = 0,82340688193 - 1,$$
$$log.\ b_1 = 0,01309734295,$$
$$log.\ a_2 = 0,74110951837,$$
$$log.\ b_2 = 0,00212510583.$$

Endlich hat Lubbock für engl. Maß (p in Atmosph.) folgende Formel:

$$t = \frac{116{,}17316}{1{,}17602 - p^{0{,}0134}} - 448^{\circ}$$

aufgestellt, welche in einer großen Ausdehnung der Thermometerscale sehr genaue Resultate gibt und sich erst bei sehr niedrigen Temperaturen von den Beobachtungen entfernt.

B. Relation zwischen dem specifischen Volumen und der Spannkraft bei derselben Temperatur, oder zwischen dem specifischen Volumen und der Temperatur bei derselben Spannkraft für die von dem Wasser getrennten Dämpfe.

§. 272. Wenn der Dampf mit dem erzeugenden Wasser noch in Berührung ist, so hängt seine Spannkraft, wie bereits früher bemerkt wurde, nothwendig von seiner Temperatur ab. Aber wenn der Dampf von dem erzeugenden Wasser getrennt ist, so findet dieser nothwendige Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Spannkraft nicht mehr statt, so daß man die Temperatur des Dampfes verändern kann, indem man zugleich sein Volumen sich ändern läßt, ohne seine Spannkraft zu ändern, oder umgekehrt.

Ein sehr merkwürdiges Gesetz, welches Mariotte für die Gase oder Dämpfe gefunden hat, und von Arago und Dulong bis zu Druckkräften von 27 Atmosphären bestätigt ist, besteht darin: daß, wenn man das Volumen eines gegebenen Gewichtes Gas oder Dampf verändert, ohne seine Temperatur zu ändern, sich die Spannkraft im umgekehrten Verhältnisse des Volumens ändert, oder im geraden Verhältnisse der Dichtigkeit; d. h. wenn V, V' die Volumina desselben Gewichtes Dampf und p, p' die zugehörigen Spannkräfte bei unveränderter Temperatur bezeichnen; so hat man die Relation:

$$\frac{p}{p'} = \frac{V'}{V},$$

und wenn μ, μ' die specifischen Volumina des Dampfes unter denselben Druckkräften p, p' bezeichnen; so hat man nach dem Vorhergehenden auch die Relation:

$$\frac{p}{p'} = \frac{\mu'}{\mu}.$$

Wenn man also ein gegebenes Gewicht einer elastischen Flüssigkeit auf die Hälfte ihres ursprünglichen Volumens zusammendrückt, ohne ihre Temperatur zu ändern, so wird nach diesem Gesetze die Expansivkraft derselben doppelt so groß. Allein diese Erscheinung kann bei den mit dem Wasser in Berührung stehenden Dämpfen offenbar nicht stattfinden, weil sie voraussetzt, daß die Temperatur während der Druckveränderung constant bleibt, während sich bei den mit dem Wasser in Berührung stehenden Dämpfen die Spannkraft immer mit der Temperatur, und umgekehrt, ändert.

Eine andere eben so wichtige Eigenschaft der elastischen Flüssigkeiten hat Gay-Lussac entdeckt, und sie besteht darin: daß, wenn man die Temperatur eines gegebenen Gewichtes einer solchen Flüssigkeit sich ändern läßt, während die Spannung dieselbe bleibt, die Volumenzunahmen genau den Temperaturzunahmen proportional sind, und zwar beträgt die Volumenzunahme zwischen 0° und 100° des hunderttheiligen Quecksilberthermometers 0,00375 des Volumens der Flüssigkeit bei der Temperatur von 0°. Andererseits würde ein Thermometer mit trockener Luft, wenn es nach dieser Angabe eingetheilt würde, so daß jeder Temperaturerhöhung von 1° eine Volumenzunahme um 0,00375 der Luft bei 0° entspräche, und zugleich die Correction wegen der Ausdehnung des Glases angebracht würde, nach den Beobachtungen von Petit und Dulong über 100° nicht mit dem Quecksilberthermometer übereinstimmen, und zwar würde der Unterschied bis zu dem Siedepuncte des Quecksilbers, d. h. bis 360° des Quecksilberthermometers, welchen blos 350° des Luftthermometers entsprechen, zunehmen. Hieraus hat man also geschlossen, daß die Volumenzunahme der Gase für jeden Temperaturgrad nur dann constant ist, wenn man sie auf die wegen der Ausdehnung des Glases corrigirten Angaben des Luftthermometers bezieht, und daß die Ausdehnung des Quecksilbers in dem Glase zu unregelmäßig ist, als daß dasselbe Gesetz bei höheren Temperaturen als 100°, wenn sie mit dem Quecksilberthermometer gemessen werden, anwendbar wäre. Bei jeder höheren Temperatur müßte man also erst die Grade des Quecksilberthermometers in Grade des Luftthermometers verwandeln, und nur auf diese letztern wäre der obige Ausdehnungscoefficient anwendbar. Neuere Versuche von Rudberg haben aber gelehrt, daß der Ausdehnungscoefficient der Gase auf 0,003646 reducirt werden muß, und diese Bestimmung ist auch durch spätere Untersuchungen von Regnault bestätigt. Ein nach dieser Angabe eingetheiltes Luftthermometer differirt von dem Quecksilberthermometer auch bei den höchsten Temperaturen nur so wenig, daß die Unterschiede bei unsern Untersuchungen ganz unbeachtet bleiben können. Wir wollen also annehmen, daß die Ausdehnung der Gase und Dämpfe für jeden Grad des hunderttheiligen Quecksilberthermometers nahezu constant ist und durch 0,00365 des Volumens desselben Gewichtes der Flüssigkeit bei der Temperatur von 0° ausgedrückt wird. Wenn man das Fahrenheit'sche Quecksilberthermometer anwendet, so entspricht jeder Temperaturerhöhung von 1° eine Volumenzunahme von 0,00203 des Volumens der Flüssigkeit bei der Temperatur von 32°.

Wenn also V_0 das Volumen eines gegebenen Gewichtes der elastischen Flüssigkeit unter einem beliebigen Drucke und bei der Temperatur von 32° Fahrenh. oder bei 0° Centes. bezeichnet, so wird das Volumen V, welches dieselbe Flüssigkeit unter demselben Drucke und bei der nach dem Quecksilberthermometer bestimmten Temperatur t hat, in englischen Maßen durch:

$$V = V_0 \, (1 + 0{,}00203 \, [t - 32])$$

und die französischen Maßen durch:

$$V = V_0 \, (1 + 0{,}00365 \, t)$$

ausgedrückt. Mat hat also zwischen den Volumen V und V' desselben

Gewichtes Dampf bei derselben Spannung und bei den Temperaturen t und t' für englische und französische Maße resp. die Relation:

$$\frac{V}{V'} = \frac{1 + 0{,}00203\,(t - 32)}{1 + 0{,}00203\,(t' - 32)} = \frac{416{,}2 + t}{416{,}2 + t'}$$

$$\frac{V}{V'} = \frac{1 + 0{,}00365\,t}{1 + 0{,}00365\,t'} = \frac{274 + t}{274 + t'}$$

worin man nach dem Vorhergehenden für das Verhältniß $\frac{V}{V'}$ der absoluten Volumina das Verhältniß $\frac{\mu}{\mu'}$ der specifischen Volumina setzen kann.

Da dieses Gesetz voraussetzt, daß sich bei der Temperaturveränderung des Dampfes die Spannkraft desselben nicht ändert, so ist es offenbar auf Dämpfe, welche mit ihren Flüssigkeiten in Berührung stehen, nicht anwendbar, weil sich bei diesen die Spannkraft nothwendig und von selbst mit der Temperatur ändert.

C. Relation zwischen dem specifischen Volumen, der Spannkraft und der Temperatur der Dämpfe, welche mit der erzeugenden tropfbaren Flüssigkeit in Berührung stehen, oder nicht.

§. 273. Nach dem Frühern ist weder das Mariotte'sche, noch das Gay-Lussac'sche Gesetz für sich auf die Veränderungen der mit ihren erzeugenden Flüssigkeiten in Berührung stehenden Dämpfe anwendbar; allein es leuchtet ein, daß sich aus der Verbindung dieser beiden Gesetze eine dritte Relation ableiten lassen muß, welche die Volumenveränderungen des Dampfes bestimmt, die durch eine gleichzeitige Veränderung der Temperatur und des Druckes bewirkt werden, und diese Relation ist alsdann auf die mit ihren Flüssigkeiten in Berührung stehenden Dämpfe anwendbar, weil man nur die in diesem Zustande des Dampfes einander entsprechenden Druckkräfte und Temperaturen in die Formel einzuführen braucht.

Gesetzt, man wollte das Volumen eines gegebenen Gewichtes Dampf bestimmen, welcher von dem Drucke p' und der Temperatur t' zu dem Drucke p und der Temperatur t übergeht. Zu dem Zwecke kann man annehmen, daß der Dampf ohne Temperaturveränderung zuerst von dem Drucke p' zu dem Drucke p übergeht, so hat man nach dem Mariotte'schen Gesetze zwischen den specifischen Volumen μ', μ'' des Dampfes die Relation:

$$\mu'' = \mu' \frac{p'}{p}.$$

Nimmt man alsdann an, daß dieser Dampf von der Temperatur t' zu der Temperatur t übergeht, ohne seine Spannung zu ändern; so wird das specifische Volumen μ desselben nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze in englischen Maßen ausgedrückt durch:

$$\mu = \mu'' \cdot \frac{461{,}2 + t}{461{,}2 + t'} = \mu' \cdot \frac{p'}{p} \cdot \frac{461{,}2 + t}{461{,}2 + t'}$$

und in französischen Maßen durch:

$$\mu = \mu'' \cdot \frac{274 + t}{274 + t'} = \mu' \cdot \frac{p'}{p} \cdot \frac{274 + t}{274 + t'}.$$

Man hat also auf diese Weise offenbar das Gesetz, wonach sich das specifische Volumen des Dampfes in Folge einer gleichzeitigen Druck- und Temperaturveränderung ändert, und wenn man in diese Gleichung für p und t, p' und t' die einander entsprechenden Spannkräfte und Temperaturen des mit dem Wasser in Berührung stehenden Dampfes setzt, so erhält man die entsprechenden Veränderungen des specifischen Volumens desselben.

Ferner lehren die Gay-Lussac'schen Versuche, daß unter dem Drucke von 1 Atmosphäre oder von 14,706 Pfund für den Quadratzoll und bei der Temperatur von 212° Fahrenh., oder unter dem Drucke von 1,0335 Kilogr. für das Quadratcentimeter und bei der Temperatur von 100° Centes. das specifische Volumen des mit dem Wasser in Berührung stehenden Dampfes = 1696, d. h. 1696 mal größer ist, als das Volumen des Wassers, woraus er sich gebildet hat, woraus man also leicht das Volumen desselben Gewichtes Dampf bei einem beliebigen Drucke p und der zugehörigen Temperatur t ableiten kann; denn man braucht zu dem Zwecke nur für p', t' und μ' die vorhergehenden Werthe in die letzten Gleichungen zu substituiren. Hierdurch ergibt sich in englischen Maßen:

$$\mu = 1696 \cdot \frac{14{,}706}{p} \cdot \frac{461{,}2 + t}{461{,}2 + 212} = 37{,}049 \, \frac{461{,}2 + t}{p}$$

und:

$$p = 37{,}049 \cdot \frac{461{,}2 + t}{\mu},$$

oder in französischen Maßen:

$$\mu = 1696 \cdot \frac{1{,}0335}{p} \cdot \frac{274 + t}{274 + 100} = 4{,}6867 \cdot \frac{274 + t}{p}$$

und:

$$p = 4{,}6867 \cdot \frac{274 + t}{\mu}.$$

Vermittelst dieser Relationen kann man also das specifische Volumen des unter einem gegebenen Drucke gebildeten Dampfes und umgekehrt den Druck aus dem specifischen Volumen berechnen, sobald man die Temperatur kennt, welche diesem Drucke bei Dämpfen im Maximum der Dichtigkeit entspricht. Berechnet man also nach den im §. 271 angeführten Formeln die Temperatur des im Maximum der Dichtigkeit befindlichen Dampfes unter den in der ersten Columne der folgenden Tafel angegebenen Druckkräften, so erhält man zunächst die zweite Columne dieser Tafel, und wenn man diese zusammengehörigen Spannkräfte und Temperaturen successive in die vorhergehende Formel substituirt; so erhält man die dritte Columne oder die specifischen Volumina.

I. Tafel des specifischen Volumens.

(Franz. Maß.)

Absoluter Druck in Kilogrammen für das Quadratcentimeter.	Zugehörige Temperatur in Centesimalgraden.	Specifisches Volumen.	Absoluter Druck in Kilogrammen für das Quadratcentimeter.	Zugehörige Temperatur in Centesimalgraden.	Specifisches Volumen.
0,1	45,9	14992	4,3	146,1	458
0,2	59,6	7817	4,4	147,0	448
0,3	68,4	5349	4,5	147,8	439
0,4	75,1	4090	4,6	148,7	430
0,5	80,5	3323	4,7	149,5	422
0,6	85,2	2806	4,8	150,3	414
0,7	89,2	2432	4,9	151,1	406
0,8	92,8	2149	5	151,8	399
0,9	94,4	1918	5,1	152,6	392
1	99,0	1748	5,2	153,3	385
1,1	101,8	1601	5,3	154,1	378
1,2	104,4	1477	5,4	154,8	371
1,3	106,7	1373	5,5	155,5	365
1,4	109,0	1282	5,6	156,2	359
1,5	111,1	1203	5,7	156,9	354
1,6	113,0	1133	5,8	157,6	348
1,7	114,9	1072	5,9	158,3	343
1,8	116,7	1017	6	158,9	338
1,9	118,4	967	6,1	159,6	333
2	120,1	923	6,2	160,3	328
2,1	121,7	882	6,3	160,9	323
2,2	123,2	845	6,4	161,5	318
2,3	124,6	811	6,5	162,1	314
2,4	126,1	780	6,6	162,8	310
2,5	127,4	752	6,7	163,4	306
2,6	128,7	726	6,8	164,0	302
2,7	130,0	701	6,9	164,6	298
2,8	131,2	678	7	165,2	294
2,9	132,4	657	7,1	165,7	290
3	133,6	637	7,2	166,3	287
3,1	134,7	618	7,3	166,9	283
3,2	135,8	600	7,4	167,5	280
3,3	136,9	583	7,5	168,0	277
3,4	137,9	568	7,6	168,6	273
3,5	138,9	553	7,7	169,1	270
3,6	139,9	539	7,8	169,7	267
3,7	140,9	525	7,9	170,2	264
3,8	141,8	513	8	170,7	261
3,9	142,8	501	8,5	173,3	247
4	143,7	489	9	175,7	234
4,1	144,6	478	9,5	178,1	223
4,2	145,3	468	10	180,3	213

II. Tafel des specifischen Volumens.

(Engl. Maß.)

Absoluter Druck in Pfunden für den Quadratzoll.	Zugehörige Temperatur nach Fahrenh.	Specifisches Volumen.	Absoluter Druck in Pfunden für den Quadratzoll.	Zugehörige Temperatur nach Fahrenh.	Specifisches Volumen.
1	102.9	20900	43	272.9	632
2	126,1	10880	44	274,3	619
3	141,0	7437	45	275,7	607
4	152,3	5682	46	277,1	595
5	161,4	4613	47	278,4	583
6	169,2	3893	48	279,7	572
7	176,0	3373	49	281,0	561
8	182,0	2979	50	282,3	551
9	187,4	2670	51	283,6	541
10	192,4	2422	52	284,8	531
11	197,0	2217	53	286,0	522
12	201,3	2045	54	287,2	513
13	205,3	1899	55	288,4	505
14	209,0	1773	56	289,6	497
15	213,0	1665	57	290,7	489
16	216,4	1569	58	291,9	481
17	219,6	1584	59	293,0	473
18	222,6	1407	60	294,1	466
19	225,6	1339	61	294,9	459
20	228,3	1277	62	295,9	452
21	231,0	1221	63	297,0	446
22	233,6	1170	64	298,1	440
23	236,1	1123	65	299,1	433
24	238,4	1080	66	300,1	427
25	240,7	1040	67	301,2	422
26	243,0	1003	68	302,2	416
27	245,1	969	69	303,2	410
28	247,2	937	70	304,2	405
29	249,2	907	71	305,1	400
30	251,2	880	72	306,1	395
31	253,1	853	73	307,1	390
32	255,0	829	74	308,0	385
33	256,8	806	75	308,9	380
34	258,6	784	76	309,9	376
35	260,3	764	77	310,8	371
36	262,0	744	78	311,7	367
37	263,7	726	79	312,6	363
38	265,3	708	80	313,5	359
39	266,9	692	81	314,3	355
40	268,4	676	82	315,2	351
41	269,9	661	83	311,6	348
42	271,4	646	84	316,9	344

Absoluter Druck in Pfunden für den Quadratzoll.	Zugehörige Temperatur nach Fahrenh.	Specifisches Volumen.	Absoluter Druck in Pfunden für den Quadratzoll.	Zugehörige Temperatur nach Fahrenh.	Specifisches Volumen.
85	317,8	340	98	328,1	299
86	318,6	337	99	328,8	296
87	319,4	333	100	329,6	293
88	320,3	330	105	333,2	281
89	321,1	326	120	343,3	249
90	321 9	323	135	352,4	224
91	322,7	320	150	360,8	203
92	323,5	317	165	368,5	187
93	324,3	313	180	375,6	173
94	325,0	310	195	382,3	161
95	325,8	307	210	388,6	150
96	326 6	305	225	394,6	141
97	327,3	302	240	400,2	133

D. Directe Relation zwischen dem specifischen Volumen und der Spannkraft des mit dem Wasser in Berührung stehenden Dampfes.

§. 274. Man kann das specifische Volumen des Dampfes im Maximum der Dichtigkeit, oder wenn derselbe mit dem Wasser in Berührung steht, auch unmittelbar als eine Function der Spannkraft allein erhalten, wenn man vermittelst der früher (§. 271) für die Temperatur t angegebenen Ausdrücke mit p aus dem letzten Ausdrucke für μ die Größe t eliminirt, was jedoch mit Unannehmlichkeiten verbunden ist, weshalb man es vorgezogen hat, direct eine genäherte Formel aufzustellen, welche unmittelbar das specifische Volumen des Dampfes im Maximum der Dichtigkeit als Function des Druckes p allein gibt. Navier hat zu diesem Zwecke folgende Formel gegeben:

$$\mu = \frac{1000}{0{,}09 + 0{,}0000484\,p} \text{ (franz. Maß)},$$

welche zwar für hohe Spannkräfte hinreichend genau ist, sich aber bei geringeren Spannkräften als von 1 Atmosph., welche bei Condensationsmaschinen vorkommen, beträchtlich von der Beobachtung entfernt. Pambour hat daher die folgenden genaueren Formeln zu demselben Zwecke aufgestellt:

1) für Condensationsmaschinen:

$$\mu = \frac{20\,000\,000}{120 + p} \text{ (franz. Maß)}, \qquad (1)$$

$$\mu = \frac{4\,100\,000}{259 + p} \text{ (engl. Maß)}; \qquad (2)$$

2) für Maschinen ohne Condensation:

$$\mu = \frac{21\,232\,000}{3020 + p} \text{ (franz. Maß)}, \qquad (3)$$

$$\mu = \frac{43\,48000}{620 + p} \text{ (engl. Maß)}; \qquad (4)$$

welche wir der Kürze wegen **allgemein** durch:

$$\mu = \frac{m}{n + p} \qquad (a)$$

darstellen wollen, wo p in Kilogrammen oder Pfunden für das **Quadratmeter** oder den **Quadratfuß** auszudrücken ist. Die folgende Tafel gibt eine Vergleichung dieser letzten Formeln mit den gewöhnlichen in §. 272.

Franz. Maß.				Engl. Maß.			
Absoluter Druck	Spec. Volumen nach den gewöhnlichen Formeln.	Spec. Volumen nach Formel (1).	Spec. Volumen nach Formel (2).	Absoluter Druck.	Spec. Volumen nach den gewöhnlichen Formeln.	Spec. Volumen nach Formel (3).	Spec. Volumen nach Formel (4).
0,1	14992	″	″	5	4613	4227	″
0,2	7817	″	″	6	3893	3680	″
0,3	5349	4762	″	7	3373	3259	″
0,4	4090	3846	″	8	2979	2924	″
0,5	3323	3226	″	9	2670	2652	″
0,6	2806	2778	″	10	2422	2426	″
0,7	2432	2439	″	11	2217	2236	″
0,8	2149	2174	″	12	2045	2073	″
0,9	1918	1961	″	13	1899	1932	″
1	1748	1786	1631	14	1773	1809	″
1,5	1203	1235	1178	15	1665	1701	1564
2	923	943	922	20	1277	1310	1242
2,5	752	763	758	25	1040	1065	1030
3	637	641	643	30	880	897	880
3,5	553	552	558	35	764	775	768
4	489	485	494	40	676	682	682
4,5	439	433	442	45	607	609	613
5	399	391	400	50	551	550	556
5,5	365	356	366	55	505	502	509
6	338	327	337	60	466	461	470
6,5	314	302	312	65	433	427	436
7	294	281	291	70	405	397	406
7,5	277	262	272	75	380	371	381
8	261	246	256	80	359	348	358
8,5	247	232	241	85	340	328	338
9	234	219	228	90	323	310	320
9,5	223	208	217	105	281	267	276
10	213	198	206	120	249	234	243
				135	224	208	217
				150	203	188	196

E. Constitutionswärme des mit dem Wasser in Berührung stehenden Dampfes.

§. 275. Wenn man Wasser unter dem atmosphärischen Drucke verdampfen läßt, so steigt bekanntlich die Temperatur des Wassers und Dampfes nicht über 100° Centes. oder 212° Fahrenh., wie sehr man auch das Feuer verstärken mag. Es muß also die dem Wasser noch mitgetheilte Wärme in den Dampf übergegangen sein; aber sie befindet sich darin in einem latenten oder gebundenen Zustande, weil sie nicht auf das Thermometer wirkt und erst in dem Augenblicke der Condensation des Dampfes wieder zum Vorschein kommt. Diese latente Wärme wird offenbar dazu verwandt, die Molecule des Wassers in der dem gasförmigen Zustande entsprechenden gegenseitigen Entfernung zu erhalten, und wird von dem Dampfe ebenso absorbirt, wie die Wärme, welche das Wasser absorbirt, wenn es aus dem festen in den tropfbarflüssigen Zustand übergeht. Die Quantität latenter Wärme muß man kennen, wenn man die Veränderungen beurtheilen will, welche der Dampf erleiden kann.

Nach den Beobachtungen von Watt, Sharpe, Clement und Desormes enthält der Dampf in dem Augenblicke seiner Bildung dieselbe Totalquantität Wärme, bei welcher Spannung oder Dichtigkeit er sich auch gebildet haben mag, woraus folgt, daß die Quantität latenter Wärme, welche dieser Dampf enthält, desto kleiner ist, je höher die Temperatur desselben steigt, was sich aus seiner zunehmenden Dichtigkeit erklärt. Die Summe aus der latenten und thermometrischen (sensibeln) Wärme des Dampfes bildet also immer eine constante Größe, nämlich 650° Centes. oder 1170° Fahrenh.

Dagegen hat Southern aus einigen Versuchen über die Spannkraft und Temperatur des Dampfes geschlossen, daß die latente Wärmequantität constant sei, so daß man, um die Gesammtquantität der in dem Dampfe bei einer gewissen Temperatur enthaltenen Wärme zu haben, zu dieser Temperatur eine constante Größe als latente Wärme hinzufügen müsse. Allein diese Meinung hat sich durch keine späteren Beobachtungen bestätigt, während die Meinung von Watt, ꝛc. außer den angeführten Versuchen durch mehrere Erscheinungen als richtig bestätigt wird, namentlich dadurch: daß zur Verdampfung desselben Gewichtes Wasser unter verschiedenen Druckkräften immer dieselbe Menge Brennmaterial erfordert wird. — Das Watt'sche Gesetz gilt jedoch nur von dem mit dem Wasser in Berührung stehenden Dampfe. —

Denkt man sich ferner das Wasser in einem Gefäße (Kessel), welches einen hinreichenden Widerstand leisten kann, immer höher steigenden Temperaturen ausgesetzt, so wird die latente Wärme des Dampfes immer geringer, und bei 650° Centes. oder 1170° Fahrenh. absorbirt der Dampf keine latente Wärme, sondern alle neu hinzukommende Wärme wird durch das Thermometer angezeigt. Der Dampf muß also bei dieser letzten Temperatur dieselbe Dichtigkeit haben, wie das Wasser, weil keine größere gegenseitige Entfernung der Molecule stattfindet, und alles Wasser muß sich in Dampf verwandeln, auf welchen folglich das in Rede stehende Gesetz nicht mehr anwendbar ist, weil sonst die latente Wärmequantität eine negative Größe werden müßte, was unstatthaft ist. — Wenn ferner das Gefäß ein Ventil hätte, auf welches ein gewisser Druck p wirkt, so würde der Dampf anfangen auszuströmen, sobald seine Spannkraft nur etwas größer als p würde. Von diesem Augenblicke an würde also sowohl die Spannkraft, wie die Temperatur des Dampfes constant bleiben, und wenn das Feuer von gleicher Intensität bliebe, so daß es z. B. der Cubikeinheit Wasser in der Secunde eine Quantität Wärme = 1170° Fahrenh. oder = 650° Centes. mittheilte; so könnte, je nach der Belastung des Ventiles, in jeder Secunde eine Cubikeinheit Wasser in Dampf von größerer oder geringerer Spannung verwandelt werden, ohne daß bei einer größeren Spannung mehr Brennmaterial erforderlich wäre.

F. Ueber die Erhaltung des Maximums der Dichtigkeit des Dampfes während seiner Wirkung in der Maschine.

§. 276. Wenn eine Dampfmaschine in Thätigkeit ist, so bildet sich der Dampf im Kessel unter einem gewissen Drucke, geht von da in den Cylinder über, wo er eine andere Spannung annimmt, und wenn Expansion angewandt wird; so dehnt er sich nach seinem Abschluß vom Kessel immer mehr bis an das Ende des Kolbenlaufes aus. Gewöhnlich nimmt man an, daß während dieser Veränderung der Spannung des Dampfes seine Temperatur ungeändert bleibt, so daß also seine Dichtigkeit und sein specifisches Volumen während seiner Wirkung in der Maschine das Boyle'sche oder Mariotte'sche Gesetz befolgen. Durch diese Annahme werden die Formeln sehr vereinfacht; aber da sie, wie wir sehen werden, der Erfahrung widerspricht, so müssen wir untersuchen, nach welchem Gesetze sich mit der Spannung des Dampfes seine Temperatur zugleich ändert, und da die Berechnung der Effecte des Dampfes wesentlich von seinem Volumen abhängt; so müssen wir auch untersuchen, welche Veränderungen dieses Volumen in Folge der gleichzeitigen Temperatur- und Druckveränderungen erfährt.

Da nämlich die elastischen Flüssigkeiten sich bei jeder Ausdehnung abkühlen und dem Dampfe in dem Cylnder und den Leitungsröhren eher Wärme entzogen als mitgetheilt wird; so leuchtet ein, daß das Mariotte'sche Gesetz hier nicht zulässig ist. Pambour hat sich in der That durch sorgfältige Versuche mit Locomotiven überzeugt, daß die Temperatur des Dampfes während seiner Wirkung in der Maschine mit seiner Spannkraft gleichzeitig, und zwar so abnimmt, daß der Dampf stets die seiner jedesmaligen Temperatur entsprechende größte Spannung oder Dichtigkeit hat. Bei diesen Versuchen war der Dampf gegen äußere Abkühlung geschützt; aber wenn auch eine solche Abkühlung stattfindet, so bleibt die Sache doch ungeändert; denn es bildet sich in Folge derselben aus dem Dampfe eine gewisse Quantität tropfbarflüssiges Wasser — wie in dem Cylinder einer Condensationsmaschine bei der unvollständigen Condensation — so daß der noch übrige Dampf wirklich mit Wasser in Berührung steht, und sich folglich für seine Temperatur im Maximum der Dichtigkeit befinden muß. — Wenn der Dampf in dem Cylinder statt abgekühlt, erhitzt würde, so würde zunächst das bei der Bildung des Dampfes mit demselben fortgeführte tropfbarflüssige Wasser nur vermindert werden und alles wie im vorhergehenden Falle bleiben, so lange dieses Wasser nicht ganz in Dampf verwandelt ist, und alsdann der reine Dampf durch fortwährende Mittheilung der Wärme des Cylinders eine höhere Temperatur und Spannkraft annähme. Allein nur sehr selten wird der Cylinder so stark erhitzt, daß das von dem Dampfe bei seiner Bildung im Kessel mit fortgeführte tropfbarflüssige Wasser ganz verdampft würde, was nur bei Maschinen, wie die Cornwall'schen, stattfinden kann, bei deren Untersuchung weiter hiervon die Rede sein wird. —

In dem ersten, allgemeinen Falle behält also der Dampf während seiner Wirkung in dem Cylinder die seiner Temperatur entsprechende größte Dichtigkeit, wie wenn derselbe fortwährend mit dem erzeugenden Wasser in Berührung bliebe, und folglich kann nach dem Obigen sein specifisches Volumen μ als Function der Spannung p allein durch die einfache Formel:

$$\mu = \frac{m}{n + p} \qquad (a)$$

ausgedrückt werden. Wenn also ein gewisses Volumen Wasser $= S$ unter dem Drucke p in Dampf verwandelt wird, dessen absolutes Volumen mit M bezeichnet wird; so hat man:

$$\frac{M}{S} = \mu = \frac{m}{n + p}.$$

Ebenso hat man, wenn M' das absolute Volumen des aus demselben Wasser unter dem Drucke p' gebildeten Dampfes bezeichnet:

$$\frac{M'}{S} = \frac{m}{n + p'}.$$

Es ist also:

$$M = M' \cdot \frac{n + p'}{n + p}, \qquad (b)$$

d. h. die absoluten Volumina des Dampfes stehen nicht — wie das Mariotte'sche Gesetz sagt — im umgekehrten Verhältnisse der Druckkräfte, sondern im umgekehrten Verhältnisse dieser um eine gewisse Constante vermehrten Drückkräfte.

Aus der Gleichung (b) folgt auch:

$$p = \frac{M'}{M}(n + p') - n. \qquad (c)$$

Wenn der Dampf während seiner Wirkung in der Maschine durch besondere Mittel oder Umstände bei derselben Temperatur erhalten würde (wie bei den Cornwall'schen Maschinen); so wäre das Mariotte'sche oder Boyle'sche Gesetz anwendbar, und man braucht für diesen Fall in den Formeln (b) und (c) nur die Constante $n = 0$ zu setzen, so daß man folglich hat:

$$M = M' \cdot \frac{p'}{p}$$

und:

$$p = \frac{M'}{M} \cdot p.$$

Da das **Volumen**, welches ein gegebenes Gewicht Dampf einnimmt, bei allen Berechnungen über die Leistungen der Dampfmaschinen das wichtigste Element bildet, so ist leicht einzusehen, daß durch das **Princip der Erhaltung des Maximums der Dichtigkeit** des Dampfes während seiner Wirkung in der Maschine und durch die darauf beruhenden Formeln (b) und (c) beträchtliche Fehler in den Resultaten vermieden werden. Wenn man z. B. eine Maschine betrachtet, worin sich der Dampf bei einem Drucke von 8 Atmosph. = 120 Pfd. für den Quadratzoll bildet und bis auf 10 Pfd. expandirt; so nimmt man bei der gewöhnlichen Berechnungsart an, daß der Dampf während der Expansion seine Temperatur ungeändert beibehält, also sein Volumen nach dem **Mariotte**'schen Gesetze im umgekehrten Verhältnisse des Druckes steht, und folglich nach der Tafel der specifischen Volumina $= 249 \times \frac{120}{10} = 2988$ wäre nach der Expansion, während es nach dieser genauen Tafel $= 2422$ ist, also um $\frac{1}{5}$ des wahren Werthes zu groß, folglich auch der Effect der Maschine um ebensoviel zu groß. Dieser Fehler wird fast ganz vermieden, wenn man die Formel (a) anwendet; denn sie gibt 2426 statt 2422. Bei Maschinen **ohne Condensation** ist der Fehler kleiner, aber immer noch beträchtlich genug. Denn wenn sich der Dampf in einer solchen Maschine z. B. unter einem Drucke von 5 Atmosph. = 75 Pfd. für den Quadratzoll bildete und bei einer Spannkraft von 2 Atmosph. = 30 Pfd. für den Quadratzoll arbeitete; so wäre sein Volumen nach der gewöhnlichen Ansicht, d. h. nach dem **Mariotte**'schen Gesetze, $= 280 \times \frac{5}{2} = 950$ bei seiner Wirkung, während es nach der genauen Tafel $= 880$ ist. Dieser Fehler wird ganz vermieden, wenn man die Formel (a) anwendet. Bei **geringen Spannungen**, wie sie in vielen Fällen vorkommen, kann derselbe jedoch unbeachtet bleiben, d. h. das **Mariotte**'sche Gesetz angewandt werden.

Zehnter Abschnitt.

II. Allgemeine Theorie der Dampfmaschine.

A. Von den verschiedenen Arten der Dampfmaschinen und den Problemen, welche bei ihrer technischen Anwendung vorkommen.

§. 277. Nach der Anwendungsart der bewegenden Kraft des Dampfes können wir zunächst drei Geschlechter von Dampfmaschinen unterscheiden, nämlich doppeltwirkende, einfachwirkende und unmittelbar rotirende Dampfmaschinen.

Doppeltwirkende Dampfmaschinen sind solche, worin der Dampf in dem Cylinder successive auf die beiden Grundflächen des Kolbens wirkt und diesem eine hin- und hergehende, absetzende Bewegung ertheilt.

Einfachwirkende Dampfmaschinen dagegen sind die, worin der Dampf immer nur auf die eine Grundfläche des Kolbens wirkt und diesen folglich immer nach derselben Richtung bewegt, während seine Bewegung in entgegengesetzter Richtung durch ein Gegengewicht bewirkt wird, welches selbst bei dem vorhergehenden Kolbenlaufe durch die Kraft des Dampfes gehoben ist.

Sowohl die doppelt- als einfachwirkenden Dampfmaschinen können ferner rotirende, oder nichtrotirende sein, je nachdem die absetzende Bewegung des Kolbens vermittelst einer Kurbel in eine rotirende Bewegung einer Schwungradwelle verwandelt wird, oder nicht. — Gewöhnlich sind die doppeltwirkenden Dampfmaschinen rotirende und die einfachwirkenden dagegen nichtrotirende.

Eine unmittelbar rotirende Dampfmaschine ist eine solche, worin der Dampf unmittelbar die Rotation einer Welle bewirkt und nicht erst eine absetzende Bewegung eines Kolbens, welche, wie bei den Rotationsmaschinen, vermittelst einer Kurbel in eine rotirende verwandelt wird. Da man jedoch den unmittelbar rotirenden Dampfmaschinen bis jetzt noch keine praktisch brauchbare Form hat geben können, so wird in Zukunft nicht weiter davon die Rede sein, und sie sind hier blos der Vollständigkeit wegen mit angeführt.

Ferner unterscheidet man Dampfmaschinen mit hohem und mit niederm Druck, mit und ohne Expansion, mit und ohne Condensation.

Unter einer Hochdruckmaschine versteht man im Allgemeinen eine solche, worin der Dampf im Kessel eine hohe Spannung hat, und unter einer Niederdruckmaschine eine solche, worin der Druck des Dampfes im Kessel den atmosphärischen Druck nur um 3 oder 4 Pfund engl. für den Quadratzoll, oder um 0,25 oder 0,3 Kilogr. für das Quadratcentimeter übersteigt. Besonders aber versteht man unter Hochdruckmaschinen die, worin der Dampf im Kessel eine hohe Spannung hat und zugleich weder Expansion, noch Condensation angewandt wird.

Eine Expansionsmaschine ist eine solche, worin der Dampf des Kessels vor dem Ende des Kolbenlaufes von dem in den Cylinder getretenen abgeschlossen wird, so daß sich letzterer bei fortgesetzter Bewegung des Kolbens in dem Cylinder expandirt oder ausdehnt, und eine Maschine ohne Expansion ist eine solche, worin dieses nicht der Fall ist.

Endlich versteht man unter Condensationsmaschinen die, worin der Dampf, nachdem er seine Wirkung gethan hat, condensirt wird, und unter Dampfmaschinen ohne Condensation die, worin dieser Dampf nach geleisteter Wirkung frei in die Atmosphäre entweicht, ohne in der Maschine condensirt zu werden.

Wir theilen demnach die Dampfmaschinen in folgende drei Geschlechter ein:

1) Doppeltwirkende Dampfmaschinen ohne Expansion:
   a) feststehende, eigentliche Hochdruckmaschinen,
   b) bewegliche Maschinen (Dampfwagen, Locomotiven) ohne Condensation,
   c) feststehende Maschinen mit Condensation (doppeltwirkende Watt'sche Dampfmaschinen. Alle diese Maschinen sind rotirende.

2) Doppeltwirkende Dampfmaschinen mit Expansion:
   a) Maschinen mit Condensation und Expansion in einem Cylinder (Cornwall'sche doppeltwirkende Maschinen),
   b) Maschinen mit Condensation und Expansion in zwei Cylindern (Woolf'sche Maschinen),
   c) Maschinen mit Expansion und ohne Condensation (Evans'sche Maschinen). Alle Rotationsmaschinen.

3) Einfachwirkende Dampfmaschinen:
   a) Niederdruckmaschinen (einfachw. Watt'sche Maschinen),
   b) Hochdruckmaschinen (einfachw. Cornwall'sche Maschinen),
   c) atmosphärische Maschinen. Sämmtlich gewöhnlich nicht rotirend.

In dieser Reihenfolge werden wir die verschiedenen Arten Dampfmaschinen abhandeln; aber zuvor reden:

Von den verschiedenen Problemen, welche bei der Berechnung der Dampfmaschinen vorkommen.

§. 278. Wenn eine Dampfmaschine bereits construirt und folglich in Hinsicht des Systemes und der Dimensionen vollständig bestimmt und außerdem die Expansion fixirt oder veränderlich ist, so kann der Effect, welchen sie hervorbringt, doch noch verschieden sein, weil die Geschwindigkeit, die Last und die Verdampfung sich völlig unabhängig von einander ändern können. Hieraus geht hervor, daß man bei der Arbeit einer Dampfmaschine drei Fälle unterscheiden muß, nämlich: 1) wenn sie mit einer gegebenen Expansion und mit einer beliebigen Geschwindigkeit, Last oder Verdampfung arbeitet; 2) wenn sie mit einer gegebenen Expansion und mit der dem Maximum des Nutzeffectes bei dieser Expansion entsprechenden Geschwindigkeit, Last oder Verdampfung arbeitet, und 3) wenn die Expansion zuvor auf die vortheilhafteste Weise fixirt ist und auch die Geschwindigkeit, die Last oder die Verdampfung für diese Expansion am vortheilhaftesten angenommen wird, so daß man folglich das absolute Maximum des Nutzeffectes dieser Maschine erhält. — In jedem dieser drei Fälle kann man irgend eine der drei unbestimmten Größen: Geschwindigkeit, Last oder Verdampfung zu bestimmen haben, und außerdem ist nächst diesen drei Aufgaben noch eine vierte — nämlich die Bestimmung des Nutzeffectes der Maschine — zu lösen, und dieser Nutzeffect selbst kann auf verschiedene Weise ausgedrückt werden. Hieraus folgt: daß die verschiedenen Aufgaben, welche man in jedem der drei obigen Fälle und für die verschiedenen Arten von Dampfmaschinen zu lösen haben kann, folgende sind:

1) Wenn die Verdampfung und die Last einer übrigens völlig bestimmten Maschine gegeben sind, die Geschwindigkeit derselben zu bestimmen.

2) Umgekehrt, wenn die Verdampfung und die Geschwindigkeit gegeben sind, die Last zu bestimmen.

3) Wenn die Last und die Geschwindigkeit gegeben sind, die Verdampfung der Maschine, d. h. die Dimensionen ihres Kessels zu finden.

4) Den Nutzeffect der Maschine bei einer gegebenon Last oder Geschwindigkeit zu finden:

a) in Pfundfußen oder Kilogrammmetern,
b) in Pferdekräften,
c) für die Gewichtseinheit Brennmaterial,
d) für den Cubikfuß oder das Cubikmeter verdampften Wassers, ferner:
e) das Gewicht Brennstoff für 1 Pferdekraft,
f) das Volumen Wasser für 1 Pferdekraft,
g) den Nutzeffect in Pferdekräften für die Gewichtseinheit Brennstoff,
h) den Nutzeffect in Pferdekräften für die Volumeneinheit verdampften Wassers.

B. Ueber die gleichförmige Bewegung der Dampfmaschinen.

§. 279. Die Apparate, welche zur Herstellung der gleichförmigen Bewegung der Dampfmaschinen, insbesondere der doppeltwirkenden Rotationsmaschienen dienen, womit wir uns zunächst beschäftigen wollen, sind: das Schwungrad, das Zulassungsventil, der Regulator (§. 63 fgg., Bd. 1.), das Schornsteinregister und das Quecksilbermanometer (§. 194 u. fgg.). Es wird nicht nöthig sein, hier umständlich zu zeigen, wie diese Apparate die gleichförmige Bewegung der Maschine bewirken, und wir wollen blos in der Kürze bemerken, daß das Schwungrad genügt, die Unregelmäßigkeiten der Verdampfung des Kessels, oder des Widerstandes der Arbeit auszugleichen, wenn sie nur gering oder von kurzer Dauer sind; daß aber das Zulassungsventil erfordert wird, wenn diese Unregelmäßigkeiten merklicher oder von längerer Dauer sind, und daß auch dieses Mittel, über eine gewisse Grenze hinaus, ungenügend wird, so daß das letzte und wahre Mittel zur Regulirung der Geschwindigkeit in der sorgfältigen Unterhaltung des Feuers bei dem gehörigen Grade der Intensität mit Hülfe des Schornsteinregisters, wodurch man den Luftzug vermehren oder vermindern kann, und des Quecksilbermanometers, welches jeden Augenblick die Veränderung der Verdampfung im Kessel anzeigt, besteht.

C. Geschwindigkeit des Kolbens bei einer gegebenen Verdampfung und Last.

§. 280. Um sogleich den allgemeinsten Fall zu betrachten, wollen wir uns eine Maschine denken, bei welcher Expansion und Condensation angewandt wird, während der Dampf im Kessel eine beliebige Spannung hat. Da nach dem früher Gesagten (§. 275) der Dampf während seiner Wirkung in der Maschine die seiner Temperatur entsprechende größte Dichtigkeit behält, so hat man, wenn derselbe in der Maschine von dem bekannten Volumen M' zu dem ebenfalls bekannten Volumen M, und folglich von dem bekannten Drucke p' zu dem unbekannten Drucke p übergeht, die Relation:

$$p = \frac{M'}{M}(n + p') - n, \qquad (c)$$

worin die Constante n die in §. 273 angegebenen Werthe hat.

Ferner ergibt sich die gesuchte Relation zwischen den verschiedenen Elementen der Aufgabe aus den beiden allgemeinen Bedingungen: 1) daß die Maschine eine gleichförmige Bewegung angenommen hat, so daß die Quantität Arbeit des Dampfes der des Widerstandes gleich ist, und: 2) daß die im Cylinder verbrauchte Quantität Dampf der gleichzeitig im Kessel erzeugten Quantität gleich ist.

Es sei P der absolute Druck des Dampfes im Kessel und P' der mittlere Druck des Dampfes während seines Eintrittes in den Cylinder und vor der Expansion oder Absperrung, wo immer $P > P'$ ist, einen besonderen Fall ausgenommen, welchen wir später betrachten werden. Ferner sei π der Druck des Dampfes in einem beliebigen Momente der Expansion, l die Länge des ganzen Kolbenlaufes, l' der Theil derselben, welcher vor der Absperrung durchlaufen wird, und λ der Theil, welcher dem Momente entspricht, wo die Spannung des Dampfes $= \pi$ ist. Endlich bezeichne a die Kolbenfläche oder den innern Querschnitt des Cylinders und c den freien oder schädlichen Raum, welcher sich mit Dampf füllt, aber nicht von dem Kolben durchlaufen wird, in einer entsprechenden Länge des Cylinders ausgedrückt.

Betrachtet man den Kolben in dem Augenblicke, wo derselbe den Weg λ durchlaufen oder der Dampf die Spannung π angenommen hat, so ist das während des nächsten Wegelementes $d\lambda$ hervorgebrachte Arbeitselement des Dampfes offenbar $= \pi a d\lambda$, und das Volumen des Dampfes, welches vor der Expansion $= a\ (l' + c)$ war, ist in dem betrachteten Augenblicke $= a\ (\lambda + c)$ geworden. Man hat also nach der obigen Gleichung (c) zwischen P' und π die Relation:

$$\pi = (n + P') \frac{l' + c}{\lambda + c} - n,$$

folglich:

$$\pi a d\lambda = a\ (l' + c)\ (n + P') \frac{d\lambda}{\lambda + c} - n a d\lambda,$$

und:

$$\int_{l'}^{l} \pi a d\lambda = a\ (l' + c)\ (n + P') \int_{l'}^{l} \frac{d\lambda}{\lambda + c} - na \int_{l'}^{l} d\lambda,$$

$$= a\ (l' + c)\ (n + P')\ log. \left(\frac{l + c}{l' + c}\right) - na\ (l - l')$$

für die gesammte während der Expansion von dem Dampfe hervorgebrachte Arbeit, wo $log.$ einen hyperbolischen Logarithmus bezeichnet. Addirt man hierzu die vor der Expansion von dem Dampfe hervorgebrachte Arbeit $= P'al'$, so erhält man für die von dem Dampfe während des ganzen Kolbenlaufes hervorgebrachten Gesammtarbeit:

$$a\ (l' + c)\ (n + P') \left[\frac{l'}{l' + c} + log. \left(\frac{l + c}{l' + c}\right)\right] - nal.$$

Wenn ferner R den Gesammtwiderstand für die Einheit der Kolbenfläche bezeichnet, so ist die diesem Widerstande entsprechende Arbeit für den ganzen Kolbenlauf offenbar $= aRl$, und folglich:

$$a\ (l' + c)\ (n + P') \left[\frac{l'}{l' + c} + log. \left(\frac{l + c}{l' + c}\right)\right] - nal = aRl, \quad (A)$$

weil nach der Voraussetzung die Bewegung der Maschine gleichförmig, folglich die Arbeit des Bewegens der des Widerstandes gleich ist. — Diese Gleichung findet offenbar auch dann noch statt, wenn die Geschwindigkeit zwischen gewissen Grenzen oscillirt, wofern die successiven Oscillationen nur in gleichen Zeiten stattfinden und die Geschwindigkeit sich allmählig (stetig) und nicht plötzlich ändert, damit kein Verlust an lebendiger Kraft erfolgt.

Wenn man in der Gleichung (A) setzt $l' = l$, d. h. wenn die Maschine ohne Expansion arbeitet, so folgt daraus $P' = R$, wie es offenbar auch sein muß.

Die erste allgemeine Gleichung (A) zwischen den bekannten und unbekannten Größen des Problemes ist aus der ersten der beiden vorhin angeführten allgemeinen Bedingungen abgeleitet, und wir haben nun noch eine zweite allgemeine Relation aus der zweiten Bedingung abzuleiten. Bezeichnet zu dem Zwecke S das in der Zeiteinheit (Minute) im Kessel verdampfte Volumen Wasser, so hat dieser Dampf in dem Cylinder den Druck P' und ein Volumen gleich:

$$\frac{mS}{n+P'}.$$

Ferner ist das bei jedem Kolbenlaufe verbrauchte Volumen Dampf offenbar $= a\ (l' + c)$, und wenn in der Minute k' Kolbenläufe stattfinden; so wird das in der Minute verbrauchte Volumen Dampf ausgedrückt durch:

$$k'a\ (l' + c).$$

Aber wenn v die Geschwindigkeit des Kolbens in der Minute bezeichnet, so ist $v = k'l$, also $k' = \frac{v}{l}$, und mithin das vorige Dampfvolumen gleich:

$$\frac{va\ (l' + c)}{l}.$$

Man hat folglich die zweite allgemeine Gleichung:

$$\frac{mS}{n+P'} = va\ \frac{l'+c}{l}, \qquad (B)$$

weil das erzeugte und verbrauchte Volumen Dampf einander gleich sind.

Wenn man P' zwischen den Gleichungen (A) und (B) eliminirt, so erhält man für die gesuchte Geschwindigkeit:

$$v = \frac{S}{a} \cdot \frac{m}{n+R}\left[\frac{l'}{l'+c} + log.\left(\frac{l+c}{l'+c}\right)\right]. \qquad (1)$$

Will man die im Allgemeinen unrichtige Resultate gebende Voraussetzung machen, daß der Dampf während seiner Wirkung in der Maschine seine anfängliche Temperatur behält, also das Mariotte'sche Gesetz anwendbar ist; so vereinfacht sich die Gleichung (1), weil man zu dem Zwecke nur $n = 0$ und $m = qP$ zu setzen braucht (§. 276), wo q das specifische Volumen des Dampfes unter dem Drucke P bezeichnet. Auf diese Weise erhält man:

$$v = \frac{qPS}{aR}\left[\frac{l'}{l'+c} + log.\left(\frac{l+c}{l'+c}\right)\right],$$

und für $l' = l$, d. h. für eine Maschine ohne Expansion:

$$v = q \cdot \frac{S}{a} \cdot \frac{P}{R} \cdot \frac{l}{l+c}.$$

Der Widerstand R besteht offenbar aus drei Theilen: 1) aus dem von der eigentlichen Last herrührenden Widerstande r; 2) aus der Reibung der Maschine $= f + \delta r$, wo f die Reibung der unbelasteten Maschine und δ die Zunahme dieser Reibung für die Einheit der Last r bezeichnet, und 3) aus dem Drucke p, welcher auf die andere Kolbenfläche wirkt, wo p den atmosphärischen Druck oder den des im Cylinder unvollständig condensirten Dampfes bezeichnet, je nachdem keine Condensation oder eine solche stattfindet. Die Größen r, f, p und δ beziehen sich übrigens wie R und P auf die Einheit der Kolbenfläche. Setzt man also:

$$R = (1 + \delta)\, r + p + f,$$

und der Kürze wegen:

$$\frac{l'}{l'+c} + log.\left(\frac{l+c}{l'+c}\right) = k,$$

so erhält man:

$$v = \frac{S}{a} \cdot \frac{mk}{n+R},$$

oder:

$$v = \frac{S}{a} \cdot \frac{mk}{n+(1+\delta)r+p+f}. \qquad (1')$$

Noch ist zu bemerken, daß die Größen a, l, l', P, r und p sich auf dieselbe Einheit wie S beziehen, und daß S die wirksame Verdampfung der Maschine, d. h. das Volumen Wasser bezeichnet, welches als wirklicher Dampf in den Cylinder tritt und auf den Kolben wirkt. — Auch sieht man aus der Gleichung (1), daß die Geschwindigkeit v der Maschine ganz unabhängig ist von dem Drucke P, unter welchem sich der Dampf im Kessel bildet, und blos von der Verdampfung S, so wie von dem Totalwiderstande $[(1+\delta)r+p+f]$ abhängt.

D. Last der Maschine für eine gegebene Verdampfung und Geschwindigkeit.

§. 281. Die Last ar ergibt sich unmittelbar aus der Gleichung (1′), nämlich:

$$ar = \frac{mkS}{(1+\delta)v} - \frac{a}{1+\delta}(n+p+f). \qquad (2)$$

Für $v = 0$, und folglich $S = 0$ wird $ar = \frac{0}{0}$; allein man muß bemerken, daß alle bisher abgeleiteten Formeln voraussetzen, daß die Bewegung der Maschine schon gleichförmig geworden ist, und wir werden sogleich sehen, daß bei einer gegebenen Verdampfung S die gleichförmige Geschwindigkeit niemals kleiner sein kann, als:

$$v' = \frac{qS}{a} \cdot \frac{l}{l'+c},$$

weil der Dampf alsdann bei seiner größten Dichtigkeit in den Cylinder tritt. Es ist folglich auch unzulässig, $v = 0$ zu setzen.

E. Verdampfung für eine gegebene Geschwindigkeit und eine gegebene Last.

§. 282. Aus der Gleichung (1′) folgt sofort:

$$S = av \cdot \frac{n+(1+\delta)r+p+f}{mk}, \qquad (3)$$

wobei jedoch zu bemerken ist, daß S die wirksame Verdampfung bezeichnet, so daß, wenn durch das Sicherheitsventil, oder sonst Dampfverluste stattfinden, diese möglichst genau bestimmt und zu dem vorhergehenden Werthe von S addirt werden müssen, um die **Bruttover-**

dampfung zu erhalten, welche im Kessel stattfinden muß. — Auch das mit dem Dampfe fortgeführte tropfbarflüssige Wasser gehört hierher, welches nach Pambour bei Locomotiven im Mittel 0,25 der Bruttoverdampfung im Kessel beträgt, und bei feststehenden Maschinen (mit Ausnahme der Cornwall'schen, worin der Cylinder sehr stark erhitzt und das mit fortgenommene Wasser in dem Cylinder selbst in Dampf verwandelt wird) schlägt Pambour diesen Verlust auf 0,05 der beobachteten Verdampfung an, so daß die mittlere wirksame Verdampfung bei feststehenden Dampfmaschinen nur 0,95 der Bruttoverdampfung beträgt. Uebrigens ist diese Größe für feststehende Dampfmaschinen noch durch zahlreiche Beobachtungen genauer zu bestimmen.

F. Verschiedene Ausdrücke des Nutzeffectes.

§. 283. Der Nutzeffect, welchen die Maschine bei der Geschwindigkeit v in der Zeiteinheit (Minute) hervorbringt, ist offenbar $= arv$, weil ar die bewegte Last und v der von derselben in der Zeiteinheit durchlaufene Weg ist. Wenn man also beide Theile der Gleichung (2) mit v multiplicirt, so erhält man den Nutzeffect E der Maschine bei der Verdampfung S und der Geschwindigkeit v:

$$E = arv = \frac{mkS}{1+\delta} - \frac{av}{1+\delta}(n+p+f). \tag{4}$$

Wenn man dagegen die beiden Theile der Gleichung (1′) mit ar multiplicirt, so erhält man den Nutzeffect, welchen die Maschine mit der Verdampfung S und der Last r hervorbringen kann:

$$E = arv = \frac{mrkS}{n+(1+\delta)r+p+f}. \tag{4′}$$

Aus diesen beiden Ausdrücken für den Nutzeffect sieht man, daß derselbe nicht von der Spannung P des Dampfes im Kessel abhängt, aber wohl von der wirksamen Verdampfung S.

Der Nutzeffect, in Pferdekräften ausgedrückt, welchen eine Maschine mit der Verdampfung S und der Geschwindigkeit v oder der Last r hervorbringen kann, ist offenbar:

$$\left.\begin{aligned} E \text{ in Pferdekr.} &= \frac{arv}{33000} \text{ (engl. Maß)} \\ &= \frac{arv}{4500} \text{ (franz. Maß),} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

weil in England 1 Pferdekraft = 33000 Fußpfund = 4560 Kilogrammmeter, und in Frankreich 1 Pferdekraft = 4500 Kilogrammmeter ist. Beide Einheiten sind also etwas verschieden.

Wenn ferner in der Minute oder zur Verdampfung S erforderlich sind N Pfund oder N Kilogr. Brennmaterial, so wird der Nutzeffect für 1 Pfd. oder 1 Kilogr. Brennstoff offenbar ausgedrückt durch:

$$\left.\begin{aligned} E \text{ für 1 Pfd. Kohl.} &= \frac{arv}{N} \text{ (engl. Maß),} \\ E \text{ für 1 Kilogr. Kohl.} &= \frac{arv}{N} \text{ (franz. Maß),} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ebenso wird offenbar der Nutzeffect der Maschine für 1 Cubikfuß oder für 1 Cubikmeter verdampften Wassers ausgedrückt durch:

$$\left.\begin{aligned} E \text{ für 1 Cubikf. Wasser } &= \frac{arv}{S} \text{ (engl. Maß)}, \\ E \text{ für 1 Cubikmet. Wasser } &= \frac{arv}{S} \text{ (franz. Maß)}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Die Quantität Kohlen $= Q$ für 1 Pferdekraft ergibt sich nach den Ausdrücken (6) aus der Proportion:

$$1 : Q = \frac{arv}{N} : \begin{cases} 33000 \\ 4500' \end{cases}$$

folglich:

$$\left.\begin{aligned} Q \text{ Kohl. für 1 Pferdekr. } &= \frac{33000\, N}{arv} \text{ (engl. Maß)}, \\ &= \frac{4500\, N}{arv} \text{ (franz. Maß)}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Ebenso ergibt sich nach den Ausdrücken (7) die zu verdampfende Quantität Wasser $= Q$ für 1 Pferdekraft aus der Proportion:

$$1 : Q = \frac{arv}{S} : \begin{cases} 33000 \\ 4500' \end{cases}$$

folglich:

$$\left.\begin{aligned} Q \text{ Waff. für 1 Pferdekr. } &= \frac{33000\, S}{arv} \text{ (engl. Maß)}, \\ &= \frac{4500\, S}{arv} \text{ (franz. Maß)}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Ferner ist nach den Ausdrücken (6) der Nutzeffect E für 1 Pfd. oder für 1 Kilogr. Kohlen, in Pferdekräften ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} E \text{ in Pferdekr. für 1 Pfd. Kohl. } &= \frac{arv}{33000\, N} \text{ (engl. Maß)}, \\ E \text{ in Pferdekr. für 1 Kilogr. Kohl. } &= \frac{arv}{4500\, N} \text{ (franz. Maß)}. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Endlich ist nach den Ausdrücken (7) der Nutzeffect E für 1 Cubikfuß oder 1 Cubikmeter verdampften Wassers in Pferdekräften:

$$\left.\begin{aligned} E \text{ in Pferdekr. für 1 Cubikf. Wasser } &= \frac{arv}{33000\, S} \text{ (engl. Maß)}, \\ E \text{ in Pferdekr. für 1 Cubikm. Waff. } &= \frac{arv}{4500\, S} \text{ (franz. Maß)}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

In diesen verschiedenen Ausdrücken muß man für arv den Werth (4) oder (4′) setzen.

G. Maximum des Nutzeffectes bei einer gegebenen Expansion.

a. Geschwindigkeit für das Maximum des Nutzeffectes.

§. 284. Um die dem Maximum des Nutzeffectes entsprechende Geschwindigkeit zu erfahren, braucht man nur den Ausdruck des Nutzeffectes der Maschine bei einer gegebenen Verdampfung und einer beliebigen Geschwindigkeit, nämlich die Gleichung (4):

$$E = \frac{mkS}{1+\delta} - \frac{av}{1+\delta}(n+p+f, \tag{4}$$

zu untersuchen, und man sieht auf der Stelle, daß der Nutzeffect desto größer ist, je kleiner die Geschwindigkeit v bei einer gegebenen Expansion oder bei demselben Werthe von k ist. — Ferner sieht man aus der Gleichung (B) oder:

$$v = \frac{mS}{a\ (n + P')} \cdot \frac{l}{l' + c},$$

daß die Geschwindigkeit, ohne Dampfverlust, desto kleiner ist, je größer P' ist, also am kleinsten für $P' = P$. Mithin ist ihr kleinster Werth:

$$v' = \frac{mS}{a\ (n + P)} \cdot \frac{l}{l' + c}. \tag{12}$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung (4), so erhält man für den größten Nutzeffect:

$$E = \frac{mS}{1+\delta}\left(k - \frac{l}{l'+c} \cdot \frac{n+p+f}{n+P}\right),$$

worin S den möglichst größten Werth haben muß.

Wenn q das specifische Volumen des Dampfes bei der Spannung P bezeichnet, so kann man wegen der Gleichung (a) in §. 274 die Gleichung (12) auf folgende Form bringen:

$$v' = \frac{qS}{a} \cdot \frac{l}{l'+c}, \tag{12'}$$

so daß man die Berechnung der Größe $q = \frac{m}{n+P}$, welche mit größerer Genauigkeit aus der Tafel in § 273 genommen werden, erspart. In aller Strenge kann nicht $P' = P$ werden, weil der Dampf bei seinem Uebergange aus dem Kessel in den Cylinder Hindernisse findet, welche er überwinden muß; allein der Unterschied $P - P'$ ist so gering, daß derselbe gegen P unbeachtet bleiben kann.

Der größte Nutzeffect wird also durch die Bedingung $P' = P$ oder:

$$v' = \frac{mS}{a\ (n + P)} \cdot \frac{l}{l' + c} \tag{12}$$

gegeben, und mit dieser Geschwindigkeit muß man die Maschine arbeiten lassen, wenn man den möglich größten Nutzeffect erhalten will; und umgekehrt, wenn diese Geschwindigkeit stattfindet, so ist $P' = P$, d. h. der Dampf tritt alsdann bei vollem Drucke oder mit fast demselben Drucke wie im Kessel aus diesem in den Cylinder über.

Diese Geschwindigkeit v' für das Maximum des Nutzeffectes ist jedoch nicht für alle Maschinen dieselbe, weil sie, wie ihr Ausdruck zeigt, im geraden Verhältnisse der Verdampfung S und im umgekehrten Verhältnisse des Querschnittes a des Cylinders steht, sich also mit diesen Größen ändert.

b. Last für das Maximum des Nutzeffectes.

§. 285. Um diese Last ar' zu erhalten, braucht man offenbar nur in den allgemeinen Ausdruck des Widerstandes, d. h. in die Gleichung (2) für v den vorhin gefundenen Werth v' zu substituiren, wodurch man erhält:

$$ar' = \frac{a}{1+\delta} \cdot \frac{l'+c}{l} k\,(n+P) - \frac{a}{1+\delta}(n+p+f). \quad (13)$$

Da ferner aus der Gleichung (2) erhellet, daß der Widerstand desto größer ist, je kleiner die Geschwindigkeit v wird; so folgt, daß ar' ein Maximum, d. h. die größte Last ist, welche die Maschine bei der gegebenen Expansion ohne Dampfverlust und bei dem größten Nutzeffecte bewegen kann. Der größte Nutzeffect der Maschine mit einer gegebenen Verdampfung wird also erhalten, wenn man sie mit der kleinsten Geschwindigkeit (ohne Dampfverlust) und mit der größten Last arbeiten läßt. — Dasselbe ergibt sich auch aus der Gleichung (4'). Uebrigens ist zu bemerken, daß die durch Gleichung (13) bestimmte größte Last ar' der Maschine von der Verdampfung S der letzteren ganz unabhängig ist, aber von der Spannung P des Dampfes im Kessel abhängt.

c. Bestimmung der Reibung der unbelasteten Maschine, der Zunahme dieser Reibung für die Gewichtseinheit der Last, und der Gesammtlast der Maschine.

§. 286. Vermittelst der Gleichung (13) kann man auch die Reibung der bloßen leeren Maschine, die Zunahme dieser Reibung für die Einheit der Last, und endlich die Gesammtlast der Maschine bestimmen. Da es nämlich für jede Spannkraft des Dampfes im Kessel eine größte Last gibt, so kann man jede Last zu einer größten machen, wenn man die Spannkraft vermindert. Läßt man also mit Hülfe des Sicherseitsventiles die Spannkraft des Dampfes im Kessel so weit herabsinken, daß sie eben im Stande ist, die leere Maschine in Bewegung zu erhalten, so bildet die Reibung der Maschine die größte Last. Setzt man alsdann diese Spannkraft P'' für P in die Gleichung (13) und zugleich $\delta = 0$, so erhält man die Reibung:

$$f = (n + P'')\,\frac{l'+c}{l} k - n - p.$$

Um die Größe δ zu bestimmen, kann man die Last der Maschine so weit vergrößern, daß eben noch Bewegung stattfindet, so daß diese Last r'' für die Spannung P im Kessel die größte ist. Alsdann gibt die Gleichung (13):

$$\delta = \frac{1}{r''} \cdot \frac{l'+c}{l}(n+P)\,k - \frac{1}{r''}(n+p+f) - 1.$$

Zu demselben Zwecke könnte man auch die Spannung des Dampfes im Kessel so weit vermindern, daß sie mit der gewöhnlichen Last der Maschine ins Gleichgewicht käme, und diese Spannung P'' müßte man für P in die Gleichung (13) setzen, woraus sich alsdann δ ergibt.

Sind die Größen f und δ so bestimmt, so ist die Reibung F der Maschine für eine beliebige Last r:

$$F = f + \delta r.$$

Endlich kann man durch dasselbe Verfahren die Gesammtlast $(1 + \delta)\, r' + p + f$ der Maschine bestimmen; denn wenn man den kleinsten Druck P'' bestimmt, welcher die Maschine mit ihrer Last noch bewegen kann, und substituirt denselben für P in die Gleichung (13); so erhält man:

$$(1 + \delta)\, r' + p + f = \frac{l' + c}{l}\, k\, (n + P'') - n.$$

d. Verdampfung der Maschine für das Maximum des Nutzeffectes.

§. 287. Die dem Maximum des Nutzeffectes der Maschine entsprechende Verdampfung ergibt sich aus der Gleichung (3), wenn man darin resp. r', v' für r, v setzt, oder man leitet sie aus der Gleichung (12) ab, was auf dasselbe hinausläuft, und gibt:

$$S = \frac{l' + c}{l} \cdot \frac{n + P}{m}\, av'. \qquad (14)$$

Diese Verdampfung ist die möglichst kleinste, weil der Nutzeffect $ar'v'$ ein Maximum ist.

Aus der Gleichung (3) ergibt sich:

$$S = av' \cdot \frac{n + (1 + \delta)\, r' + p + f}{mk},$$

allein wenn man hierin für r' seinen aus der Gleichung (13) abgeleiteten Werth setzt; so erhält man den Ausdruck (14) wieder.

e. Maximum des Nutzeffectes.

§. 288. Der größte Nutzeffect, welchen die Maschine bei einer gegebenen Expansion in der Zeiteinheit hervorbringen kann, ergibt sich aus der Gleichung (4), wenn man darin v' für v setzt, oder auch. wenn man die entsprechenden Theile der Gleichungen (12) und (13) in einander multiplicirt, nämlich:

$$E \text{ Max.} = ar'v' = \frac{mS}{1 + \delta} \left(k - \frac{l}{l' + c} \cdot \frac{n + p + f}{n + P}\right). \qquad (15)$$

Aus dieser Gleichung sieht man, daß der größte Nutzeffect weder von der Größe a der Kolbenfläche oder des innern Querschnittes des Cylinders, noch von der Geschwindigkeit v' der Maschine abhängt. Wenn keine Expansion stattfindet, d. h. wenn $l' = l$ ist, so wird $k = \frac{l}{l + c}$, und der größte Nutzeffect ist alsdann auch von der Länge des Kolbenlaufes unabhängig, weil nur das Verhältniß $\frac{l}{l + c}$ noch in der Gleichung (15) vorkommt, welches nahezu constant ist. Ebenso sind die Größen δ, f, p, n, q constant, und man kann daher sagen: daß der größte Nutzeffect einer Dampfmaschine hauptsächlich von zwei Elementen abhängt, nämlich von der Verdampfung S des Kessels und von der Spannkraft P des Dampfes in demselben, was auch a priori einleuchtend ist.

Um ferner für den Fall des größten Nutzeffectes die analogen Ausdrücke von (5) bis (11) zu erhalten, braucht man in letztern nur resp. r', v' für r, v zu setzen, wodurch man erhält:

$$\left.\begin{aligned} E \text{ Max. in Pferdekr.} &= \frac{ar'v'}{33000} \text{ (engl. Maß)}, \\ &= \frac{ar'v'}{4500} \text{ (franz. Maß)} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

u. s. f.

f. Absolutes Maximum des Nutzeffectes.

§. 289. Bei den vorhergehenden Untersuchungen wurde die Expansion als von vornherein fixirt angenommen, und es ergab sich, daß es bei einer gegebenen Expansion am vortheilhaftesten ist, die Maschine mit der größten Last arbeiten zu lassen, welche man vermittelst der Gleichung (13) berechnen kann. Es kommt jetzt nun noch darauf an, auch die Expansion auf die vortheilhafteste Weise zu bestimmen, so daß das absolute Maximum des Nutzeffectes erhalten wird. — Zu dem Zwecke wollen wir die Gleichung (15) wieder betrachten, welche den größten Nutzeffect der Maschine für eine gegebene Expansion l' gibt; aber zuvor für k seinen Werth $\frac{l}{l'+c} + log. \left(\frac{l+c}{l'+c}\right)$ wieder setzen, wodurch sich ergibt:

$$E \text{ Max.} = \frac{mS}{1+\delta}\left[\frac{l'}{l'+c} + log.\left(\frac{l+c}{l'+c}\right) - \frac{l}{l'+c} \cdot \frac{n+p+f}{n+P}\right].$$

Der Werth von l', welcher den zweiten Theil dieser Gleichung zu einem Maximum macht, ergibt sich bekanntlich aus der Bedingungsgleichung:

$$\frac{d \cdot E \text{ Max.}}{dl'} = 0,$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{l'}{l} &= \frac{n+p+f}{n+P} \\ &= \frac{\dfrac{m}{n+P}}{\dfrac{m}{n+(p+f)}}, \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

d. h. der vortheilhafteste Werth von $\frac{l'}{l}$ ist kein anderer, als der des Verhältnisses der specifischen Volumina des unter den resp. Druckkräften P und $(p+f)$ gebildeten Dampfes (§. 273), welche sich leicht aus der Formel (a) in §. 274 oder aus der Tafel in §. 272 ergeben.

Wenn man $n = 0$ setzt, d. h. die Temperaturveränderung des Dampfes während seiner Wirkung in der Maschine unberücksichtigt läßt oder das Mariotte'sche Gesetz anwendet; so reducirt sich die Relation (17) auf folgende:

$$\frac{l'}{l} = \frac{p+f}{P}. \tag{17'}$$

Um ferner für den Fall des absoluten Maximums des Nutzeffectes die analogen Ausdrücke wie (5) bis (11) zu erhalten, braucht man in diesen nur r', v' für r, v, und für $\frac{l'}{l}$ den durch die Gleichung (17) gegebenen Werth zu setzen. Nur ist hierbei zu bemerken, daß die bei Expansionsmaschinen dem absoluten Maximum des Nutzeffectes entsprechende Last nicht die größte ist, welche die Maschine bewegen kann. Denn wenn man in der Gleichung (13) für k seinen Werth setzt, so erhält man:

$$ar' = \frac{a}{1+\delta}(n+P)\left[\frac{l'}{l} + \frac{l'+c}{l} \log.\left(\frac{l+c}{l'+c}\right)\right]$$
$$- \frac{a}{1+\delta}(n+p+f),$$

und aus der Bedingungsgleichung:

$$\frac{d \cdot ar'}{dl'} = 0$$

ergibt sich:

$$l' = l$$

und nicht:

$$\frac{l'}{l} = \frac{n+p+f}{n+P}.$$

Wenn also die Maschine die größte Last in Bewegung setzen soll, so muß man sie ohne Expansion arbeiten lassen; aber alsdann bringt sie nicht das absolute Maximum des Nutzeffectes hervor.

Die folgende Tafel ist zur Erleichterung der numerischen Rechnungen bestimmt.

Tafel zur numerischen Berechnung der Formeln.

Werth von $\frac{l'}{l}$.	Entspr. Werth von $k = \frac{l'}{l'+c} + log. \frac{l+c}{l'+c}$ für $\frac{c}{l} = 0{,}05$.	Werth von $\frac{l'}{l}$.	Entspr. Werth von $k = \frac{l'}{l'+c} + log. \frac{l+c}{l'+c}$ für $\frac{c}{l} = 0{,}05$.	Werth von $\frac{l'}{l}$.	Entspr. Werth von $k = \frac{l'}{l'+c} + log. \frac{l+c}{l'+c}$ für $\frac{c}{l} = 0{,}05$.
0,10	2,613	0,39	1,755	0,68	1,295
0,11	2,569	0,40	1,735	0,69	1,282
0,12	2 527	0,41	1,716	0,70	1,269
0,13	2,485	0,42	1,697	0,71	1,257
0,14	2,446	0,43	1,678	0,72	1,245
0,15	2,408	0,44	1,660	0,73	1,233
0,16	2,371	0,45	1,642	0,74	1,221
0,17	2,336	0,46	1,624	0,75	1,209
0,18	2,301	0,47	1,606	0,76	1,197
0,19	2,268	0,48	1,589	0,77	1,186
0,20	2,235	0,49	1,572	0,78	1,175
0,21	2,203	0,50	1,555	0,79	1,164
0,22	2,173	0,51	1,539	0,80	1,152
0,23	2,142	0,52	1,523	0,81	1,141
0,24	2,114	0,53	1,507	0,82	1,131
0,25	2,085	0,54	1,491	0,83	1,120
0,26	2,059	0,55	1,476	0,84	1,109
0,27	2,032	0,56	1,461	0,85	1,099
0,28	2,006	0,57	1,445	0,86	1,088
0,29	1,980	0,58	1,431	0,87	1,078
0,30	1,955	0,59	1,417	0,88	1,067
0,31	1,931	0,60	1,402	0,89	1,057
0,32	1,908	0,61	1,388	0,90	1,047
0,33	1,884	0,62	1,374	0,91	1,037
0,34	1,862	0,63	1,361	0,92	1,027
0,35	1,840	0,64	1,347	0,93	1,017
0,36	1,818	0,65	1,334	0,94	1,007
0,37	1,797	0,66	1,321	0,95	1,000
0,38	1,776	0,67	1,308		

Elfter Abschnitt.

III. Theorie der Hochdruckmaschinen und der Maschinen ohne Condensation im Allgemeinen.

A. Effecte der Maschine bei einer beliebigen Last oder Geschwindigkeit.

§. 290. **W**ir wollen die Theorie der Hochdruckmaschinen zuerst unter der allgemeinsten Form aufstellen, so daß sie zu gleicher Zeit alle rotirenden oder doppeltwirkenden Maschinen ohne Expansion und ohne Condensation umfaßt. Wir könnten zwar die hierher gehörigen Formeln aus den früheren ableiten, indem wir $l' = l$ setzten; allein wir halten es für zweckmäßig, diese Formeln für den vorliegenden einfacheren Fall direct abzuleiten, weil dieses auf eine viel einfachere Weise als in dem allgemeinen Falle geschehen kann. Wir setzen auch hier wieder voraus, daß die Bewegung der Maschine bereits gleichförmig geworden ist, so daß zwischen der bewegenden Kraft und dem Widerstande das Gleichgewicht stattfindet.

Bezeichnen wir wieder wie früher mit P den Druck des Dampfes im Kessel, mit P' den unbekannten Druck des Dampfes im Cylinder für die Flächeneinheit, und mit R den Gesammtwiderstand; so haben wir zunächst die erste Gleichung:

$$P' = R. \qquad (A)$$

Wenn sich ferner die Maschine in einem guten Zustande befindet, so ist offenbar die verbrauchte Dampfmenge der erzeugten immer gleich, und wenn S wieder das in der Zeiteinheit verdampfte Volumen Wasser bezeichnet, so wird das in jeder Zeiteinheit (Minute) in den Cylinder tretende Volumen Dampf offenbar ausgedrückt durch:

$$\mu S = \frac{mS}{n + P'}.$$

Andererseits wird das bei jedem Kolbenlaufe verbrauchte Volumen Dampf offenbar durch:

$$av \cdot \frac{l + c}{l}$$

ausgedrückt, und man hat folglich die zweite allgemeine Gleichung:

$$\frac{mS}{n + P'} = av \cdot \frac{l + c}{l}. \qquad (B)$$

Eliminirt man nun P' zwischen den beiden Gleichungen (A) und (B) so erhält man:

$$v = \frac{l}{l+c} \cdot \frac{S}{a} \cdot \frac{m}{n+R}.$$

Ferner ist, wenn die früheren Bezeichnungen beibehalten werden:

$$R = r + r\delta + p + f,$$

und folglich hat man endlich für die Geschwindigkeit v der Maschine mit einer bekannten Last:

$$v = \frac{l}{l+c} \cdot \frac{S}{a} \cdot \frac{m}{n+(1+\delta)\,r+p+f}. \qquad (1)$$

Hieraus ergibt sich umgekehrt für den Werth der Last ar als Function der Geschwindigkeit:

$$ar = \frac{l}{l+c} \cdot \frac{mS}{(1+\delta)\,v} - \frac{a}{1+\delta}\,(n+p+f). \qquad (2)$$

Ferner hat man für die Verdampfung bei der Geschwindigkeit v und der Last ar:

$$S = \frac{l+c}{l} \cdot \frac{av}{m}\,[n+(1+\delta)\,r+p+f], \qquad (3)$$

und endlich ergibt sich aus den Gleichungen (1) und (2) der Nutzeffect der Maschine:

$$E = arv, \qquad (4)$$

woraus sich die übrigen Ausdrücke desselben unmittelbar ergeben.

B. Maximum des Nutzeffectes.

§. 291. Die vorhergehenden Formeln beziehen sich auf den allgemeinen Fall, wo die Last oder die Geschwindigkeit ohne irgend eine besondere Bedingung gegeben ist; aber wenn man die dem Maximum des Nutzeffectes entsprechende Geschwindigkeit oder Last wissen will; so muß man den Ausdruck dieses Nutzeffectes:

$$E = \frac{l}{l+c} \cdot \frac{mS}{1+\delta} - \frac{av}{1+\delta}\,(n+p+f)$$

näher untersuchen.

Dieser Ausdruck wird aber offenbar am größten, wenn die Geschwindigkeit v am kleinsten ist, was vermöge der Gleichung (B) der Fall ist, wenn der Druck P' seinen größten Werth hat, d. h. dem Drucke P des Dampfes im Kessel gleich ist. Die dem größten Nutzeffecte der Maschine entsprechende Geschwindigkeit v' ergibt sich also aus der Gleichung (B), wenn man darin $P' = P$ setzt, nämlich:

$$v' = \frac{l}{l+c} \cdot \frac{S}{a} \cdot \frac{m}{n+P}. \qquad (5)$$

Substituirt man diesen Werth also in die Gleichung (2), so erhält man für die dem Maximum des Nutzeffectes entsprechende Last:

$$ar' = \frac{a}{1+\delta}\,(P-p-f), \qquad (6)$$

und wenn man in die Gleichung (3) substituirt, so bekommt man die Verdampfung S der Maschine als Function der dem größten Nutzeffecte entsprechenden Geschwindigkeit:

$$S = \frac{l + c}{l} \cdot \frac{n + P}{m} \cdot av'. \tag{7}$$

Endlich ist dieser größte Nutzeffect selbst $= ar'v'$, woraus sich die übrigen Ausdrücke desselben wie früher ergeben.

Wir haben hiermit alle Formeln, welche zur Auflösung der verschiedenen Aufgaben über die Berechnung der in Rede stehenden Maschinen nöthig sind, wobei jedoch zu bemerken ist, daß die Verdampfung ihren möglich größten Werth haben muß.

C. Practische Formeln zur Berechnung der Hochdruckmaschinen nebst einem Zahlenbeispiele.

§. 292. In den Hochdruckmaschinen wird der Dampf in dem Kessel unter einem starken Drucke gebildet, tritt dann in den Cylinder, wo er successive auf die beiden Grundflächen des Kolbens wirkt, diesem also eine hin- und hergehende Bewegung ertheilt und endlich nach vollbrachter Wirkung in die Atmosphäre entweicht, ohne condensirt zu werden. Bei diesen Maschinen muß also der atmosphärische Druck zu den Kräften gezählt werden, welche der Bewegung des Kolbens entgegen wirken, d. h. es muß hier $p = 14{,}71$ Pfund für den Quadratzoll, oder $p = 1{,}033$ Kilogramm für das Quadratcentimeter genommen werden. Ferner wollen wir in Ermangelung directer Beobachtungen nach Pambour $f = \frac{300}{d}$, wo d den Durchmesser des Cylinders bezeichnet, $\delta = \frac{1}{7} = 0{,}14$ und $c = 0{,}05\,l$ setzen. Endlich ist hier $m = 4\,348\,000$, $n = 620$ (§. 273), und wenn man diese Werthe in die vorhergehenden Formeln substituirt; so erhält man für die Berechnung der in Rede stehenden Maschinen die folgenden numerischen Formeln:

Practische Formeln zur Berechnung der Hochdruckmaschinen. (Engl. Maß.)

Allgemeiner Fall.

Geschwindigkeit des Kolbens in Fußen für die Minute:

$$v = \frac{S}{a} \cdot \frac{4\,140\,950}{2738 + (1 + \delta)\,r + f}.$$

Nutzlast in Pfunden:

$$ar = 4\,140\,950 \cdot \frac{S}{(1 + \delta)\,v} - \frac{a}{1 + \delta}\,(2738 + f).$$

Wirksame Verdampfung in Cubikfußen Wasser für die Minute:

$$S = av \cdot \frac{2738 + (1 + \delta)\,r + f}{4\,140\,950}.$$

Nutzeffect in Fußpfunden:

$$E = arv.$$

Die übrigen Ausdrücke wie früher.

Fall des Maximum des Nutzeffectes.

Geschwindigkeit des Kolbens in Fußen für die Minute:

$$v' = \frac{S}{a} \cdot \frac{4\,140\,950}{620 + P}.$$

Nutzlast in Pfunden:

$$ar' = \frac{a}{1+\delta}(P - f - 2118).$$

Wirksame Verdampfung in Cubikfußen Wasser für die Minute:

$$S = av' \cdot \frac{620 + P}{4\,140\,950}.$$

Nutzeffect in Fußpfunden:

$$E \text{ Max.} = ar'v'.$$

Die übrigen Ausdrücke wie oben.

Um von den vorhergehenden Formeln ein Anwendungsbeispiel zu geben, wollen wir eine Maschine berechnen, für welche man folgende Data kennt:

Durchmesser des Cylinders = 16 Zoll oder $a = 1{,}3963$ Quadratfuß.
Kolbenlauf $l = 3$ Fuß.
Wirksame Verdampfung $S = 0{,}378$ Cubikfuß.
Consumirte Kohlen für die Minute oder $N = 3{,}189$ Pfd.
Absoluter Druck im Kessel oder $P = 7848$ Pfd. für den Quadratfuß.

Wenn man die Rechnung ausführt, so erhält man für die Geschwindigkeiten von 170 und 250 Fuß in der Minute und für die Geschwindigkeit des größten Nutzeffectes folgende Resultate:

			Max. d. Nutzeff.
$v =$	250	170	132
$ar =$	1876	4460	6754
$\frac{r}{144} =$	9,33	22,18	33,59
$S =$	0,378	0 378	0,378
$E =$	469000	758200	894280
E in Pferdekr. =	14,21	22,98	27,10
E für 1 Pfd. Kohle =	147070	237760	280430
E für 1 Cubikfuß Wasser =	1240740	2005800	2365800
Q Kohle für 1 Pferdekr. =	0,224	0,139	0,118
Q Wasser für 1 Pferdekr. =	0,027	0,016	0,014
E in Pferdekr. für 1 Pfd. Kohl. =	4,46	7,21	8,50
E in Pferdekr. für 1 Cubikf. Wass. =	37,60	60,78	71,69

Diese Berechnung setzt voraus, daß das Feuer fortwährend so unterhalten wird, daß die wirksame Verdampfung im Kessel immer 0,378 Cubikfuß Wasser in der Minute beträgt. Wenn man aber eine kleinere Last in Bewegung setzen wollte, ohne die Geschwindigkeit zu vergrößern; so wäre offenbar eine geringere Verdampfung im Kessel oder ein schwächeres Feuer genügend. Gesetzt, die Verdamfung würde auf 0,292 Cubikfuß Wasser für die Minute, die Quantität Brennmaterial für dieselbe Zeit auf 2,221 und der absolute Druck des Dampfes im Kessel auf 55,13 Pfd. für den Quadratzoll festgesetzt; so erhielte man folgende Resultate:

			Max. d. Nutzeff.
$v =$	250	170	101
$ar =$	627	2623	6865
$\frac{r}{144} =$	3,12	13,05	34,15
$S =$	0,292	0,292	0,292
$E =$	156750	445910	694740
E in Pferdekr. = ...	4,75	13,51	21,05
E für 1 Pfd. Kohle = . . .	70582	200780	312830.

Hieraus sieht man also, daß bei der veränderten Geschwindigkeit und Verdampfung die Last von 34 Pfd. auf ungefähr 3 Pfd. für den Quadratzoll vermindert wird, während nach der gewöhnlichen Berechnungsmethode, wobei man die Nutzlast in allen Fällen vermittelst eines constanten Correctionscoefficienten, z. B. 0,6, aus dem Drucke des Dampfes im Kessel ableitet, diese Last $= (54{,}50 - 14{,}71) \times 0{,}60 = 23{,}88$ Pfd. für den Quadratzoll wäre, und folglich wäre auch der Nutzeffect in demselben Maße zu groß.

Die vorhin berechnete Maschine wird zur Vertheilung des Wassers in der Stadt Brighton in England benutzt, und die erhaltenen Rechnungsresultate werden durch die, welche Pambour durch Versuche mit dieser Maschine erhalten hat, vollkommen bestätigt.

Zwölfter Abschnitt.

IV. Theorie der Locomotiven oder Dampfwagen.

§. 293. Die **Locomotiven** oder **Dampfwagen**, wie sie auf Eisenbahnen angewandt werden, sind Hochdruckmaschinen, gewöhnlich ohne Expansion und ohne Condensation, welche hinsichtlich der Anwendungsart des Dampfes als bewegende Kraft nach denselben Principien construirt sind, wie die früheren Dampfmaschinen, nur bewegen sie sich auf Rädern und haben **zwei Cylinder**.

Der Dampf wird in dem Kessel derselben ebenfalls bei einem sehr hohen Drucke gebildet, tritt dann in die Cylinder, und zwar ununterbrochen während der Dauer des ganzen Kolbenlaufes, worauf er endlich in die Atmosphäre entweicht, ohne vorher condensirt zu werden. Der Dampf wirkt successive auf **beide** Grundflächen des Kolbens und ertheilt demselben so eine hin- und hergehende geradlinige Bewegung, welche vermittelst einer Kurbel in einer Rotationsbewegung verwandelt und durch eine Kurbelstange auf die Räder übertragen wird, worauf die Maschine ruht, so daß durch die Drehung der Räder die Maschine nebst ihrem ganzen Zuge sich auf den Bahnschienen fortbewegt.

Da die Locomotiven in theoretischer Hinsicht nur eine besondere Art Hochdruckmaschinen sind, so können die im vorhergehenden Abschnitte abgeleiteten Formeln auch auf sie angewandt werden. Es kommen jedoch auch mehrere besondere Umstände bei den Locomotiven in Betracht, weßhalb wir sie hier besonders abhandeln wollen. Diese Umstände sind: 1) Daß die Maschine ihr eignes Gewicht fortbewegen muß, wodurch ihre Reibung vermehrt und der Nutzeffect vermindert wird; 2) daß ein gewisser Theil der Kraft der Maschine verbraucht wird, um den Dampf in dem Schornsteine schnell fortzubewegen und so einen künstlichen Luftstrom zu erzeugen, wodurch das Feuer angefacht und die Kleinheit des Kessels gewissermaßen ersetzt wird; 3) daß die Maschine mit ihrem Zuge dem Widerstande der Luft ausgesetzt ist, welcher wie das Quadrat der Geschwindigkeit zunimmt und zu den bereits betrachteten Widerständen noch hinzugefügt werden muß, und endlich 4) daß in den Locomotiven eine weit beträchtlichere Menge tropfbarflüssiges Wasser durch den Dampf mit fortgeführt wird und folglich in Rechnung gebracht werden muß, so lange man zur Beseitigung dieses Uebelstandes kein Mittel gefunden hat.

Um diese verschiedenen Umstände in Rechnung zu bringen, wollen wir die Reibung F der Maschine mit Einschluß der zur Fortbewegung ihres eigenen Gewichtes erforderlichen Kraft bestimmen, indem wir sie, wie früher, auf die Flächeneinheit und auf die Geschwindigkeit des Kolbens beziehen. Ferner bezeichne $p'V$ den von dem Blaserohre herrührenden Druck für die Einheit der Kolbenfläche, welchen man nach den Versuchen von Pambour der Fortbewegungsgeschwindigkeit V der Maschine proportional setzen kann, und endlich wollen wir den Widerstand der Luft, welcher, wie gesagt, dem Quadrate derselben Geschwindigkeit proportional ist, durch uV^2 ausdrücken. Was den Verlust anlangt, welcher von dem mit dem Dampfe fortgenommenen tropfbarflüssigen Wasser herrührt, so werden wir denselben später in Rechnung bringen, indem wir ihn von der Bruttoverdampfung des Kessels abziehen, um die wirksame Verdampfung oder den wahren Werth von S zu erhalten.

Um die drei Widerstände F, $p'V$, uV^2 in Rechnung bringen zu können, muß man bemerken, daß der letzte seinem absoluten Werthe nach ausgedrückt ist, d. h. durch die Zugkraft, welche ausgeübt werden muß, um denselben bei der Geschwindigkeit V der Maschine oder des Radumfanges auf den Schienen zu überwinden. Nun verhält sich aber bekanntlich der Druck derselben Kraft in verschiedenen Puncten einer Maschine umgekehrt wie die Geschwindigkeit dieser Puncte, und außerdem verhält sich die Geschwindigkeit des Kolbens zu der der Fortbewegung der Maschine, wie die doppelte Länge des Kolbenlaufes zu dem Umfange des Treibrades. Bezeichnet also D den Durchmesser dieses Rades und π das Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser, so wird der Widerstand der Luft in Beziehung auf den Kolben in dem Verhältnisse $\frac{\pi D}{2l}$ vergrößert, und folglich wird die Intensität desselben in Beziehung auf die Geschwindigkeit des Kolbens und auf die Einheit seiner Grunfläche ausgedrückt durch:

$$\frac{\pi D}{2l} \cdot \frac{uV^2}{a}.$$

Die Reibung und der von dem Blaserohre herrührende Widerstand sind bereits auf die Geschwindigkeit des Kolbens und auf die Einheit seiner Grundfläche bezogen, und bedürfen folglich keiner Transformation. Der Widerstand der Last für die Einheit der Kolbenfläche, welchen wir früher mit r bezeichnet haben, wird jetzt um den Widerstand der Luft vermehrt und folglich gleich:

$$r + \frac{\pi D}{2al} uV^2.$$

Der Gegendruck ist jetzt nicht mehr der bloße atmosphärische Druck p, sondern wegen des Blaserohres gleich:

$$p + p'V,$$

und statt der Reibung f der Maschine muß jetzt F gesetzt werden.

Die Formeln (1) und (2) in §. 290, welche die Geschwindigkeit und die Last des Kolbens in dem allgemeinen Falle geben, gehen folglich in dem gegenwärtigen Falle durch Substitution der obigen Werthe in folgende über:

$$v = \frac{l}{l+c} \cdot \frac{S}{a} \cdot \frac{m}{(1+\delta)\left(r + \frac{\pi D}{2al} uV^2\right) + n + p + p'V + F},$$

$$ar = \frac{l}{l+c} \cdot \frac{mS}{(1+\delta)v} - \frac{a}{1+\delta}(n+p+p'V+F) - \frac{\pi D}{2l} uV^2.$$

Die durch diese Gleichungen gegebenen Größen v und r sind die Geschwindigkeit und die Last des Kolbens der Maschine; aber da es in der Praxis weit bequemer ist, unmittelbar die Geschwindigkeit der Maschine selbst auf den Bahnschienen und die Zugkraft, welche sie bei dieser Geschwindigkeit ausüben kann, zu haben; so ist es zweckmäßig, die vorhergehenden Gleichungen demgemäß zu transformiren. Zu dem Zwecke braucht man sich nur des vorhin Gesagten zu erinnern, nämlich: daß sich die Geschwindigkeit V der Maschine zu der Geschwindigkeit v des Kolbens wie πD zu $2l$ verhält, und folglich ist:

$$V = \frac{\pi D}{2l} v.$$

Ferner verhält sich die Zugkraft R der Maschine zu der des Kolbens ar umgekehrt wie diese Geschwindigkeiten, und folglich ist:

$$R = \frac{2l}{\pi D} ar.$$

Man braucht also nur diese Werthe zu substituiren, um die gewünschten Ausdrücke zu erhalten. Multiplicirt man die einander entsprechenden Theile der beiden letzten Gleichungen in einander, so erhält man:

$$RV = arv,$$

so daß folglich der Nutzeffect der Maschine ebensowohl durch RV, als durch arv ausgedrückt wird, woraus unmittelbar folgt, daß die Formeln zur Berechnung der Locomotiven, sowohl in dem allgemeinen Falle, wie in dem des Maximums des Nutzeffectes, folgende sind:

Allgemeiner Fall.

$$V = \frac{l}{l+c} \cdot \frac{mS}{(1+\delta)(R+uV^2) + \frac{2al}{\pi D}(n+p+p'V+F)},$$

$$R = \frac{l}{l+c} \cdot \frac{mS}{(1+\delta)V} - \frac{2l}{\pi D} \cdot \frac{a}{1+\delta}(n+p+p'V+F) - uV^2,$$

$$S = \frac{l+c}{l} \cdot \frac{V}{m}\left[(1+\delta)(R+uV^2) + \frac{2l}{\pi D} a(n+p+p'V+F)\right],$$

$$E = RV.$$

Fall des Maximums des Nutzeffectes.

$$V' = \frac{l}{l+c} \cdot \frac{\pi D}{2l} \cdot \frac{mS}{a(n+P)},$$

$$R' = \frac{a}{1+\delta} \cdot \frac{2l}{\pi D}(P - p - p'V' - F) - uV'^2,$$

$$S = \frac{l+c}{l} \cdot \frac{2l}{\pi D} \cdot \frac{aV'}{m}(n+P),$$

$$E \text{ Max.} = R'V'.$$

In Beziehung auf die Anwendung dieser Formeln ist zu bemerken, daß die, welche die Geschwindigkeit bei einer beliebigen Last gibt, im Nenner die beiden Glieder pV, uV^2 enthält, so daß man eigentlich eine Gleichung des dritten Grades auflösen müßte, was man jedoch durch das bekannte Verfahren der successiven Annäherung vermeiden kann, indem man nämlich einen ersten Näherungswerth der Geschwindigkeit substituirt, jedes dieser beiden Glieder berechnet, ihre Werthe in die Gleichung setzt und dann daraus einen Werth für V ableitet. Ist dieser Werth von V noch nicht genau genug, so verfährt man damit, wie mit dem ersten angenommenen Werthe, d. h. man berechnet wieder die Größen $p'V$, uV^2, substituirt diese Werthe in die Gleichung und leitet daraus einen neuen Werth von V ab, u. s. f.

Practische Formeln zur Berechnung der Locomotiven nebst einem Zahlenbeispiele.

§. 294. Um die zur numerischen Berechnung der Locomotiven geeigneten Formeln zu erhalten, müssen für die in den vorhergehenden Gleichungen vorkommenden Constanten noch ihre durch Beobachtung bestimmten Werthe gesetzt werden. Pambour hat die Reibung bei mehreren Locomotiven mit vier nicht gekuppelten Rädern und Cylindern von 11 Zoll im Durchmesser = 104 Pfd. gefunden. Aber da diese Reibung bei der Geschwindigkeit des Rades oder der Maschine auf den Schienen, welche 5,9 mal größer als die des Kolbens war, gemessen ist; so ist klar, daß dadurch auf den Kolben ein Widerstand $= 5{,}9 \times 104 = 614$ Pfd. entsteht, und da die beiden Kolbenflächen 190 Quadratzoll betragen, so beträgt die Reibung für den Quadratzoll der Kolbenfläche $\frac{614}{190} = 3{,}23$ Pfd. Bei Locomotiven mit vier gekuppelten oder mit sechs Rädern ist die Reibung etwas beträchtlich und steigt ungefähr auf 3,40 oder 3,60 Pfd. für den Quadratzoll. Im Allgemeinen kann man folglich $F = 350 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß der Grundfläche des Kolbens nehmen.

Da jedoch die Reibung in den Locomotiven von mehreren besonderen Umständen, wie z. B. von ihrem eigenen Gewichte, der Anzahl und Beschaffenheit ihrer Räder und ihrer Construction überhaupt abhängt; so kann diese Bestimmung nur so lange als eine genäherte angewandt werden, als man keine genaueren Mittel zur Bestimmung dieser Reibung anwenden kann oder will.

Bei der Vergleichung der Reibung der Locomotiven mit der Reibung feststehender Dampfmaschinen muß man bemerken, daß außer der **eigentlichen** Reibung oder der der mechanischen Organe der Maschine in der vorhergehenden Bestimmung auch die Reibung der Maschinen als **Fuhrwerk** bei ihrer Bewegung auf den Schienen mit begriffen ist. Diese letzte Reibung beträgt nach den Beobachtungen von **Pambour** 6 Pfd. für die Tonne, und da die erwähnten Locomotiven ein mittleres Gewicht von 8 Tonnen hatten; so betrug ihr Widerstand als **Fuhrwerk** oder ihre Reibung auf den Bahnschienen 48 Pfd. Addirt man folglich $\frac{48}{7} = 7$ Pfd. als Zunahme der Reibung in der Maschine selbst, so erhält man endlich 55 Pfd. für den **Gesammtwiderstand**, welcher von der Bewegung der Maschinen längs der Bahnschienen herrührt. Multiplicirt man diese Zahl ferner mit 5,9 und dividirt das Product durch 190, um die fragliche Kraft auf die Geschwindigkeit und die Einheit der Fläche des Kolbens zu beziehen; so findet man, daß der hervorgebrachte Widerstand 1,71 Pfd. für den Quadratzoll beträgt. Zieht man also diesen Betrag von der Gesammtreibung der Maschine, d. h. von 3,23 Pfd. für den Quadratzoll ab; so erhält man endlich für die **eigentliche** Reibung derselben 1,52 Pfund für den Quadratzoll der Kolbenfläche.

Später wird man sehen, daß diese Reibung etwas von der einer **Watt**'schen doppeltwirkenden Dampfmaschine von denselben Dimensionen verschieden ist, und wenn man bemerkt, daß die Locomotiven weder eine Luft-, noch eine Kaltwasserpumpe haben; so ist dieser kleine Unterschied wohl erklärlich.

Die Zunahme der Reibung für die Einheit der Last oder die Größe δ ist nach den Versuchen von **Pambour** $= 0{,}14$ oder ungefähr $\frac{1}{7}$.

Der von dem Blaserohre herrührende Druck ändert sich nicht blos mit der Geschwindigkeit des Kolbens, sondern auch mit der Verdampfung des Kessels in der Minute und mit der Größe der Mündung des Blaserohres. Der Einfachheit der Formeln wegen wollen wir diesen Widerstand hier auf die mittlere Verdampfung der Maschinen und auf die in der Praxis übliche Größe der erwähnten Mündung beziehen. Alsdann ergibt sich, daß der von dem Blaserohre herrührende Widerstand bei einer Geschwindigkeit der Maschine von 10 engl. Meilen in der Stunde oder 180 engl. Fuß in der Minute 1,75 Pfd. für den Quadratzoll der Kolbenfläche beträgt und sich im **geraden** Verhältnisse der Geschwindigkeit der Bewegung ändert. Dieser Widerstand ist also für den Quadratfuß gleich:

$$p'V = 1{,}75 \times 144 \text{ für } V = 880,$$

und folglich ist:

$$p' = \frac{1{,}75}{880} \cdot 144 = 0{,}2864 \text{ Pfd.}$$

Der Widerstand der Luft wird nach den Beobachtungen von **Pambour** ausgedrückt durch:

$$0{,}002687\ \Sigma V_1^2,$$

wo V_1 die Geschwindigkeit der Maschine in englischen Meilen für die Stunde und Σ die dem Widerstande der Luft dargebotene **wirksame** Fläche, nämlich 70 Quadratfuß für den Querschnitt des Zuges und außerdem noch 10 Quadratfuß für jeden Wagen, mit Einschluß der Maschine und ihres Tenders, bezeichnet. Wenn also V die Geschwindigkeit der Maschine in Fußen für die Minute bezeichnet, so hat man:

$$V_1^2 = \left(\frac{60}{5280}\right)^2 V^2,$$

weil 1 Meile = 5280 Fuß und 1 Stunde = 60 Minuten ist, und folglich hat man für den Widerstand der Luft:

$$uV^2 = 0{,}002687 \left(\frac{60}{5280}\right)^2 \Sigma V^2,$$

woraus folgt:

$$u = 0{,}000\,000347\ \Sigma.$$

Endlich beträgt die mit dem Dampfe fortgeführte Quantität tropfbarflüssigen Wassers ebenfalls nach den Beobachtungen von Pambour 0,24 der Bruttoverdampfung des Kessels, so daß folglich bei den Locomotiven die wirksame Verdampfung nur 0,76 der Bruttoverdampfung des Kessels beträgt.

Endlich ist in dem gegenwärtigen Falle:

$$m = 4348000,$$
$$n = 620,$$
$$\pi = 3{,}1416,$$
$$c = 0{,}05\,l,$$
$$p = 2118 \text{ für den Quadratfuß.}$$

Substituirt man diese Werthe in die obigen allgemeinen Gleichungen, so erhält man zur Berechnung der Locomotiven in engl. Maßen folgende:

Practische Formeln.

Allgemeiner Fall.

Geschwindigkeit der Maschine in Fußen für die Minute:

$$V = \frac{4\,348\,000\,S}{\left\{\begin{array}{l} 1197\,R + 0{,}668 \cdot \frac{al}{D}(2738 + F) \\ + 0{,}191\,\frac{al}{D}\,V + 0{,}000\,000415\,\Sigma V^2 \end{array}\right\}}.$$

Zugkraft oder Nutzladung der Maschine in Pfunden:

$$R = 3632500\,\frac{S}{V} - 0{,}558\,\frac{al}{D}(2738 + F)$$
$$- 0{,}160\,\frac{al}{D}\,V - 0{,}000\,000347\,\Sigma V^2.$$

Wirksame Verdampfung in Cubikfußen Wasser für die Minute:

$$S = \frac{V}{4\,348\,000}\left[1{,}197\,R - 0{,}668\,\frac{al}{D}(2738 + F)\right.$$
$$\left. + 0{,}191\,\frac{al}{D}\,V + 0{,}000\,000415\,\Sigma V^2\right].$$

Nutzeffect der Maschine in Fußpfunden:

$$E = RV.$$

Fall des Maximums des Nutzeffectes.

Geschwindigkeit der Maschine:

$$V' = \frac{D}{l} \cdot \frac{S}{a} \cdot \frac{65046000}{620 + P}.$$

Größte Zugkraft oder Nutzlast der Maschine:

$$R' = 0{,}558 \frac{al}{D} (P - 2118 - F) - 0{,}160 \frac{l}{D} aV' - 0{,}000\,000\,347\, \Sigma V'^2.$$

Wirksame Verdampfung:

$$S = aV' \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{620 + P}{6504600}.$$

Größter Nutzeffect:

$$E \text{ Max.} = R'V'.$$

Wir wollen hier noch bemerken, daß im zweiten Theile der Gleichung, welche die Last für eine gegebene Geschwindigkeit gibt, noch die Größe Σ vorkommt, welche von der Anzahl der Wagen, und folglich von der gesuchten Last R selbst abhängt. Man muß daher zuerst einen genäherten Werth von R annehmen, und daraus den zugehörigen Werth von Σ ableiten, welchen man in die Gleichung substituirt, um den Werth von R daraus zu berechnen. Ist dieser letzte Werth noch nicht genau genug, so wiederholt man dasselbe Verfahren.

Um von den vorhergehenden Formeln ein Anwendungsbeispiel zu geben, wollen wir eine Locomotive berechnen, für welche folgende Elemente gegeben sind:

2 Cylinder von 12 Zoll Durchmesser oder $a = 1{,}57$ Quadratfuß.

Kolbenlauf $l = 1{,}33$ Fuß.

Schädlicher Raum $c = 0{,}05\, l$.

Gekuppelte Räder von 5 Fuß Durchmesser.

Totaldruck $= 65$ Pfd. für den Quadratzoll oder $P = 65 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß.

Bruttoverdampfung $= 50$ Cubikfuß Wasser in der Stunde, oder wirksame Verdampfung $S = 0{,}633$ Cubikfuß Wasser in der Minute.

Consumirte Quantität Kohlen $N = 9{,}75$ Pfd. für 1 Minute.

Reibung der Maschine $= 3{,}62$ Pfd. für den Quadratzoll oder $F = 3{,}62 \times 144$ Pfd.

Wenn man mit diesen Daten die Berechnung ausführt, so erhält man folgende Resultate:

			Max. d. Nutzeff.
V =	1768	1473	986
R =	247	512	1328
S =	0,633	0,633	0,633
E =	436190	753500	1309300
E in Pferdekr. =	13	23	40
E für 1 Pfd. Kohle =	44740	77280	134290
E für 1 Cubikf. Wasser =	0,74	0,43	0,25
Q Kohle für 1 Pferdekr. =	0,048	0,028	0,016
Q Wasser für 1 Pferdekr. =	1,36	2,34	4,07
E in Pferdekr. für 1 Pfd. Kohle =	21	36	63

Dreizehnter Abschnitt.

V. Theorie der doppeltwirkenden Watt'schen Dampfmaschinen.

§. 295. Diese Watt'schen Maschinen sind doppeltwirkende mit niederem Druck, mit Condensation und ohne Expansion. Der Dampf wird in dem Kessel derselben unter einem Drucke gebildet, welcher den atmosphärischen Druck ungefähr um 1,5 bis 3 Pfd. für den Quadratzoll übersteigt, tritt hierauf während des ganzen Kolbenlaufes in den Cylinder, und wenn der Kolben z. B. seinen niedergehenden Lauf vollendet hat; so wird zwischen dem oberen Ende des Cylinders und dem Condensator eine Communication hergestellt, worauf der in dem oberen Theile des Cylinders befindliche Dampf sofort in den Condensator strömt, so daß auf die obere Kolbenfläche nur noch der sehr geringe Druck des unvollständig condensirten Dampfes wirkt. Aber in demselben Augenblicke wird auch der untere Theil des Cylinders mit dem Kessel in Communication gesetzt, so daß der Dampf jetzt gegen die untere Fläche des Kolbens wirkt, und folglich diesen aufwärts bewegt bis an das obere Ende des Cylinders, worauf dieser Dampf wieder condensirt und eine neue Quantität Dampf über den Kolben gelassen wird. Die dem Kolben auf diese Weise ertheilte hin- und hergehende Bewegung wird alsdann vermittelst einer Kurbel in eine Rotationsbewegung einer Schwungradwelle verwandelt und von dieser endlich auf die übrigen Theile des Mechanismus übertragen, weshalb diese Maschinen auch rotirende genannt werden.

Practische Formeln zur Berechnung der doppeltwirkenden Watt'schen Dampfmaschinen nebst einem Anwendungsbeispiele derselben.

§. 296. Wie schon bemerkt, wird bei diesen Maschinen keine Expansion des Dampfes angewandt, und folglich sind die im elften Abschnitte für Hochdruckmaschinen abgeleiteten Formeln auch auf sie anwendbar; nur hat P einen weit kleineren Werth und p bezeichnet nicht mehr den atmosphärischen Druck, sondern den Druck des unvollständig condensirten Dampfes. Wir wollen deshalb aus jenen allgemeinen Formeln sofort die entsprechenden Zahlenformeln ableiten und zu dem Zwecke zunächst die Zahlenwerthe der darin vorkommenden Constanten suchen.

Die Größe p drückt jetzt die Spannung des unter oder über dem Kolben unvollständig condensirten Dampfes aus, wobei aber zu bemerken ist, daß diese Spannung größer, als in dem Condensator sein muß, weil die Condensation nur allmälig in dem Condensator stattfindet, sowie der Dampf aus dem Cylinder in denselben überströmt und die Geschwindigkeit dieses Ueberströmens nur von dem Unterschiede zwischen der Spannung im Cylinder und in dem Condensator abhängt. Bei guten Maschinen, welche gehörig mit Condensationswasser versehen sind, dessen Temperatur nie über 50° Fahrenh. oder 15° Centes. steigt, beträgt die Spannung in dem Condensator nach der Angabe des Manometers gewöhnlich 1,5 Pfd. für den Quadratzoll, während nach directen Beobachtungen mit dem Watt'schen Indicator bei gewöhnlichen Geschwindigkeiten und den üblichen Dimensionen der Durchgangsöffnungen die mittlere Spannung unter dem Kolben gewöhnlich 2,5 Pfd. für den Quadratzoll höher ist, als im Condensator. Der wahre Werth von p ist folglich im Allgemeinen:

$$p = 4 \times 144 \text{ Pfd. für den Quadratfuß.}$$

Was die Reibung der in Rede stehenden Maschinen anlangt, so ändert sie sich nach einer großen Anzahl von Versuchen bei einer mäßigen Last von 2,5 Pfd. für den Quadratzoll der Kolbenfläche für die kleinsten und schlechtesten bis 1,5 Pfd. für die größten und besten, worin zugleich die zur Bewegung der Luft-, Kalt- und Warmwasserpumpen erforderliche Kraft begriffen ist. Unter einer mäßigen Last dieser Maschinen versteht man eine Last von ungefähr 8 Pfd. für den Quadratzoll der Kolbenfläche, und nach dem von Pambour mit Locomotiven angestellten Versuchen kann man annehmen, daß die Zunahme der Reibung ungefähr $\frac{1}{7}$ der Last oder 1 Pfd. für den Quadratzoll beträgt. Hiernach wäre also die Reibung der leeren Maschine 1,5 bis 0,5 Pfd. für den Quadratzoll, je nachdem der Durchmesser des Cylinders 17,5 bis 48,5 Zoll hat. Da diese Zahlen sich nahezu umgekehrt wie die Durchmesser der Cylinder verhalten, so muß man zur Bestimmung der Reibung irgend einer andern Maschine desselben Systemes und von mittleren Dimensionen die vorhergehenden Werthe in den erwähnten Verhältnissen abändern. Für eine Maschine von mittlerer Größe, d. h. von einem Cylinder von 33 Zoll = 2,75 Fuß Durchmesser, beträgt also die Reibung 0,75 Pfd. für den Quadratzoll der Kolbenfläche, woraus sich alsdann die Reibung für eine Maschine von beliebigen Dimensionen ergibt, wenn man die Zahl 0,75 mit dem umgekehrten Verhältnisse des Durchmessers des Cylinders der fraglichen Maschine zu der Zahl 33 oder 2,75, je nachdem der Durchmesser in Zollen oder Fußen ausgedrückt ist, multiplicirt. Es ist also:

$$f = 0{,}75 \times 144 \, \frac{2{,}75}{d} = \frac{300}{d},$$

für den Quadratfuß der Kolbenfläche. Diesen Ausdruck werden wir nicht blos für die Watt'schen Maschinen, sondern auch für alle übrigen anwenden, für welche noch keine genaueren speciellen Versuche angestellt sind.

Ferner wollen wir wieder $\delta = 0{,}14$ setzen. Endlich ist hier:

$$m = 4100000,$$
$$n = 250,$$

und gewöhnlich macht man:

$$c = 0{,}05\, l.$$

Hiernach ergeben sich leicht folgende

Practische Formeln

für die doppeltwirkenden Watt'schen Dampfmaschinen (engl. Maß):

Allgemeiner Fall.

Geschwindigkeit des Kolbens in Fußen für die Minute:

$$v = \frac{S}{a} \cdot \frac{3904700}{250 + (1 + \delta)\, r + p + f}.$$

Nutzlast in Pfunden:

$$ar = 3904700 \cdot \frac{S}{(1 + \delta)\, v} - \frac{a}{(1 + \delta)} (250 + p + f).$$

Wirksame Verdampfung für die Minute:

$$S = av \cdot \frac{250 + (1 + \delta)\, r + p + f}{3904700}.$$

Nutzeffect in Fußpfunden:

$$E = arv.$$

Fall des Maximums des Nutzeffectes.

Geschwindigkeit des Kolbens:

$$v' = \frac{S}{a} \cdot \frac{3904700}{250 + P}.$$

Nutzlast:

$$ar' = \frac{a}{1 + \delta} (P - p - f).$$

Wirksame Verdampfung:

$$S = ar' \cdot \frac{250 + P}{3904700}.$$

Größter Nutzeffect:

$$E\ \text{Max.} = ar'v'.$$

Als Anwendungsbeispiel wollen wir folgende Watt'sche Dampfmaschine berechnen:

Durchmesser des Cylinders = 34 Zoll oder $a = 6{,}287$ Quadratfuß.
Kolbenlauf $l = 8$ Fuß.
Schädlicher Raum $c = 0{,}05\, l$.
Absoluter Druck im Kessel = 16,5 Pfd. für den Quadratzoll oder $P = 16{,}5 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß.
Bruttoverdampfung = 0,927 Cubikfuß, folglich wirksame Verdampfung $S = 0{,}927 \times 0{,}95 = 0{,}881$ Pfd. Wasser in der Minute.
Consumirter Brennstoff $N = 6{,}71$ Pfd. in der Minute.

Wenn man die Rechnungen wirklich ausführt, so erhält man folgende Resultate:

			Max. d. Nutzeff.
v = ...	286	256	208
ar = ...	5396	6632	9133
$\frac{r}{144}$ = ...	5,96	7,33	10,09
S = ...	0,881	0,881	0,881
E = ...	1543300	1697800	1889600
E in Pferdekr. = ...	47	51	58
E für 1 Pfd. Kohle = ...	230000	253000	283100
E für 1 Cubikf. Wasser = . . .	1751700	1927100	2156200
Q Kohle für 1 Pferdekr. = . .	0,144	0,130	0,117
Q Wasser für 1 Pferdekr. = . .	0,020	0,018	0,016
E in Pferdekr. für 1 Pfd. Kohle =	6,97	7,67	8,58
E in Pferdekr. für 1 Cubikf. Wass. =	50	56	62.

In Beziehung auf die obigen Formeln ist jedoch zu bemerken, daß die daraus abgeleiteten Resultate nur dann stattfinden, wenn die vorausgesetzten Bedingungen auch wirklich erfüllt werden. Da sich aber sehr häufig mehrere wichtige Umstände ändern und nicht immer Rücksicht darauf genommen wird; so müssen wir noch hinzufügen: 1) daß, da der hervorgebrachte Effect der Maschine unmittelbar und nothwendig von der Verdampfung abhängt, es durchaus unmöglich ist, die Effecte einer gegebenen Maschine zu berechnen, ohne zuvor ihre Verdampfung bestimmt zu haben; 2) daß in jedem Falle der Druck im Kessel sowohl, als im Condensator an dem Manometer beobachtet werden muß, weil sich der erste Druck oft ändert und folglich auch gewisse Wirkungen dadurch geändert werden müssen, und 3) daß besonders die einem gegebenen Gewichte Brennstoff entsprechenden Effecte sehr unsicher sind, was hauptsächlich seinen Grund in der verschiedenen Güte des Brennstoffes, sowie in der verschiedenen Einrichtung des Kessels, des Feuerheerdes u. s. w. seinen Grund hat.

Vierzehnter Abschnitt.

VI. Theorie der doppeltwirkenden Cornwall'schen Dampfmaschinen.

§. 297. In der Grafschaft Cornwallis in England wendet man doppelt- und einfachwirkende Dampfmaschinen an; die letzten sind nur eine Modification der einfachwirkenden Watt'schen Dampfmaschinen, wovon weiter unten die Rede sein wird, und wir wollen uns daher hier nur mit den ersten beschäftigen, in welchen ein hoher Druck, Expansion und Condensation angewandt wird, d. h. es sind doppeltwirkende Watt'sche Dampfmaschinen, worin im Kessel ein absoluter Druck von ungefähr 3,5 Atmosphären und zugleich Expansion angewandt wird, welche Watt nur bei seinen einfachwirkenden Maschinen benutzt hat. Wir brauchen daher nur aus den in Abschnitt 10 abgeleiteten allgemeinen Gleichungen die den hier in Rede stehenden Maschinen entsprechenden speciellen oder numerischen Gleichungen abzuleiten, zu welchem Zwecke wir den Constanten folgende Werthe beilegen:

$$1)\quad f = 0{,}75 \times 144 \frac{2{,}75}{d} = \frac{300}{d},$$

wo d den Durchmesser des Cylinders in Fußen und f die Reibung der leeren Maschine in Pfunden für den Quadratfuß bezeichnet;

$$2)\quad \delta = 0{,}14,$$

$$3)\quad p = 1{,}25 \times 144,$$

für den Quadratfuß der Kolbenfläche

$$4)\quad c = 0{,}05\, l,$$

und endlich nehmen wir an, daß bei den Cornwall'schen Maschinen die wirksame Verdampfung der Bruttoverdampfung gleich ist, weil zwar eine beträchtliche Menge Wasser mit dem Dampfe fortgenommen, dasselbe aber durch den sehr stark erhitzten Cylinder wieder in Dampf verwandelt wird. Ferner ist hier:

$$m = 4100000,$$

$$n = 250.$$

Hiernach ergeben sich in engl. Maßen folgende

Practische Formeln zur Berechnung der doppeltwirkenden Cornwall'schen Dampfmaschinen.

a. Für eine beliebige Last oder Geschwindigkeit mit einer gegebenen Expansion.

Geschwindigkeit des Kolbens in Fußen für die Minute:

$$v = \frac{kS}{a} \cdot \frac{4100000}{250 + (1 + \delta)\, r + p + f}.$$

Nutzlast in Pfunden:

$$ar = 4100000 \cdot \frac{kS}{(1 + \delta)\, v} - \frac{a}{1 + \delta}\,(250 + p + f).$$

Wirksame Verdampfung für die Minute:

$$S = \frac{av}{k} \cdot \frac{250 + (1 + \delta)\, r + p + f}{4100000}.$$

Nutzeffect in Fußpfunden:

$$E = arv.$$

b. Für das Maximum des Nutzeffectes bei einer gegebenen Expansion.

Geschwindigkeit des Kolbens in Fußen für die Minute:

$$v' = \frac{l}{l' + c} \cdot \frac{S}{a} \cdot \frac{4100000}{250 + P}.$$

Nutzlast in Pfunden:

$$ar' = \frac{a}{1 + \delta} \cdot \frac{l' + c}{l}\, k\,(250 + P) - \frac{a}{1 + \delta}\,(250 + p + f).$$

Wirksame Verdampfung in der Minute:

$$S = \frac{l' + c}{l} \cdot ar' \cdot \frac{250 + P}{4100000}.$$

Größter Nutzeffect in Fußpfunden:

$$E \text{ Max.} = ar'v'.$$

c. Expansion für das absolute Maximum des Nutzeffectes.

$$\frac{l'}{l} = \frac{250 + p + f}{250 + P},$$

d. h. nach den obigen Zahlenangaben:

$$\frac{l'}{l} = \frac{250 + 2 \times 144}{250 + 40 \times 144} = 0{,}09.$$

Da aber bei Anwendung einer solchen Expansion die Bewegung zu ungleichmäßig werden würde, so kann man aus dem vorhergehenden Werthe weiter nichts schließen, als daß der Werth von l' möglichst klein angenommen werden muß. In der Praxis kann man höchstens $l' = \frac{1}{3}\, l$ oder $= \frac{1}{4}\, l$ nehmen, und für diese Grenzwerthe muß man folglich das absolute Maximum der Effecte der fraglichen Maschine bestimmen.

Fünfzehnter Abschnitt.

VII. Theorie der Woolf'schen Dampfmaschinen.

§. 298. Diese Maschinen sind doppeltwirkende, mit Hochdruck, Condensation und Expansion in zwei Cylindern von verschiedenen Dimensionen. Der in dem Kessel unter einem Drucke von ungefähr 3 bis 4 Atmosphären gebildete Dampf tritt zuerst in den oberen Theil des kleinen Cylinders während eines Theiles des Kolbenlaufes, worauf die Communication mit dem Kessel abgeschlossen wird und der Kolben vermöge der Expansion seinen Lauf vollendet, worauf zwischen dem oberen Theile des kleinen und dem untern des großen Cylinders die Communication hergestellt wird, so daß der in dem oberen Theile des kleinen Cylinders befindliche Dampf unter den Kolben des großen Cylinders tritt und diesen vermöge seiner Expansion aufwärts bewegt. Aber in demselben Augenblicke wird wieder die Communication zwischen dem Kessel und dem unteren Theile des kleinen Cylinders hergestellt, so daß wieder neuer Dampf unter den Kolben tritt und diesen aufwärts bewegt. Die beiden Kolben bewegen sich also gleichzeitig aufwärts, der kleine durch die unmittelbare Wirkung des Dampfes im Kessel und der große durch die Expansion des Dampfes, welcher zuvor in dem kleinen Cylinder gewirkt hat. Wenn die aufsteigende Bewegung der Kolben vollendet ist, so tritt der Dampf aus dem Kessel wieder über den kleinen Kolben, während der Dampf, welcher eben das Aufsteigen dieses Kolbens bewirkt hat, über den großen Kolben tritt, so daß sich folglich beide Kolben gleichzeitig in ihren Cylindern niederwärts bewegen, worauf sich dasselbe Spiel wiederholt, indem der Dampf jedesmal, nachdem er seine Wirkung in dem großen Cylinder gethan hat, aus diesem in einen Condensator strömt.

Aus dem Gesagten erhellet, daß in den Woolf'schen Maschinen die Wirkungsart des Dampfes die allgemeinste ist, wie wir sie in Abschnitt 10 bei der allgemeinen Theorie der Dampfmaschinen vorausgesetzt haben; aber da der Dampf während seiner Expansion successive auf ungleiche Kolbenflächen wirkt, so müssen dadurch einige Modificationen in den allgemeinen Formeln herbeigeführt werden, welche wir daher zuerst näher bestimmen müssen.

Es bezeichne wieder P die Spannung des Dampfes im Kessel und P' die des Dampfes in dem kleinen Cylinder vor der Expansion. Ferner seien A und a, L und l, C und c resp. die beiden Kolbenflächen, Kolbenläufe und schädlichen Räume, und endlich sei l' wieder die Länge, welche der kleine Kolben vor der Expansion durchläuft.

Wenn wir die Maschine wieder betrachten, nachdem ihre Bewegung gleichförmig geworden ist, so ist die Arbeit der bewegenden Kraft der des Widerstandes in derselben Zeit gleich. Die bewegende Kraft besteht hier aber in dem Drucke, welchen der aus dem Kessel kommende Dampf gegen den kleinen Kolben, und der aus dem kleinen Cylinder kommende Dampf gegen den großen Kolben ausübt. Der Widerstand dagegen besteht aus dem Drucke, welchen der in dem großen Cylinder befindliche Dampf gegen den kleinen Kolben ausübt, aus dem Drucke, welchen der unvollständig condensirte Dampf gegen den großen Kolben ausübt, und endlich aus der Last und Reibung der Maschine. Wir müssen daher die Quantität Arbeit jeder dieser fünf Kräfte für eine Oscillation des Balanciers successive bestimmen, um die Gleichung für das dynamische Gleichgewicht der Maschine zu erhalten

1) Nach dem in Abschnitt 10, §. 280 Gesagten wird die von dem Dampfe in dem kleinen Cylinder hervorgebrachte Gesammtquantität Arbeit ausgedrückt durch:

$$a\,(l' + c)\,(n + P')\left[\frac{l'}{l' + c} + log.\left(\frac{l + c}{l' + c}\right)\right] - nal.$$

2) Um die Quantität Arbeit zu erhalten, welche der Dampf während einer Oscillation der Maschine in dem großen Cylinder hervorbringt, muß man bemerken, daß es der Dampf ist, welcher in dem kleinen Cylinder bei der Spannung P' eine Länge $l + c$ einnahm und sich jetzt zum Theil über dem kleinen und zum Theil unter dem großen Kolben befindet und eine seinem Volumen entsprechrnde Spannung hat. Wenn wir also die Maschine in dem Augenblicke betrachten, wo der kleine Kolben eine Länge λ durchlaufen hat und die Spannung des Dampfes unter dem großen und über dem kleinen Kolben $= \omega$ geworden ist; so ist klar, daß man zwischen den Spannkräften und den zugehörigen Volumen eine Relation von der Fom:

$$p = \frac{M'}{M}\,(n + p') - n \qquad (c)$$

hat (§. 276). Da aber die Längen L und l in derselben Zeit durchlaufen werden, so folgt, daß, wenn der kleine Kolben die Länge λ durchlaufen hat, der große die Länge $\frac{L}{l}\lambda$ zurückgelegt hat, und folglich wird das Volumen des unter dem großen und über dem kleinen Kolben befindlichen Dampfes ausgedrückt durch:

$$A\left(\frac{L}{l}\lambda + C\right) + a\,(l - \lambda - c) = \frac{AL - al}{l}\lambda + a\,(l + c) + AC,$$

welches wir der Kürze wegen einstweilen durch:

$$O\lambda + Q$$

bezeichnen wollen. Man hat folglich nach der obigen allgemeinen Relatio (c):

$$\tilde{\omega} = \frac{a\,(l' + c)}{O\lambda + Q}\,(n + P') - n,$$

weil der betrachtete Dampf unter dem Drucke P' ein Volumen $= a\,(l' + c)$ hat.

Verfährt man also wieder wie früher, d. h. multiplicirt die beiden Theile dieser letzten Gleichung mit $\frac{AL}{l}\,d\lambda$ und integrirt zwischen den Grenzen $\lambda = 0$, $\lambda = l$ oder $\frac{L}{l}\lambda = 0$, $\frac{L}{l}\lambda = L$; so erhält man für die Gesammtarbeit des Dampfes in dem großen Cylinder den Ausdruck:

$$a\,(l' + c)\,(n + P')\,\frac{AL}{Ol}\,\log.\left(\frac{Ol + Q}{Q}\right) \qquad nAL.$$

3) Um den Ausdruck für die Quantität Arbeit des Widerstandes des Dampfes über dem kleinen Kolben zu erhalten, braucht man nur zu bemerken, daß dieser Dampf dieselbe Spannung $\tilde{\omega}$ hat, wie der in dem großen Cylinder wirkende Dampf, so daß man den obigen Werth von $\tilde{\omega}$ nur mit $ad\lambda$ zu multipliciren und zwischen den Grenzen $\lambda = 0$, $\lambda = l$ zu integriren braucht. Man sieht aber leicht ein, daß sich das gesuchte Resultat aus dem vorhergehenden ergibt, wenn man darin a für $\frac{AL}{l}$ setzt, und folglich hat man als Ausdruck desselben:

$$a\,(l' + c)\,(n + P')\,\frac{a}{O}\,\log.\left(\frac{Ol + Q}{Q}\right) - nal.$$

4) Wenn p die Spannung in dem mit dem Condensator in Communication stehenden großen Cylinder bezeichnet, so ist die diesem Widerstande entsprechende Quantität Arbeit während eines Kolbenlaufes offenbar:

$$pAL.$$

5) Wenn endlich R der durch die Maschine in Bewegung gesetzte Widerstand ist; aber nicht für die Einheit der Kolbenfläche, sondern seiner absoluten Größe nach, und h bezeichnet die Länge des Weges, welchen derselbe während eines Kolbenzuges durchläuft; so ist die diesem Widerstande und seinem Wege entsprechende Quantität Arbeit offenbar gleich:

$$Rh.$$

Denkt man sich ferner die Reibung der Maschine als aus zwei Theilen f, F bestehend und resp. auf die Flächeneinheit des kleinen und großen Kolbens bezogen, so wird die entsprechende Quantität Arbeit derselben für einen Kolbenlauf offenbar ausgedrückt durch:

$$fal + FAL.$$

Ist endlich wieder δ die Zunahme der Reibung der Maschine für jede Einheit des Widerstandes R und bei der Geschwindigkeit desselben; so ist die entsprechende Quantität Arbeit während eines Kolbenlaufes offenbar gleich:

$$\delta Rh.$$

Die diesen drei Widerständen entsprechende Totalquantität Arbeit während einer Oscillation der Maschine wird folglich ausgedrückt durch:

$$(1 + \delta) Rh + fal + FAL.$$

Wir haben also jetzt alle Elemente der durch die Kraft und durch den Widerstand hervorgebrachten Arbeit, und wenn wir die Gleichung ihres dynamischen Gleichgewichtes bilden, indem wir das Glied in den ersten Theil derselben setzen, welches dem dritten Widerstande, d. h. der Reaction des Dampfes gegen den kleinen Kolben entspricht; so erhalten wir:

$$a\,(l' + c)\,(n + P')\left[\frac{l'}{l' + c} + \log.\left(\frac{l + c}{l' + c}\right) + \frac{AL - al}{Ol}\log.\left(\frac{Ol + Q}{Q}\right)\right] - nAL$$
$$= (1 + \delta) Rh + fal + FAL + pAL,$$

und wenn endlich für O und Q ihre Werthe gesetzt werden:

$$a\,(l' + c)\,(n + P')\left[\frac{l'}{l' + c} + \log.\left(\frac{l + c}{l' + c}\right) + \log.\left(\frac{A\,(L + C) + ac}{a\,(l + c) + AC}\right)\right] - nAL$$
$$= (1 + \delta) Rh + fal + FAL + pAL. \qquad (A)$$

Dieses ist also die erste der beiden gesuchten allgemeinen Gleichungen zwischen den gegebenen und unbekannten Größen der Aufgabe, und die zweite ergibt sich wie früher aus der Bedingung: daß die erzeugte und verbrauche Quantität Dampf immer einander gleich sein müssen.

Wenn S wieder die in der Zeiteinheit (Minute) wirklich verdampfte Quantität Wasser bezeichnet, so wird das Volumen des unter dem Drucke P', d. h. bei dem Drucke im kleinen Cylinder vor der Expansion, daraus gebildeten Dampfes bekanntlich ausgedrückt durch:

$$\frac{mS}{n + P'}.$$

Ist ferner v die Geschwindigkeit des kleinen Kolbens, so wird die in dem kleinen Cylinder und in der Zeiteinheit vor der Expansion verbrauchte Quantität Dampf von der Spannung P' offenbar ausgedrückt durch:

$$\frac{v}{l}\,a\,(l' + c),$$

und die zweite gesuchte allgemeine Relation ist folglich wieder wie früher:

$$\frac{mS}{n + P'} = \frac{v}{l}\,a\,(l' + a). \qquad (B)$$

Eliminirt man nun P' zwischen den beiden Gleichungen (A) und (B), und setzt der Kürze wegen:

$$\frac{l'}{l'+c} + log.\left(\frac{l+c}{l'+c}\right) + log.\left(\frac{A\,(L+C)+ac}{a\,(l+c)+AC}\right) = k';$$

so erhält man für den gesuchten Werth von v:

$$v = \frac{l}{L} \cdot \frac{S}{A} \cdot \frac{mk'}{n + \frac{1}{AL}\left[(1+\delta)\,Rh + fal + FAL + pAL\right]}.$$

Aus dieser Geschwindigkeit des kleinen Kolbens ergibt sich die des großen $= \frac{L}{l} v$ und die des Angriffspunctes des Widerstandes R gleich $\frac{h}{l} v$ oder:

$$V = \frac{h}{L} \cdot \frac{S}{A} \cdot \frac{mk'}{n + \frac{1}{AL}\left[(1+\delta)\,Rh + fal + FAL + pAL\right]},$$

weil der Widerstand R und der große Kolben resp. den Weg h und L durchlaufen, während der kleine Kolben den Weg l zurücklegt.

Auch ist zu bemerken, daß dieser Werth von V, woraus sich alsdann alle übrigen Formeln ergeben, dem in Abschnitt 10 erhaltenen ganz ähnlich ist, nur mit dem Unterschiede, daß die Größe $\frac{h}{L} k'$ statt k und das Glied:

$$\frac{1}{AL}\left[(1+\delta)\,Rh + fal + FAL + pAL\right]$$

statt des Gliedes:

$$(1+\delta)\,r + p + f$$

steht. Es lassen sich daher die übrigen Ausdrücke für den gegenwärtigen Fall leicht aus denen in Abschnitt 10 ableiten, und man erhält die folgenden Formeln:

a) Fall einer beliebigen Last oder Geschwindigkeit mit einer gegebenen Expansion.

$$V = \frac{h}{L} \cdot \frac{S}{A} \cdot \frac{mk'}{n + \frac{1}{AL}\left[(1+\delta)\,Rh + fal + FAL + pAL\right]},$$

$$R = \frac{mk'S}{(1+\delta)\,V} - n\,\frac{AL}{(1+\delta)\,h} - \frac{fal + FAL + pAL}{(1+\delta)\,h},$$

$$S = \frac{L}{h} \cdot \frac{AV}{mk'}\left\{n + \frac{1}{AL}\left[(1+\delta)\,Rh + fal + FAL + pAL\right]\right\}.$$

$$E = RV.$$

b) Fall des Maximum des Nutzeffectes mit einer gegebenen Expansion:

$$V' = \frac{h}{l} \cdot \frac{l}{l' + c} \cdot \frac{S}{a} \cdot \frac{m}{n + P},$$

$$R' = \frac{l' + c}{l} \cdot \frac{al}{(1 + \delta) h} k' (n + P) - n \frac{AL}{(1 + \delta) h} - \frac{fal + FAL + pAL}{(1 + \delta) h},$$

$$S = \frac{l}{h} \cdot \frac{l' + c}{l} \cdot \frac{aV'}{m} (n + P),$$

$$E \text{ Max.} = R'V'.$$

c) Fall des absoluten Maximums des Nutzeffectes:

$$\frac{l'}{l} = \frac{AL}{al} \cdot \frac{n + \frac{1}{AL} [fal + FAL + pAL]}{n + P}.$$

Diese letzte Formel gibt die dem absoluten Maximum des Nutzeffectes entsprechende Expansion, und wenn man den daraus abgeleiteten Werth in die Formeln des zweiten Falles substituirt; so erhält man das absolute Maximum des Nutzeffectes der Maschine. Wenn in dem kleinen Cylinder keine Expansion angewandt wird, so ist $l' = l$, der dritte Fall kann also nicht stattfinden, und das Maximum des Nutzeffectes der Maschine ergibt sich aus den Formeln des zweiten Falles, wenn man darin $l' = l$ setzt.

Um die vorhergehenden allgemeinen Formeln in practische umsetzen zu können, müßten die genauen Werthe der darin vorkommenden Constanten durch specielle Versuche mit den in Rede stehenden Maschinen bestimmt sein, was bis jetzt nicht der Fall ist. Um jedoch den Gang der Rechnung zu zeigen und darzuthun, daß sich die vorhergehenden anscheinend complicirten Formeln in der Praxis doch auf sehr einfache Formen reduciren, wollen wir die Werthe der Constanten näherungsweise nach der Analogie mit den früher betrachteten Maschinen wie folgt annehmen:

$$1) \quad f = \frac{300}{d}, \; F = \frac{300}{D},$$

wo d, D die Durchmesser der Cylinder bezeichnen,

2) $\delta = 0{,}14$,
3) $p = 4 \times 144$ Pfd.,
4) $c = 0{,}05\, l$ und $C = 0{,}05 L$,
5) $m = 4100000$,
$n = 250$.

Alsdann ergeben sich folgende

Practische Formeln zur Berechnung der Woolf'schen Maschinen.

a. Allgemeiner Fall.

Geschwindigkeit der Last in Fußen für die Minute:

$$V = \frac{h}{L} \cdot \frac{S}{A} \cdot \frac{4\,100\,000\,k'}{250 + \frac{1}{AL}\left[(1+\delta)\,Rh + fal + FAL + pAL\right]}.$$

Nutzlast in Pfunden:

$$R = 4\,100\,000\,\frac{k'S}{(1+\delta)\,V} - \frac{1}{(1+\delta)\,h}\,(250AL + fal + FAL + pAL).$$

Wirksame Verdampfung in der Minute:

$$S = \frac{L}{k'h} \cdot \frac{AV}{4\,100\,000}\left[250 + (1+\delta)\,\frac{Rh}{AL} + \frac{1}{AL}(fal + FAL + pAL)\right].$$

Nutzeffect in Fußpfunden:

$$E = RV.$$

b. Fall des Maximums des Nutzeffectes mit einer gegebenen Expansion.

Geschwindigkeit der Last:

$$V' = \frac{h}{l} \cdot \frac{l}{l' + c} \cdot \frac{S}{a} \cdot \frac{4\,100\,000}{250 + P}.$$

Nutzlast:

$$R' = \frac{l' + c}{l} \cdot \frac{al}{(1+\delta)\,h}\,k'\,(250 + P) - \frac{1}{(1+\delta)\,h}\,(250\,AL + fal + FAL + pAL).$$

Wirksame Verdampfung:

$$S = \frac{l}{h} \cdot \frac{l' + c}{l} \cdot \frac{aV'}{4\,100\,000}\,(250 + P).$$

Nutzeffect:

$$E\ \text{Max.} = R'V'.$$

c. Absolutes Maximum des Nutzeffectes.

$$\frac{l'}{l} = \frac{AL}{al} \cdot \frac{250 + \frac{1}{AL}\,(fal + FAL + pAL)}{250 + P}.$$

Sechszehnter Abschnitt.

VIII. Theorie der Evans'schen Dampfmaschinen.

§. 299. Die Evans'schen Maschinen sind doppeltwirkende, mit Hochdruck und Expansion, aber ohne Condensation. Der Dampf bildet sich in dem Kessel unter einem Drucke von 50 bis 120 Pfd. für den Quadratzoll, oder von 3 bis 8 Atmosphären, tritt dann während der Hälfte oder des dritten Theiles des ganzen Kolbenlaufes in den Cylinder und wird hierauf von dem Kessel abgesperrt, so daß der Kolben durch die Expansion des in dem Cylinder befindlichen Dampfes weiter bewegt wird, und endlich entweicht dieser Dampf in die Atmosphäre, ohne vorher condensirt zu werden.

Der Dampf wirkt also in den Evans'schen Maschinen ganz auf dieselbe Weise, wie in den doppeltwirkenden Cornwall'schen Maschinen, so daß die allgemeinen Formeln dieselben sind, wie im Abschnitt 14; nur drückt P hier im Allgemeinen eine weit höhere Spannung und p den atmosphärischen Druck aus. Wir gehen deshalb sofort zur Aufstellung der numerischen oder practischen Formeln über, indem wir die Constanten wieder näherungsweise nach der Analogie mit den bereits früher betrachteten Maschinen festsetzen, nämlich:

$$f = \frac{300}{d},$$
$$\delta = 0{,}14,$$
$$p = 14{,}71 \times 144 = 2118 \text{ Pfd.},$$
$$c = 0{,}05\, l,$$
$$m = 4348000,$$
$$n = 620.$$

Hiernach erhält man folgende

Practische Formeln zur Berechnung der Evans'schen Dampfmaschinen.

a. Allgemeiner Fall.

Geschwindigkeit des Kolbens:

$$v = \frac{kS}{a} \cdot \frac{4348000}{2738 + (1+\delta)\, r + f}.$$

Nutzlast in Pfunden:

$$ar = 4348000 \cdot \frac{kS}{(1+\delta)v} - \frac{a}{(1+\delta)}(2738 + f).$$

Wirksame Verdampfung in der Minute:

$$S = \frac{av}{h} \cdot \frac{2738 + (1+\delta)r + f)}{4348000}$$

Nutzeffect in Fußpfunden:

$$E = arv.$$

b. Fall des Maximum des Nutzeffectes mit einer gegebenen Expansion.

Geschwindigkeit des Kolbens:

$$v' = \frac{l}{l' + c} \cdot \frac{S}{a} \cdot \frac{4348000}{620 + P}.$$

Nutzlast in Pfunden:

$$ar' = \frac{a}{1+\delta} \cdot \frac{l'+c}{l} k\,(620 + P) - \frac{a}{(1+\delta)}(2738 + f).$$

Wirksame Verdampfung in der Minute:

$$S = \frac{l'+c}{l} \cdot av' \cdot \frac{620 + P}{4348000}.$$

Größter Nutzeffect:

$$E\ \text{Max.} = ar'v'.$$

c. Für das absolute Maximum des Nutzeffectes.

$$\frac{l'}{l} = \frac{2738 + f}{620 + P}$$

$$= \frac{3170}{17900} = 0{,}18 \text{ für } P = 120 \text{ Pfd.}$$

$$= 0{,}35 \text{ für } P = 55 \text{ Pfd.}$$

Die Erfahrung hat jedoch gelehrt, daß bei Rotationsmaschinen l' nicht wohl kleiner als $\frac{1}{3}\,l$ genommen werden kann, weil sonst die Bewegung zu unregelmäßig wird. Die vorhergehende Formel gibt also blos die Grenze der Expansion an, welcher man sich so viel als möglich zu nähern suchen muß, um den größten Nutzeffect zu erzielen.

Wir wollen die vorhergehenden Formeln auf eine Maschine des gegenwärtigen Systemes anwenden, welche in Brighton in England zur Vertheilung des Wassers angewandt wird, und für welche folgende Größen gegeben sind:

Durchmesser = 16,5 Zoll oder $a = 1{,}4849$ Quadratfuß.
Kolbenlauf $l = 3$ Fuß.

Expansion $\frac{l'}{l} = 0,517$.

Bruttoverdampfung $= 0,317$ Cubikfuß oder wirksame Verdampfung $S = 0,317 \times 0,95 = 0,301$.

Consumirtes Brennmaterial $N = 2,845$.

Mit diesen Werthen erhält man folgende Resultate:

			Max. d. Nutzeff.
$v =$	250	200	183
$ar =$	3144	4892	5711
$\frac{r}{144} =$	14,70	22,88	26,71
$S =$	0,301	0,301	0,301
$E =$	786000	978410	1045100
E in Pferdekr. $=$	23,82	29,65	31,67
E für 1 Pfd. Kohle $=$	276280	343910	367350
E für 1 Cubikfuß Wasser $=$	2612800	3252450	3474200
Q Kohle für 1 Pferdekr. $=$	0,120	0,096	0,090
Q Wasser für 1 Pferdekr. $=$	0,013	0,010	0,009
E in Pferdekr. für 1 Pfd. Kohle $=$	8,37	10,42	11,13
E in Pferdekr. für 1 Cubikf. Wass. $=$	79	99	105.

Für die vortheilhafteste Expansion $\frac{l'}{l} = 0,35$ findet man dagegen:

$v'' =$	259
$ar'' =$	4340
$\frac{r''}{144} =$	20,30
$E =$	1125000
E in Pferdekr. $=$	34,09
E für 1 Pfd. Kohle $=$	395410
E für 1 Cubikf. Wasser $=$	3739600.

Hieraus sieht man, daß der Nutzeffect bei der Expansion 0,517 ungefähr um 2 Pferdekräfte und der Effect für 1 Pfd. Kohle ungefähr um 2800 Fußpfunde kleiner ist, als bei der Expansion 0,35, wogegen aber die Bewegung regelmäßiger wird, was bei gewissen Arbeiten sehr wesentlich sein kann.

Die vorhin erhaltenen Resultate setzen voraus, daß die Verdampfung stark genug ist, welche Bedingung gewöhnlich erfüllt wird, wenn die Maschine ihre vollständige Last hat; aber bei einer geringeren Last und bei derselben Verdampfung im Kessel würde der Kolben eine größere Geschwindigkeit annehmen, so daß man die Stärke des Feuers und folglich die Verdampfung im Kessel vermindern müßte, wenn die Maschine ihre gewöhnliche Geschwindigkeit behalten sollte. Gesetzt, die Bruttoverdampfung wäre in einem solchen Falle nur gleich 0,243 Cubikfuß, also die wirksame Verdampfung $S = 0,231$ Cubikfuß und $N = 2,325$; so erhielte man bei der Expansion 0,517 folgende Resultate:

			Max. d. Nutzeff.
$v =$	250	200	140,5
$ar =$	1527	2870	5711
$\frac{r}{144} =$	7,14	13,42	26,71
$S =$	0,231	0,231	0,231
$E =$	381750	574000	802660
E in Pferdekr. $=$	11,57	17,40	24,32
E für 1 Pfd. Kohle $=$	164160	246840	345170.

Siebenzehnter Abschnitt.

IX. Theorie der einfachwirkenden Watt'schen Dampfmaschinen.

§. 300. In diesen einfachwirkenden Watt'schen Dampfmaschinen wird der Dampf bei einem niederen Drucke von ungefähr 1,1 Atmosphäre in dem Kessel gebildet und zugleich Expansion und Condensation angewandt. Der Dampf wirkt nur auf die obere Kolbenfläche und die Maschine bringt ihre Wirkung nur während des niedersteigenden Kolbenzuges hervor, weshalb sie auch einfachwirkend genannt wird. Zuerst wird zwischen dem Kessel und dem oberen Theile des Cylinders, sowie zwischen dem unteren Theile des Cylinders und dem Condensator die Communication hergestellt, so daß der Dampf mit seiner ganzen Kraft auf die obere Fläche des Kolbens wirkt, und dieser anfängt, sich niederwärts zu bewegen, während der von dem vorhergehenden Kolbenzuge noch unter dem Kolben befindliche Dampf condensirt wird. Hat der Kolben einen gewissen Theil seines niedergehenden Weges durchlaufen, so wird die Communication zwischen dem Kessel und dem Cylinder abgesperrt, und der Kolben setzt seine Bewegung vermöge der Expansion des in dem Cylinder befindlichen Dampfes bis an das untere Ende des Cylinders fort, worauf sich das Austrittsventil des Dampfes schließt und das Gleichgewichtsventil öffnet, wodurch zwischen dem oberen und unteren Theile des Cylinders eine freie Communication hergestellt wird, so daß sich der Dampf auf beiden Seiten des Kolbens verbreitet und letzterer sich darin im Gleichgewichte befindet. Während dieses Niedergehens des Kolbens wird an dem anderen Ende des Balanciers ein Gegengewicht gehoben, welches nun den Kolben in dem Cylinder wieder aufwärts zu bewegen strebt, welcher Bewegung im Allgemeinen nur die eigene Reibung der Maschine hinderlich ist, während die eigentliche Last der Maschine der aufwärtsgehenden Bewegung des Kolbens eher förderlich als hinderlich ist, worauf sich dasselbe Spiel wiederholt.

Wenn man diese Maschinen mit den bisher betrachteten vergleicht, so sieht man, daß sie sich durch dreierlei wesentlich davon unterscheiden: 1) durch das Gegengewicht, welches abwechselnd als Widerstand und als bewegende Kraft wirkt; 2) daß dasselbe als bewegende Kraft vermöge seiner Schwere wirkt, und 3) daß die Bewegung des Widerstandes weder stetig, noch gleichförmig ist. Wir müssen daher zunächst untersuchen, ob durch diese Umstände die Grundlagen der Theorie der übrigen Dampfmaschinen wesentlich geändert werden.

1) Was die abwechselnde Wirkung des Gegengewichtes als Widerstand und als bewegende Kraft anlangt, so kann daraus keine wesentliche Aenderung der bisherigen Schlußweise entspringen; denn dieses Gegengewicht wirkt genau wie ein Schwungrad, wie es sich an den bisher betrachteten Dampfmaschinen befindet. Die Bewegung der einfachwirkenden Dampfmaschinen besteht nämlich aus zwei verschiedenen Theilen, aus dem niedersteigenden Kolbenzuge, während dessen der Nutzeffect hervorgebracht, z. B. das Wasser in den Pumpen gehoben wird, und aus dem aufsteigenden Kolbenzuge, welcher durch das Gegengewicht bewirkt wird und mit keinem Nutzeffecte verbunden ist, sondern blos den Zweck hat, den Kolben in seine ursprüngliche Lage zurückzuführen, damit der Dampf von neuem darauf wirken kann. Während der ersten Periode dieser Bewegung wird aber dem Gegengewichte eine gewisse Quantität Arbeit mitgetheilt, indem es auf eine gewisse Höhe gehoben wird; und während der zweiten Periode wird der Maschine durch das Herabfallen des Gegengewichtes von derselben Höhe diese Quantität Arbeit wieder restituirt. Die Wirkung dieses Gegengewichtes ist folglich ganz dieselbe, wie die eines gewöhnlichen Schwungrades.

2) Während des aufsteigenden Kolbenlaufes bildet die Schwere des Gegengewichtes die bewegende Kraft, und die Geschwindigkeit dieser Bewegung hängt offenbar von dem Ueberschusse des Gegengewichtes über den dermaligen Widerstand der Maschine ab. Wenn man also zwischen der Geschwindigkeit des niedersteigenden und der des aufsteigenden Kolbenlaufes unterscheiden wollte, so müßte man die zweite nothwendig nach den Umständen des Falles des Gegengewichtes berechnen. Da aber eine ganze oder vollständige Oscillation der Maschine aus einem auf- und einem niedersteigenden Kolbenlaufe besteht, so ist es ziemlich gleichgültig, ob die Geschwindigkeit während des einen groß und während des andern klein ist, oder umgekehrt, weil es bei der Berechnung des Effectes der Maschine nur auf die mittlere Geschwindigkeit, d. h. auf die Anzahl der vollständigen Oscillationen, ankommt, welche die Maschine in der Minute macht; denn sobald man diese Zahl kennt, kann man auch den Nutzeffect der Maschine berechnen, weil man weiß, daß die Last bei jeder vollständigen Oscillation um die Länge des Kolbenlaufes fortbewegt wird. Diese mittlere Geschwindigkeit wird aber nothwendig durch die Verdampfung im Kessel bestimmt, und läßt sich daraus direct berechnen; denn wenn man das in der Minute im Kessel gebildete und in den Cylinder übergeströmte Volumen Dampf durch den inneren Rauminhalt des Cylinders dividirt, so erhält man die Anzahl der vollständigen Oscillationen, welche die Maschine in der Minute macht.

3) Die in Rede stehenden Maschinen haben kein Schwungrad, und die Bewegung des Widerstandes ist weder stetig, noch gleichförmig; aber die Erhaltung der Maschine fordert, daß sie so regulirt ist, daß der Kolben in den Umkehrungspuncten der Bewegung nicht plötz-

lich durch einen Stoß, sondern allmählig zur Ruhe kommt. Bei dem niedersteigenden Kolbenlaufe kann man dieses vermittelst des Zulassungsventiles oder der Veränderung der Expansion leicht erreichen, so daß kein Verlust an lebendiger Kraft stattfindet, und bei dem aufsteigenden Kolbenlaufe erreicht man denselben Zweck leicht durch Veränderung des Gegengewichtes, oder durch einen früheren oder späteren Verschluß des Gleichgewichtsventiles. Diese Vorbereitung der Maschine muß nothwendig bei jeder veränderten Last wiederholt werden; ist sie aber einmal vorgenommen, so kommt der Kolben immer allmählig und ohne Verlust an lebendiger Kraft an das Ende seiner Bewegung, und es findet folglich bei den einfachwirkenden Dampfmaschinen, sowohl wie bei den bisher betrachteten Systemen zwischen der Arbeit der Kraft und der des Widerstandes immer Gleichheit statt, so daß folglich auch auf die jetzt betrachteten Maschinen unsere bisherige Schlußweise anwendbar bleibt. Nur muß man bemerken, daß diese Gleichheit zwischen der Arbeit der Kraft und der der Last nur bei jedem einzelnen Kolbenlaufe stattfindet, wodurch sich zunächst zwischen den Kräften und den Widerständen zwei allgemeine Relationen ergeben, und eine dritte solche Relation ergibt sich wieder aus der Bedingung: daß die erzeugte Quantität Dampf immer der in derselben Zeit verbrauchten Quantität gleich ist. Wir wollen daher zunächst diese drei Fundamentalgleichungen aufstellen und dann daraus die Formeln ableiten, welche zur Auflösung der verschiedenen in der Praxis vorkommenden Aufgaben geeignet sind.

A. Effecte der Maschinen bei einer beliebigen Expansion, Last oder Geschwindigkeit und einem beliebigen Gegengewichte.

§. 301. In dem Vorhergehenden haben wir gesehen, daß bei den doppeltwirkenden Dampfmaschinen ohne Expansion zwei Fälle zu unterscheiden sind, nämlich: 1) der Fall, wo die Maschine mit einer beliebigen Last oder Geschwindigkeit, und 2) der Fall, wo sie mit der das Maximum des Nutzeffectes gebenden Last oder Geschwindigkeit arbeitet. Ferner haben wir gesehen, daß bei den doppeltwirkenden Dampfmaschinen mit Expansion noch ein dritter Fall vorkommt, nämlich der, wo die Expansion nicht von vornherein gegeben ist, sondern im Gegentheil auf die vortheilhafteste Weise bestimmt wird, so daß man das absolute Maximum des Nutzeffectes erhält. Aber bei den einfachwirkenden Dampfmaschinen mit Expansion tritt noch ein neues Element hinzu, nämlich das Gegengewicht, und wir müssen folglich bei diesen Maschinen vier Fälle unterscheiden, nämlich:

1) Wenn sie mit einer beliebigen Expansion, Last oder Geschwindigkeit und mit einem beliebigen Gegengewichte arbeiten, d. h. wenn diese Elemente zuvor ganz willkürlich festgesetzt sind.

2) Wenn sie mit einer beliebigen Expansion und einem ebenfalls beliebigen Gegengewichte, aber mit der vortheilhaftesten Last für dieses Gegengewicht und diese Expansion arbeiten.

3) Wenn sie mit einer beliebigen Expansion, aber mit der für dieselbe günstigsten Last und Gegengewichte arbeiten

4) Wenn auch die Expansion sowohl, als die Last und das Gegengewicht auf die vortheilhafteste Weise bestimmt wird, so daß man das absolute Maximum des Nutzeffectes erhält.

Wir wollen nun diese vier Fälle successive näher untersuchen, indem wir mit dem ersten, allgemeinsten Falle anfangen, und zu dem Zwecke die Gleichungen aufstellen, welche die Gleichheit zwischen der Arbeit der Kraft und der des Widerstandes bei jedem der beiden Kolbenläufe und die Gleichheit zwischen der erzeugten und verbrauchten Quantität Dampf ausdrücken.

1) Betrachten wir zunächst den niedersteigenden Kolbenlauf und behalten alle früheren Bezeichnungen bei, so wird nach dem Obigen die während des ganzen Kolbenlaufes von dem Dampfe hervorgebrachte Quantität Arbeit ausgedrückt durch:

$$a\,(l'+c)\,(n+P')\left[\frac{l'}{l'+c}+log.\left(\frac{l+c}{l'+c}\right)\right]-nal.$$

Ferner besteht der Widerstand aus der Nutzlast ϱ', auf die Flächeneinheit und die Geschwindigkeit des Kolbens bezogen, aus dem Gegengewichte, welches wir für die Einheit der Kolbenfläche mit Π bezeichnen wollen, aus dem Drucke p des unter dem Kolben unvollständig condensirten Dampfes, und endlich aus der Reibung $f'+\delta\,(\varrho'+\Pi)$ der mit der Last $\varrho'+\Pi$ beladenen Maschine, wo f' die Reibung der leeren Maschine bezeichnet, worunter wir hier nicht blos ihre eigene Reibung, sondern auch alle übrigen Widerstände außer dem Nutzeffecte verstehen. Die während des niedersteigenden Kolbenlaufes allen diesen Widerständen zusammengenommen entsprechende Quantität Arbeit wird folglich ausgedrückt durch:

$$\left[(1+\delta)\,(\varrho'+\Pi)+p+f'\right]\,al.$$

Man hat daher die Gleichung:

$$a\,(l'+c)\,(n+P')\left[\frac{l'}{l'+c}+log.\left(\frac{l+c}{l'+c}\right)\right]-nal$$
$$=\left[(1+\delta)\,(\varrho'+\Pi)+p+f'\right]\,al,$$

oder wenn man der Kürze wegen setzt:

$$k'=\frac{l'}{l'+c}+log.\left(\frac{l+c}{l'+c}\right),$$

die folgende:

$$n+P'=\frac{l}{l'+c}\cdot\frac{1}{k}\left[n+(1+\delta)\,(\varrho'+\Pi)+p+f\right],\quad (A)$$

welches die erste der gesuchten Gleichungen zwischen den bekannten und unbekannten Größen der Aufgabe ist.

2) Um dieselbe Relation für den aufsteigenden Kolbenlauf zu erhalten, muß man wieder ausdrücken, daß die Quantität Arbeit der bewegenden Kraft der des Widerstandes gleich ist. Die bewegende Kraft ist hier das Gegengewicht, und der Widerstand besteht aus dem Gegendrucke des Dampfes nach Verschluß des Gleichgewichtsventiles, aus dem Widerstande ϱ'' der Hülfspumpe, welche gewöhnlich während des aufsteigenden Kolbenlaufes in Thätigkeit gesetzt wird und das Was-

ser aus dem Brunnen in den Behälter der Hauptpumpe hebt, insofern die ganze Maschine zum Heben des Wassers angewandt wird, und endlich aus der Reibung der Maschine, worunter wir wieder die Summe aller Widerstände, den Nutzeffect ausgenommen, welche die Maschine bei ihrer Bewegung überwinden muß, verstehen, d. h. nicht blos die Reibung der verschiedenen Organe des Mechanismus, sondern auch die Kraft, welche erforderlich ist, um die Luftpumpe, sowie jede andere etwa noch angewandte Pumpe in Thätigkeit zu setzen, und endlich auch den immer sehr kleinen Widerstand, welcher auf den Kolben ausgeübt wird, wenn der Balancier am Ende des Kolbenlaufes anschlägt. Die Reibung der leeren Maschine ist folglich bei dem aufsteigenden Kolbenlaufe nicht genau dieselbe, wie bei dem niedersteigenden, und wir wollen sie daher mit f'' statt mit f' bezeichnen.

Die während des aufsteigenden Kolbenlaufes von dem Gegengewichte hervorgebrachte Quantität Arbeit ist folglich:

$$= \Pi a l,$$

und die den Widerständen f'', ϱ'' entsprechende:

$$f''al + \varrho''al;$$

denn man muß bemerken, daß die Hülfspumpe unmittelbar durch das Gegengewicht und nicht durch den Balancier in Bewegung gesetzt wird, und folglich auch keine Zunahme der Reibung der Maschine veranlaßt. Was endlich die dem widerstehenden Dampfe entsprechende Quantität Arbeit anlangt, so erfordert sie eine besondere Erörterung.

Während der aufsteigenden Bewegung des Kolbens und vor dem Verschlusse des Gleichgewichtsventiles ist der Druck des Dampfes über dem Kolben nothwendig etwas stärker, als der des Dampfes unter dem Kolben, weil der Dampf nur vermöge dieses Druckunterschiedes von der einen Seite des Kolbens auf die andere strömt. Da dieser Druckunterschied aber immer sehr klein ist, wenn das Gleichgewichtsventil eine hinreichende Weite hat; so wollen wir hier annehmen, daß sich der Kolben bis zu dem Augenblicke des Schlusses des Gleichgewichtsventiles in dem Dampfe im Gleichgewichte befindet, oder daß auf seine beiden Flächen ein gleicher Druck ausgeübt wird.

So lange das Gleichgewichtsventil offen bleibt, hat der im oberen und unteren Theile des Cylinders befindliche Dampf dieselbe Spannung, wie nach der Expansion bei dem früheren niedersteigenden Kolbenlaufe, d. h. die Spannung:

$$\tilde{\omega} = (n + P') \frac{l' + c}{l + 2c} - n.$$

Es bezeichne ferner l'' die Länge, welche der Kolben in dem Augenblicke durchlaufen hat, wo das Gleichgewichtsventil geschlossen wird, so setzt der Kolben von diesem Augenblicke an seine Bewegung vermöge der erlangten Geschwindigkeit und der Wirkung des Gegengewichtes noch weiter fort, und folglich nimmt der über dem Kolben befindliche Dampf, welcher nicht entweichen kann, eine immer größer werdende Spannkraft an, während dagegen die Spannung des unter dem Kolben befindlichen Dampfes fortwährend geringer wird.

Betrachten wir also den Kolben in dem Augenblicke, wo derselbe die Länge λ durchlaufen hat, bezeichnen die Spannung des unter und über dem Kolben befindlichen Dampfes in diesem Augenblicke resp. mit $\tilde{\omega}''$, $\tilde{\omega}'$, und nehmen an, daß der Kolben noch das Raumelement $d\lambda$ beschreibt; so wird die von dem Widerstande des Dampfes während dieses Elementes hervorgebrachte Quantität Arbeit ausgedrückt durch:

$$(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}'')\, a d\lambda.$$

Da aber die Spannung des Dampfes in beiden Theilen des Cylinders in dem Augenblicke des Verschlusses des Gleichgewichtsventiles $= \tilde{\omega}$ war, so hat man zwischen den Spannungen und den Volumen des unter und über dem Kolben befindlichen Dampfes offenbar die Relationen:

$$\tilde{\omega}' = (n + \tilde{\omega}) \cdot \frac{l - l'' + c}{l - \lambda + c} - n,$$

$$\tilde{\omega}'' = (n + \tilde{\omega}) \cdot \frac{l'' + c}{\lambda + c} - n,$$

und folglich für das obige Arbeitselement:

$$(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}'')\, a d\lambda = a\,(n + \tilde{\omega}) \left[(l - l'' + c) \frac{d\lambda}{l - \lambda + c} - (l'' + c) \frac{d\lambda}{\lambda + c}\right],$$

oder wenn man für $\tilde{\omega}$ seinen obigen Werth setzt:

$$(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}'')\, a d\lambda = a\, \frac{l' + c}{l + 2c} \cdot (n + P')$$

$$\times \left[(l - l'' + c) \frac{d\lambda}{l - \lambda + c} - (l'' + c) \frac{d\lambda}{\lambda + c}\right].$$

Integrirt man nun diesen letzten Ausdruck zwischen den Grenzen l'' und l, so erhält man für die dem Widerstande des Dampfes entsprechende Totalquantität Arbeit:

$$a\, \frac{l' + c}{l + 2c}\, (n + P') \left[(l - l'' + c) \log.\left(\frac{l - l'' + c}{c}\right) - (l'' + c) \log.\left(\frac{l + c}{l'' + c}\right)\right],$$

und wenn man der Kürze wegen setzt:

$$k'' = \frac{l - l'' + c}{l + 2c} \log.\left(\frac{l - l'' + c}{c}\right) - \frac{l'' + c}{l + 2c} \log.\left(\frac{l + c}{l'' + c}\right),$$

so kann man den vorhergehenden Ausdruck auf folgende Form bringen:

$$k'' a l\, (n + P')\, \frac{l' + c}{l}.$$

Da aber die Quantität Arbeit der bewegenden Kraft der des Gesammtwiderstandes gleich sein muß, so erhält man zwischen den gegebenen und unbekannten Größen der Aufgabe als zweite allgemeine Relation folgende Gleichung:

$$k'' a l\,(n + P')\, \frac{l' + c}{l} + f'' a l + \varrho'' a l = \Pi a l,$$

oder:

$$n + P' = \frac{l}{l' + c} \cdot \frac{1}{k''} (\Pi - f' - \varrho''). \qquad (B)$$

3) Um endlich die **dritte** allgemeine Relation zu erhalten, welche die Gleichheit zwischen der erzeugten und der verbrauchten Quantität Dampf ausdrückt, muß man bemerken, daß bei jedem Kolbenzuge nur der Dampf condensirt und folglich verbraucht wird, welcher bei dem **aufsteigenden** Kolbenzuge **unter** den Kolben getreten ist, weil der darüber befindliche Dampf wieder gegen den Kessel zu getrieben und beim folgenden Kolbenzuge benutzt wird.

Die Spannung $\tilde{\omega}$ des Dampfes aber, welcher condensirt werden muß, wird für den Augenblick, wo das Gleichgewichtsventil geschlossen wird, durch folgende Gleichung gegeben:

$$n + \tilde{\omega} = (n + P') \frac{l' + c}{l + 2c}.$$

Ferner ist das Volumen Dampf, welches bei jedem Kolbenzuge condensirt werden muß, gleich:

$$a\,(l'' + c),$$

und wenn in der Minute M Kolbenzüge stattfinden; so ist folglich das in der Minute verbrauchte Volumen Dampf gleich:

$$Ma\,(l'' + c).$$

Aber wenn V die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens oder der in der Minute sowohl auf- als abwärts beschriebene Raum ist, so hat man $V = 2\,Ml$, oder wenn man, wie es in der Praxis bei den fraglichen Maschinen üblich ist, nur den Raum v rechnet, welchen der Kolben während der Hervorbringung des Nutzeffectes beschreibt, und nur halb so groß ist, als der erste; so hat man:

$$v = Ml \text{ oder } M = \frac{v}{l}.$$

Folglich kann das obige in der Minute verbrauchte Volumen Dampf auch ausgedrückt werden durch:

$$av \cdot \frac{l'' + c}{l}.$$

Bezeichnet ferner S wieder das in der Minute im Kessel verdampfte Volumen Wasser, so wird das Volumen des daraus gebildeten Dampfes von der Spannung P bekanntlich ausgedrückt durch:

$$\frac{mS}{n + P},$$

und wenn dieser Dampf von der Spannung P zu der Spannung $\tilde{\omega}$ des verbrauchten Dampfes übergeht; so wird sein Volumen ausgedrückt durch:

$$\frac{mS}{n + P} \cdot \frac{n + P}{n + \tilde{\omega}} = \frac{mS}{n + \tilde{\omega}}.$$

Da aber die im Cylinder verbrauchte Quantität Dampf der im Kessel erzeugten gleich ist; so hat man:

$$av\,\frac{l'' + c}{l} = \frac{mS}{n + \tilde{\omega}},$$

oder wenn man für $(n + \tilde{\omega})$ seinen Werth setzt:

$$n + P' = m \cdot \frac{l + 2c}{l'' + c} \cdot \frac{l}{l' + c} \cdot \frac{S}{av}, \qquad (C)$$

welches die dritte gesuchte Relation ist.

Eliminirt man nun die unbekannte Größe P' successive zwischen den beiden Gleichungen (A) und (C), und zwischen den beiden Gleichungen (B) und (C), indem man blos die zweiten Theile dieser Gleichungen einander gleich setzt; so erhält man die beiden vorläufigen Relationen:

$$\frac{1}{k'}[n + p + f' + (1 + \delta)\varrho' + (1 + \delta)\Pi] = m\frac{l + 2c}{l'' + c} \cdot \frac{S}{av},$$

$$\frac{1}{k''}(\Pi - \varrho'' - f'') = m \cdot \frac{l + 2c}{l'' + c} \cdot \frac{S}{av}.$$

Wenn man endlich aus der zweiten dieser letzten Gleichungen den Werth von Π ableitet, denselben in die erste substituirt, und diese dann in Beziehung auf die verschiedenen Unbekannten der Aufgabe auflöst; so erhält man, indem man $\varrho' + \varrho'' = r$ setzt, die folgenden Formeln:

$$v = m \cdot \frac{S}{a} \cdot \frac{l + 2c}{l'' + c} \cdot \frac{k' - (1 + \delta) k''}{(1 + \delta) r + p + f' + (1 + \delta) f''}, \qquad (1)$$

$$ar = m \cdot \frac{S}{v} \cdot \frac{l + 2c}{l'' + c}\left(\frac{k'}{1 + \delta} - k''\right)$$

$$- \frac{a}{1 + \delta}[n + p + f' + (1 + \delta) f''], \qquad (2)$$

$$S = \frac{av}{m} \cdot \frac{l'' + c}{l + 2c} \cdot \frac{(1 + \delta) r + n + p + f' + (1 + \delta) f''}{k' - (1 + \delta) k''}, \qquad (3)$$

$$E = arv. \qquad (4)$$

Diese Gleichungen geben also unmittelbar die Effecte einer Maschine, deren Dimensionen und übrigen Elemente bekannt sind; aber in Beziehung auf diese letztern müssen wir noch einige Bemerkungen hinzufügen:

Die in den vorhergehenden Gleichungen vorkommenden Größen sind: 1) die Dimensionen der Maschinen, wie a, l, c, welche nothwendig von vorn herein bekannt sind; 2) die Spannungen P, p des Dampfes, welche man immer vermittelst des Manometers beobachten kann, und folglich als unmittelbar gegeben betrachtet werden müssen; 3) die Reibungen f', f'' und δ, welche von der Construction der Maschine abhängen, und nach den mit ähnlichen Maschinen angestellten Versuchen berechnet werden können; und endlich 4) die eigentlichen Veränderlichen, wie die Last, die Geschwindigkeit, die Verdampfung, die Expansion $\frac{l'}{l}$ und $\frac{l''}{l}$. Unter diesen Veränderlichen sind die Größen v, r und S immer unmittelbar gegeben, wenn sie nicht gerade die unbekannten oder gesuchten Größen der Aufgaben selbst sind, und dasselbe gilt von der Expansion $\frac{l'}{l}$, weil man vermittelst der üblichen

Apparate, wie das Regulirungsventil, der Regulator oder das Zulassungsventil, eine Maschine immer mit einer beliebigen gegebenen Expansion arbeiten lassen kann, wofern diese Expansion nur eine gewisse Grenze nicht überschreitet, so daß der Dampf durch seine Expansion die gegebene Last noch bewegen kann. Alle diese Größen sind also unmittelbar gegeben oder als solche zu betrachten; allein dasselbe ist nicht bei der Größe $\frac{l''}{l}$ der Fall, weil dieselbe in den gewöhnlichen Fällen nicht zu den ursprünglichen gegebenen Größen gehört, so daß sie eigentlich aus den Gleichungen verschwinden und dafür das Gegengewicht Π, welches die wahre ursprünglich gegebene Größe ist, darin vorkommen müßte. Wegen der transcendenten Function k'' konnten wir nämlich die Größe l'' nicht eliminiren, sondern mußten Π eliminiren, und es kommt nun darauf an, l'' als Function von Π kennen zu lernen, so daß man die Größe l'' immer als eine gegebene betrachten kann, obgleich sie nicht von vorn herein bekannt ist.

Um die Größe l'' als Function von Π kennen zu lernen, braucht man nur auf die allgemeinen Gleichungen (A), (B), (C) zurückzugehen. Denn wenn man P' successive zwischen den beiden ersten und zwischen den beiden letzten dieser Gleichungen eliminirt und für ϱ' seinen Werth $r - \varrho''$ wieder setzt, so erhält man die Relationen:

$$k'' = k' \cdot \frac{\Pi - \varrho'' - f''}{(1 + \delta)(\Pi + r - \varrho'') + n + p + f'}, \qquad (E)$$

$$\frac{l + 2c}{l'' + c}\, k'' = \frac{av}{mS}\,(\Pi - \varrho'' - f''), \qquad (E')$$

woraus man sieht, daß sich die Größe $\frac{l''}{l}$ unmittelbar ergibt, sobald man das Gegengewicht und die Last, oder die Geschwindigkeit der Maschine kennt. In dem Falle des Maximums des Nutzeffectes kennt man zwar weder die Geschwindigkeit, noch die Last der Maschine a priori; aber alsdann wird die Größe l'' unmittelbar gegeben. Ferner ist die in den vorhergehenden Gleichungen vorkommende Größe ϱ'' constant, und folglich kann man vermittelst der Gleichungen (E), (E') immer $\frac{l''}{l}$ als Function des Gegengewichtes bestimmen, so daß also diese Größe immer als eine gegebene betrachtet werden kann, selbst in dem Falle, wo sie nicht unmittelbar, sondern nur mittelbar durch das Gegengewicht gegeben ist.

Um aus den vorhergehenden Gleichungen den Zahlenwerth von $\frac{l''}{l}$ abzuleiten, muß man die im zweiten Theile angedeuteten arithmetischen Operationen verrichten, worauf man für die Gleichung (E) in der weiter unten vorkommenden Tafel der Werthe von k'' den Werth aufsucht, welcher der erhaltenen Zahl gleich ist; so findet man unmittelbar daneben den zugehörigen Werth von $\frac{l''}{l}$. Will man die Gleichung (E')

anwenden, so nimmt man für $\frac{l}{l''}$ einen Werth an, sucht aus der Tafel den zugehörigen Werth von k'' und bildet das Product:

$$\frac{l+c}{l''+c}\,k'',$$

welches dem zweiten Theile der Gleichung (E') gleich sein muß. Ist dieses der Fall, so ist der angenommene Werth $\frac{l''}{l}$ der gesuchte und die Aufgabe gelöst; und ist es nicht der Fall, so nimmt man für $\frac{l''}{l}$ einen andern, von dem ersten etwas verschiedenen Werthe an, und untersucht, ob er der Gleichung genügt u. s. f. Hierauf lassen sich alsdann auch die in den Formeln vorkommenden beiden Größen k' und k'' vermittelst ihrer Ausdrücke:

$$k' = \frac{l'}{l'+c} + log.\left(\frac{l+c}{l'+c}\right),$$

$$k'' = \frac{l-l''+c}{l+2c}\,log.\left(\frac{l-l''+c}{c}\right) - \frac{l''+c}{l+2c}\,log.\left(\frac{l+c}{l''+c}\right),$$

oder noch leichter mit Hülfe der weiter unten vorkommenden Tafeln finden.

B. Last oder Geschwindigkeit, welche das Maximum des Nutzeffectes bei einem gegebenen Gegengewichte und einer gegebenen Expansion liefern.

§. 302. Vermittelst der vorhergehenden Formeln kann man den Nutzeffect einer einfachwirkenden Dampfmaschine berechnen, sobald alle darin vorkommenden Größen bekannt sind. Von diesen Größen sind aber bei derselben Maschine einige constant, wie die Dimensionen des Cylinders, die Reibung, die Spannung im Kessel u. s. f., während die übrigen dagegen, wie die Last r, oder die Geschwindigkeit v, das Gegengewicht Π, welches die Größe $\frac{l''}{l}$ bestimmt, und endlich die Expansion $\frac{l'}{l}$ nach Belieben verändert werden können, und wir wollen daher jetzt die Werthe dieser Größen auf die für die Arbeit der Maschine vortheilhafteste Weise zu bestimmen suchen, und zwar zunächst die Last oder Geschwindigkeit, für welche bei einem gegebenen Gegengewichte und einer gegebenen Expansion das Maximum des Nutzeffectes erhalten wird, worauf wir dann für die bestimmte Expansion das den größten Nutzeffect gebende Gegengewicht und endlich noch die dem absoluten Maximum des Nutzeffectes entsprechende Expansion suchen wollen.

Aus den weiter oben erhaltenen Formeln sieht man, daß der Kolben bei demselben Gegengewichte und bei derselben Expansion für jede Last r eine gewisse Geschwindigkeit annimmt, und daß folglich auch jeder Last ein gewisser Nutzeffect entspricht, und da alle diese Nutzeffecte nothwendig verschieden sind; so muß es unter den verschiedenen Lasten der Maschinen auch eine geben, für welche die Maschine mit dem bestimmten Gegengewichte und der gegebenen Expansion den größten Nutzeffect hervorbringt. Um diese Last kennen zu lernen, muß man zunächst den Ausdruck des Nutzeffectes der Maschine mit einer beliebigen Last r bilden, und dann untersuchen, welcher Werth von r diesen Ausdruck zu einem Maximum macht. Nun wird aber die Geschwindigkeit der Maschine mit der Last r ausgedrückt durch:

$$v = m\frac{S}{a} \cdot \frac{l+2c}{l''+c} \times \frac{k'-(1+\delta)k''}{(1+\delta)r+n+p+f'+(1+\delta)f''},$$

und wenn man beide Theile dieser Gleichung mit ar multiplicirt; so erhält man:

$$arv = mS \cdot \frac{l+2c}{l''+c} \times \frac{[k'-(1+\delta)k'']r}{(1+\delta)r+n+p+f'+(1+\delta)f''}$$

für den Ausdruck des Nutzeffectes der Maschine mit der Last r, woraus unmittelbar erhellet, daß dem Maximum der Last r auch das Maximum des Nutzeffectes arv entspricht. Aber aus der Gleichung (A), nämlich:

$$n+P' = \frac{l}{l'+c} \cdot \frac{1}{k'}\left[(1+\delta)r+n+p+f'+(1+\delta)\Pi\right]$$

sieht man, daß dem größten Werthe von r der größte Werth von P', nämlich P entspricht, und wenn man endlich diesen Werth in die Gleichungen (A) und (C) substituirt; so erhält man für die gesuchte Geschwindigkeit und Last:

$$v' = m\frac{l+2c}{l''+c} \cdot \frac{l}{l'+c} \cdot \frac{S}{a} \cdot \frac{1}{n+P'}, \tag{5}$$

$$ar' = a\frac{l'+c}{l}\left(\frac{k'}{1+\delta} - k''\right)(n+P) - \frac{a}{1+\delta}\left[n+p+f'+(1+\delta)f''\right]. \tag{6}$$

C. Bestimmung der Reibung der unbelasteten Maschine und der Zunahme dieser Reibung für die Einheit der Last.

§. 303. Die vorhin erhaltenen Formeln können auch zur Bestimmung der Reibung der leeren Maschine, sowie der Zunahme dieser Reibung für die Einheit der Last dienen. Denn wenn man die Maschine von ihrer Last befreit und dann den Druck im Kessel allmählig abnehmen läßt, bis daß der Kolben eben noch seinen ganzen Weg zurücklegen kann und das Gleichgewichtsventil zeitig genug schließt, damit der Balancier bei dem aufsteigenden Kolbenzuge nicht anstößt; so ist klar, daß die Reibung dieser Maschine alsdann eine größte Last für dieselbe geworden ist, wenigstens bei dem im Kessel stattfindenden Drucke. Wenn P'' diesen Druck bezeichnet, so finden die allgemeinen Gleichungen (A) und (B) noch statt, wenn man darin zugleich $P = P''$, $\varrho' = 0$, $\varrho'' = 0$ setzt, wodurch man erhält:

$$f' = \frac{l'+c}{l}k'(n+P'') - (n+\Pi) - \delta\Pi,$$

$$f'' = \Pi - \frac{l'+c}{l}k''(n+P'').$$

Diese Gleichungen geben die gesuchte Reibung, weil die Größen $\frac{l'}{l}$, $\frac{l''}{l}$ unmittelbar an der Maschine gemessen werden können, also die Größen k', k'' bekannt sind, und weil man außerdem die Spannungen P'', p in dem Kessel und Cylinder durch das Manometer und den Indicator bestimmen und endlich das Glied $\delta \Pi$ vernachlässigen kann.

Um alsdann die Größe δ kennen zu lernen, braucht man nur die Maschine bei dem niedergehenden Kolbenzuge mit einer bekannten Last ϱ' arbeiten zu lassen, indem man vermittelst des Sicherheitsventiles die Spannung im Kessel so weit herabsinken läßt, daß sie eben noch im Stande ist, den Kolben seinen ganzen Weg durchlaufen zu lassen. Alsdann ist ϱ' die größte Last, welche die Maschine bei der verminderten Spannung des Dempfes in Bewegung setzen kann. Wenn folglich P''' dieser kleinste Druck ist, so wird die Gleichung (A) für $P' = P'''$ erfüllt, und man hat die Gleichung:

$$\delta = \frac{\frac{l' + c}{l} k' (n + P''') - (n + \varrho' + \Pi) - f'}{\varrho' + \Pi},$$

welche die Größe δ gibt, weil f' nach der vorhergehenden Bestimmung bekannt ist. Da jedoch bei der Bestimmung des Werthes von f' die Größe δ vernachlässigt wurde, so kann man vermittelst des eben gefundenen Werthes von δ auch einen genaueren Werth von f' erhalten.

Man kann die Reibungen f', f'' auch bestimmen, ohne an der gewöhnlichen Arbeit der Maschine etwas zu ändern, wofern nur die Last ϱ'' bei dem aufsteigenden Kolbenlaufe genau bekannt ist; denn man braucht zu dem Zwecke nur die Spannung des Dampfes im Kessel so weit zu vermindern, daß die gewöhnliche Last der Maschine ein Maximum wird, und dafür zu sorgen, daß am Ende des aufsteigenden Kolbenlaufes kein Stoß stattfindet. Denn ist P_1 alsdann der beobachtete Druck im Kessel, so wird die allgemeine Gleichung (B) für $P' = P_1$ erfüllt, und man hat folglich:

$$f'' = \Pi - \varrho'' - \frac{l' + c}{l} k'' (n + P_1).$$

D. Vortheilhaftestes Gegengewicht für eine gegebene Expansion.

§. 304. Die obigen Formeln scheinen von dem Gegengewichte der Maschine unabhängig zu sein, allein sie sind es in der That nicht, weil die Größen $\frac{l''}{l}$ und k'' darin vorkommen, welche den Werth des Gegengewichtes bestimmen, oder vielmehr durch dasselbe nach der Gleichung (B) bestimmt werden. Wenn man also dem Gegengewichte verschiedene Werthe gibt, so entsprechen denselben auch verschiedene Werthe von l'', und mithin verschiedene Werthe des Maximums des Nutzeffectes der Maschine; und es muß folglich unter den verschiedenen Werthen des Gegengewichtes nothwendig einer vorkommen, welcher für die bestimmte Expansion das absolute Maximum des Nutzeffectes gibt. Wir wollen daher zunächst sehen, welcher Werth von l'' der fraglichen Bedingung genügt, und dann den entsprechenden Werth des Gegengewichtes bestimmen.

Zu dem Zwecke müssen wir zuerst den Ausdruck des Maximums des Nutzeffectes der Maschine bei einem beliebigen Werthe von l'' ableiten, und dann untersuchen, welcher Werth von l'' diesen Ausdruck für die bestimmte Expansion zu einem Maximum macht. Der fragliche Ausdruck wird aber offenbar erhalten, wenn man die entsprechenden Theile der Gleichungen (5) und (6) in einander multiplicirt, nämlich:

$$ar'v' = \frac{mS}{1+\delta} \cdot \frac{l+2c}{l''+c}\left[k' - \frac{l}{l'+c} \cdot \frac{n+p+f'+(1+\delta)f''}{n+P}\right] - \frac{mS\,(l+2c)}{l''+c}\,k'',$$

und wenn man den gemeinschaftlichen Factor mS der beiden Glieder des zweiten Theiles hinwegläßt, und endlich für k'' seinen Werth setzt; so erhält man für diesen zweiten Theil den Ausdruck:

$$\frac{1}{1+\delta} \cdot \frac{l+2c}{l''+c}\left[k' - \frac{l}{l'+c} \cdot \frac{n+p+f'+(1+\delta)f''}{n+P}\right] - \frac{l-l''+c}{l''+c}\,log.\left(\frac{l-l''+c}{c}\right) + log.\left(\frac{l+c}{l''+c}\right),$$

welcher zu einem Maximum gemacht werden muß. Setzt man aber den in Beziehung auf l'' genommenen Differentialquotienten dieses Ausdruckes gleich Null, so erhält man die Relation:

$$log.\left(\frac{l-l''+c}{c}\right) = \frac{k'}{1+\delta} - \frac{1}{1+\delta} \cdot \frac{l}{l'+c} \cdot \frac{n+p+f'+(1+\delta)f''}{n+P}, \quad (7)$$

welche die Bedingung des Maximums des Nutzeffectes für die gegebene Expansion ausdrückt, und woraus sich der gesuchte Werth von $\frac{l''}{l}$ ergibt. Um aus diesem Werthe nun den des Gegengewichtes abzuleiten, braucht man in der Gleichung (B) nur $P' = P$ zu setzen, woraus sich alsdann ergibt:

$$\Pi = \frac{l'+c}{l}\,(n+P)\,k'' + f'' + \varrho''. \quad (8)$$

Wenn jedoch der auf diese Weise bestimmte Werth des Gegengewichtes in der Praxis mit Nachtheilen verbunden wäre, so müßte man offenbar einen andern sich dem ersten so viel als möglich nähernden Werth annehmen.

E. Expansion für das absolute Maximum des Nutzeffectes.

§. 305. Bisher haben wir die Expansion als gegeben vorausgesetzt und die entsprechenden Effecte der Maschine bestimmt, und wir wollen jetzt auch diese Expansion auf die vortheilhafteste Weise bestimmen, so daß wir das absolute Maximum des Nutzeffectes erhalten, welches die Maschine überhaupt hervorbringen kann. Zu dem Zwecke müssen wir den Ausdruck des Maximums des Nutzeffectes der Maschine bei einer beliebigen Expansion betrachten, und untersuchen, für welchen Werth dieser Expansion derselbe ein Maximum wird, d. h. wir müssen den Ausdruck:

$$ar'v' = \frac{mS}{1+\delta} \cdot \frac{l+2c}{l''+c}\left[k' - \frac{l}{l'+c} \cdot \frac{n+p+f'+(1+\delta)f''}{n+P}\right] - mS \cdot \frac{l+2c}{l''+c}\,k'',$$

oder wenn für k' sein Werth gesetzt wird, den Ausdruck:

$$ar'v' = \frac{mS}{1+\delta} \cdot \frac{l+2c}{l''+c}\left[\frac{l'}{l'+c} + log.\left(\frac{l+c}{l'+c}\right) - \frac{l}{l'+c} \cdot \frac{n+p+f'+(1+\delta)f''}{n+P}\right] - mS \cdot \frac{l+2c}{l''+c}\,k''$$

zu einem Maximum machen.

Wenn man aber bemerkt, daß bei den fraglichen Maschinen das Gleichgewichtsventil immer ganz kurz vor dem Ende des Kolbenlaufes geschlossen wird, so kann man näherungsweise $l'' = l$, und folglich $k'' = 0$ setzen, wodurch der letzte Ausdruck dem in §. 289 für doppeltwirkende Maschinen erhaltenen ganz ähnlich wird, woraus alsdann sofort folgt, daß die Bedingung des Maximums folgende ist:

$$\frac{l'}{l} = \frac{n+p+f'+(1+\delta)f''}{n+P}. \qquad (9)$$

Es ist jedoch zu bemerken, daß dieser Werth von $\frac{l'}{l}$ nur ein genäherter ist, weil wir $l'' = l$ gesetzt haben, was nicht ganz genau ist, und wenn man folglich einen genaueren Werth haben wollte; so müßte man die Methode der successiven Annäherung anwenden. Das directe Verfahren würde darin bestehen, daß man in den vorhergehenden Werth von $ar'v'$ für l'' und k'' ihren Werth als Function von l', aus der Gleichung (7) abgeleitet, substituirte; aber da die Gleichung (7) eine transcendente ist, so läßt sie sich auch nur näherungsweise auflösen, und das indirecte Verfahren erscheint deshalb einfacher und practischer.

Um also das absolute Maximum des Nutzeffectes der Maschine zu erhalten, muß man zunächst die Expansion aus der Gleichung (9) ableiten, dann den gefundenen Werth in die Gleichung (7) substituiren, aus welcher sich alsdann der vortheilhafteste Werth für l'' ergibt, welchen man nebst dem Werthe von l' in die Gleichung (8) substituirt, woraus sich der entsprechende Werth des Gegengewichtes ergibt, und wenn man dann die Werthe von l' und l'' in die Gleichung (5) substituirt; so erhält man den entsprechenden Werth der Last, und wenn man die Maschine mit der so bestimmten Expansion, Gegengewicht und Last arbeiten läßt; so erhält man endlich das absolute Maximum des Nutzeffectes, d. h. den größten Nutzeffect, welchen sie überhaupt hervorbringen kann.

Wenn jedoch die so berechneten Werthe des Gegengewichtes, der Last oder der Expansion in der Praxis Nachtheile mit sich führten; so müßte man andere Werthe dafür annehmen, welche sich von den berechneten so wenig als möglich entfernen. So ist z. B. der durch die Gleichung (9) gegebene Werth von $\frac{l'}{l}$ im Allgemeinen weit kleiner, als derselbe in der Praxis zuläßig ist, weil die Bewegung des Kolbens zu ungleichförmig wird, wenn man den Dampf nur während eines sehr kleinen Theiles des Kolbenlaufes in den Cylinder treten läßt, so daß in der Praxis $\frac{l'}{l}$ nicht wohl kleiner als 0,50 oder 0,33 genommen werden kann. Auch würde bei einem zu kleinen Werthe von $\frac{l'}{l}$ eine zu große Geschwindigkeit der Maschine entstehen, welche sowohl für ihre Arbeit, als für ihre Erhaltung nachtheilig werden könnte. Endlich darf die Expansion eine gewisse Kleinheitsgrenze nicht überschreiten, weil sonst die Maschine ihre vorgeschriebene Last nicht würde bewegen können.

Um die numerische Berechnung der einfachwirkenden Watt'schen und Cornwall'schen Dampfmaschinen so viel als möglich zu erleichtern, fügen wir die folgenden Tafeln bei, deren Einrichtung unmittelbar einleuchtend ist.

Tafeln zur numerischen Berechnung der einfachwirkenden Watt'schen und Cornwall'schen Dampfmaschinen.

Nr. I.

Werth von $\frac{l'}{l}$.	Werth von $k' = \left(\frac{l'}{l'+c} + log.\frac{l+c}{v+c}\right)$ für $\frac{c}{l} = 0{,}05$.	$\frac{c}{l} = 0{,}10$.	$\frac{c}{l} = 0{,}15$.	Werth von $\frac{l'}{l}$.	Werth von $k' = \left(\frac{l'}{l'+c} + log.\frac{l+c}{v+c}\right)$ für $\frac{c}{l} = 0{,}05$.	$\frac{c}{l} = 0{,}10$.	$\frac{c}{l} = 0{,}15$.
0,10	2,613	2,205	1,926	0,27	2,032	1,819	1,650
0,11	2,569	2,180	1,910	0,28	2,006	1,790	1,635
0,12	2 527	2,155	1,894	0,29	1,980	1,781	1,620
0,13	2,485	2,130	1,877	0,30	1,955	1,762	1,605
0,14	2,446	2,105	1,861	0,31	1,931	1,743	1,590
0,15	2,408	2,082	1,844	0,32	1,908	1,725	1,575
0,16	2,371	2,058	1,827	0,33	1,884	1,707	1.561
0,17	2,336	2,033	1,810	0,34	1,862	1,689	1,547
0,18	2,301	2,012	1,794	0,35	1,840	1,672	1,533
0,19	2,268	1,988	1,778	0,36	1,818	1,654	1,519
0,20	2,235	1,966	1,761	0,37	1,797	1,637	1,505
0,21	2,203	1,944	1,744	0,38	1,776	1,621	1,491
0,22	2,173	1,922	1,728	0,39	1,755	1,605	1,478
0,23	2,142	1,901	1,712	0,40	1,735	1,588	1,465
0,24	2,114	1,880	1,696	0,41	1,716	1,573	1,452
0,25	2,085	1,859	1,680	0,42	1,697	1,557	1,439
0,26	2,059	1,839	1,665	0,43	1,678	1,542	1,426

Werth von $\frac{l'}{l}$.	Werth von $k' = \left(\frac{l'}{l'+c} + log.\,\frac{l+c}{l'+c}\right)$ für			Werth von $\frac{l'}{l}$.	Werth von $k' = \left(\frac{l'}{l'+c} + log.\,\frac{l+c}{l'+c}\right)$ für		
	$\frac{c}{l} = 0{,}05.$	$\frac{c}{l} = 0{,}10.$	$\frac{c}{l} = 0{,}15.$		$\frac{c}{l} = 0{,}05.$	$\frac{c}{l} = 0{,}10.$	$\frac{c}{l} = 0{,}15.$
0,44	1,660	1,526	1,413	0,70	1,269	1,193	1,126
0,45	1,642	1,511	1,400	0,71	1,257	1,183	1,117
0,46	1,624	1,496	1,388	0,72	1,245	1,172	1,108
0,47	1,606	1,482	1,376	0,73	1,233	1,161	1,099
0,48	1,589	1,468	1,364	0,74	1,221	1,151	1,090
0,49	1,572	1,453	1,352	0,75	1,209	1,140	1,081
0,50	1,555	1,439	1,340	0,76	1,197	1,130	1,069
0,51	1,539	1,426	1,328	0,77	1,186	1,120	1,060
0,52	1,523	1,412	1,316	0,78	1,175	1,110	1,051
0,53	1,507	1,399	1,304	0,79	1,164	1,100	1,042
0,54	1,491	1,385	1,293	0,80	1,153	1,090	1,033
0,55	1,476	1,372	1,282	0,81	1,142	1,080	1,024
0,56	1,461	1,359	1,271	0,82	1,131	1,070	1,015
0,57	1,445	1,347	1,260	0,83	1,120	1,060	1,006
0,58	1,431	1,334	1,249	0,84	1,109	1,050	1,997
0,59	1,417	1,321	1,238	0,85	1,099	1,041	1,988
0,60	1,402	1,309	1,227	0,86	1,088	1,032	1,980
0,61	1,388	1,297	1,216	0,87	1,078	1,023	1,972
0,62	1,374	1,285	1,205	0,88	1,067	1,014	1,964
0,63	1,361	1,273	1,195	0,89	1,057	1,005	1,956
0,64	1,347	1,261	1,185	0,90	1,047	1,996	1,948
0,65	1,334	1,250	1,175	0,91	1,037	1,987	1,940
0,66	1,321	1,238	1,165	0,92	1,027	1,978	1,932
0,67	1,308	1,227	1,155	0,93	1,017	1,969	1,924
0,68	1,295	1,215	1,145	0,94	1,007	1,960	1,916
0,69	1,282	1,204	1,135	0,95	1,000	1,951	1,908

Nr. II.

Werth von $\frac{l''}{l}$.	Werth von $k'' = \left(\frac{l-l''+c}{l+2c} \log. \frac{l-l''+c}{c} - \frac{l''+c}{l+2c} \log. \frac{l+c}{l''+c}\right)$ für $\frac{c}{l} = 0{,}05.$	$\frac{c}{l} = 0{,}10.$	$\frac{c}{l} = 0{,}15.$	Werth von $\frac{l''}{l}$.	Werth von $k'' = \left(\frac{l-l''+c}{l+2c} \log. \frac{l-l''+c}{c} - \frac{l''+c}{l+2c} \log. \frac{l+c}{l''+c}\right)$ für $\frac{c}{l} = 0{,}05.$	$\frac{c}{l} = 0{,}10.$	$\frac{c}{l} = 0{,}15.$
0,50	0,876	0,593	0,448	0,76	0,272	0,171	0,123
0,51	0,848	0,573	0,432	0,77	0,254	0,159	0,114
0,52	0,821	0,554	0,417	0,78	0,236	0,147	0,105
0,53	0,794	0,534	0,402	0,79	0,219	0,135	0,096
0,54	0,768	0,515	0,387	0,80	0,202	0,124	0,088
0,55	0,742	0,496	0,372	0,81	0,186	0,113	0,080
0,56	0,716	0,478	0,358	0,82	0,170	0,103	0,073
0,57	0,691	0,460	0,344	0,83	0,155	0,093	0,066
0,58	0,666	0,442	0,330	0,84	0,140	0,084	0,059
0,59	0,641	0,424	0,316	0,85	0,126	0,075	0,052
0,60	0,616	0,407	0,303	0,86	0,112	0,066	0,046
0,61	0,591	0,390	0,290	0,87	0,099	0,058	0,040
0,62	0,567	0,373	0,277	0,88	0,086	0,050	0,035
0,63	0,543	0,357	0,264	0,89	0,074	0,043	0,030
0,64	0,520	0,341	0,252	0,90	0,063	0,036	0,025
0,65	0,497	0,325	0,240	0,91	0,053	0,030	0,020
0,66	0,475	0,309	0,228	0,92	0,043	0,024	0,016
0,67	0,454	0,294	0,216	0,93	0,034	0,019	0,012
0,68	0,432	0,279	0,205	0,94	0,026	0,014	0,009
0,69	0,411	0,264	0,194	0,95	0,019	0,010	0,006
0,70	0,390	0,250	0,183	0,96	0,012	0,006	0,004
0,71	0,369	0,236	0,172	0,97	0,007	0,003	0,002
0,72	0,349	0,222	0,162	0,98	0,003	0,002	0,001
0,73	0,329	0,208	0,152	0,99	0,001	0,001	0,000
0,74	0,310	0,195	0,142	1,00	0,000	0,000	0,000
0,75	0,291	0,183	0,132				

Practische Formeln zur Berechnung der einfachwirkenden Watt'schen Dampfmaschinen nebst einem Anwendungsbeispiele.

§. 306. Für die Constanten nehmen wir folgende Werthe an:

$m = 4100000,$

$n = 250,$

$P = 16{,}5 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß,

$p = 4 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß,

$$f' = \frac{250}{d}, \; f'' = \frac{350}{d},$$
$$\delta = 0{,}14,$$

wovon wir aber blos die beiden ersten Zahlenwerthe in die Formeln substituiren wollen, weil die übrigen theils in verschiedenen Maschinen sehr verschieden sind, wie z. B. der Condensationsdruck, und theils noch nicht genau genug durch Versuche bestimmt sind.

A. Fall einer beliebigen Last oder Geschwindigkeit bei einem beliebig gegebenen Gegengewichte und Expansion.

Geschwindigkeit des Kolbens in Fußen für die Minute:

$$v = 41500000 \cdot \frac{S}{a} \cdot \frac{l + 2c}{l'' + c} \times \frac{k'' - (1+\delta)\,k'}{(1+\delta)\,r + 250 + p + f' + (1+\delta)\,f''}.$$

Nutzlast in Pfunden:

$$ar = 4100000 \cdot \frac{S}{v} \cdot \frac{l + 2c}{l'' + c}\left(\frac{k'}{1+\delta} - k''\right)$$
$$- \frac{a}{1+\delta}\left[250 + p + f' + (1+\delta)\,f''\right].$$

Wirksame Verdampfung in der Minute:

$$S = \frac{av}{4100000} \cdot \frac{l'' + c}{l + 2c} \times \frac{(1+\delta)\,r + 250 + p + f' + (1+\delta)\,f''}{k' - (\;+\delta)\,k''}.$$

Nutzeffect in Fußpfunden:

$$E = arv.$$

B. Fall des Maximums des Nutzeffectes mit einem beliebig gegebenen Gegengewichte und Expansion.

Geschwindigkeit des Kolbens in Fußen für die Minute:

$$v' = 4100000\,\frac{l + 2c}{l'' + c} \cdot \frac{l}{l' + c} \cdot \frac{S}{a} \cdot \frac{1}{250 + P}.$$

Nutzlast in Pfunden:

$$ar' = a\,\frac{l' + c}{l}\left(\frac{k'}{1+\delta} - k''\right)(250 + P)$$
$$- \frac{a}{1+\delta}\left(250 + p + f' + (1+\delta)\,f''\right).$$

Wirksame Verdampfung in der Minute:

$$S = \frac{av'}{4100000} \cdot \frac{l'' + c}{l + 2c} \cdot \frac{l' + c}{l}\,(250 + P).$$

Nutzeffect in Fußpfunden:

$$E\ \text{Max.} = ar'v'.$$

C. Gegengewicht für das Maximum des Nutzeffectes mit einer beliebig gegebenen Expansion.

Bedingungsgleichung für den vortheilhaftesten Verschluß des Gleichgewichtsventiles oder für den Werth von $\frac{l''}{l}$:

$$\log. \frac{l - l'' + c}{c}$$

$$= \frac{k'}{1+\delta} - \frac{1}{1+\delta} \cdot \frac{l}{l' + c} \cdot \frac{250 + p + f' + (1+\delta) f''}{250 + P}.$$

Entsprechendes Gegengewicht in Pfunden für den Quadratfuß der Kolbenfläche:

$$\Pi = \frac{l' + c}{l} (250 + P) k'' + f'' + \varrho''.$$

D. Expansion für das absolute Maximum des Nutzeffectes.

$$\frac{l'}{l} = \frac{250 + p + f' + (1+\delta) f''}{250 + P}.$$

Um von diesen Formeln eine Anwendung zu machen, wollen wir eine Maschine berechnen, für welche folgende Dimensionen und Elemente gegeben sind, und womit Wicksteed einen 58,5 Stunden langen Versuch angestellt hat.

Durchmesser des Cylinders = 60 Zoll, oder Kolbenfläche nach Abzug des Querschnittes des Stieles $a = 19{,}507$ Quadratfuß.
Kolbenlauf $l = 7{,}91$ Fuß.
Expansion $\frac{l'}{l} = 0{,}63$.
Werth von $\frac{l''}{l} = 1$.
Schädlicher Raum $c = 0{,}1\, l$.
Absoluter Druck des Dampfes im Kessel = 17,70 Pfd. für den Quadratzoll oder $P = 2549$ Pfd. für den Quadratfuß.
Absoluter Druck im Condensator = 0,49 Pfd. für den Quadratzoll oder in dem Cylinder = 1,57 Pfd. für den Quadratzoll; also $p = 226$ für den Quadratfuß.
Beobachtete Verdampfung im Kessel = 182307 Pfd. Wasser in 58,5 Stunden, oder Bruttoverdampfung = 0,813 Cubikfuß Wasser in der Minute, und folglich die wirksame Verdampfung $S = 0{,}772$ Cubikfuß Wasser in der Minute, wenn man annimmt, daß $\frac{1}{20}$ der Bruttoverdampfung als tropfbarflüssiges Wasser mit dem Dampfe fortgeführt wird.
Consumirte Quantität Steinkohlen erster Qualität, oder $N = 6{,}257$.
Gegengewicht $\Pi = 305$ Pfd. für den Quadratfuß der Kolbenfläche, oder = 2,120 für den Quadratzoll.
$\varrho'' = 0{,}25 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß.
$f' = 87$ Pfd. für den Quadratfuß.
$f'' = 269$ Pfd. für den Quadratfuß.

Geschwindigkeit = 90 Fuß in der Minute.
Last = 9,235 Pfd. für den Quadratzoll der Kolbenfläche.

Wenn man die Rechnung wirklich ausführt, so erhält man mit diesen Daten folgende Resultate:

v = ...	90
ar = ...	27143
$\frac{r}{144}$ = ...	9,663
S = ...	0,772
E = ...	2442870
E in Pferdekr. = ...	74
E für 1 Pfd. Kohle = ...	390430
E für 1 Cubikf. Wasser = ...	3164300
Q Kohle für 1 Pferdekr. = ...	0,85
Q Wasser für 1 Pferdekr. = ...	0,0104
E in Pferdekr. für 1 Pfd. Kohle = . .	11,83
E in Pferdekr. für 1 Cubikf. Wasser = .	95,89.

Nimmt man verschiedene Expansionen an und sucht für jede derselben zunächst den vortheilhaftesten Verschluß des Gleichgewichtsventiles nach der Gleichung (7), dann das zugehörige Gegengewicht der Maschine nach der Gleichung (8), hierauf die vortheilhafteste Last oder Geschwindigkeit bei dieser Expansion und diesem Verschlusse des Gleichgewichtsventiles nach den Gleichungen (5), (6), und endlich die dem absoluten Maximum des Nutzeffectes entsprechende Expansion, und berechnet die Effecte der Maschine für jeden dieser Fälle; so erhält man folgende Resultate:

			Max. d. Nutzeff.
$\frac{l'}{l}$ = ...	0,63	0,50	0,29
$\frac{l''}{l}$ = ...	0,88	0,87	0,85
$\frac{II}{144}$ = ...	2,81	2,77	2,66
v' = ...	94,72	116,90	183,33
ar' = ...	27806	24816	17314
$\frac{r'}{144}$ = ...	9,899	8,834	6,164
S = ...	0,772	0,772	0,772
E = ...	2633720	2901100	3174240
E in Pferdekr. = ...	80	88	96
E für 1 Pfd. Kohle = ...	420930	463660	507320
E für 1 Cubikf. Wasser = . . .	3411500	3757900	4111700
Q Kohle für 1 Pferdekr. = . .	0,078	0,071	0,065
Q Wasser für 1 Pferdekr. = . .	0,0097	0,0088	0,0080
E in Pferdekr. für 1 Pfd. Kohle =	12,76	14,05	15,37
E in Pferdekr. für 1 Cubikf. Wass. =	103,40	113,90	124,60.

Achtzehnter Abschnitt.

X. Theorie der einfachwirkenden Cornwall'schen Dampfmaschinen.

§. 307. **B**ei diesen Maschinen wird ein hoher Druck, Expansion und Condensation angewandt; aber sie unterscheiden sich von den einfachwirkenden Watt'schen Maschinen nicht blos durch den höheren Druck des Dampfes im Kessel, welcher 30 bis 60 und selbst 80 Pfd. für den Quadratzoll oder 2 bis 5 Atmosphären beträgt, sondern auch dadurch, daß die Expansion viel weiter getrieben wird, indem zuweilen l' kaum $\frac{1}{10}\, l$ beträgt, was nur bei dem hohen Drucke des Dampfes möglich ist, und endlich dadurch, daß der Nutzeffect nicht während der unmittelbaren Wirkung des Dampfes in dem Cylinder, sondern während des Herabfallens des Gegengewichtes hervorgebracht wird.

Bei diesen Maschinen tritt der Dampf zuerst über den Kolben, während der untere Theil des Cylinders mit dem Condensator in Verbindung steht und folglich luftleer ist, so daß der Kolben durch den Druck des Dampfes niederwärts bewegt und zugleich ein beträchtliches Gegengewicht gehoben wird. Nachdem der Dampf während einer gewissen Zeit in den Cylinder getreten ist, schließt sich das Zulassungsventil und der Kolben setzt seine Bewegung vermöge der erlangten Geschwindigkeit und der Expansion des Dampfes im Cylinder bis an das Ende seines Laufes fort, indem die bewegende Kraft offenbar immer mehr und mehr abnimmt, während der Widerstand derselbe bleibt, so daß die Geschwindigkeit des Kolbens schnell abnimmt und letzterer am Ende seines Laufes stillsteht, wenn die gehörige Quantität Dampf in den Cylinder gelassen ist. Alsdann schließt sich das Austrittsventil und das Gleichgewichtsventil öffnet sich, so daß der obere und untere Theil des Cylinders mit einander in Verbindung stehen, der Dampf folglich sich auf beiden Seiten des Kolbens befindet und letzterer in ersterem im Gleichgewichte ist. Hierauf wird der Kolben durch das Gegengewicht wieder aufwärts bewegt, während welcher Bewegung der Nutzeffect hervorgebracht wird. Wenn der Kolben fast das Ende seines aufsteigenden Laufes erreicht hat, so schließt sich das Gleichgewichtsventil, der über dem Kolben befindliche Dampf wird immer mehr zusammengedrückt, und übt folglich gegen den Kolben einen immer größeren Gegendruck aus, so daß derselbe zuletzt zum Stillstehen kommt, worauf sich das Zulassungs- und Austrittsventil wieder öffnet und sich dasselbe Spiel der Maschine wiederholt.

Wie bei den einfachwirkenden Watt'schen Dampfmaschinen kommen auch hier vier verschiedene Fälle vor, nämlich:

1) Wenn die Maschine mit einer beliebigen Last oder Grschwindigkeit arbeitet, und die Werthe von l', l'' und des Gegengewichtes Π zum Voraus beliebig festgesetzt sind.

2) Wenn die Maschine bei den bestimmten Werthen von l', l'', Π mit der dem Maximum des Nutzeffectes entsprechenden Last oder Geschwindigkeit arbeitet.

3) Wenn der Werth von l'' so bestimmt wird, daß die Maschine für den gegebenen Werth von l' oder Π den größten Nutzeffect hervorbringt.

4) Wenn auch der Werth von l' oder Π auf die vortheilhafteste Weise angenommen wird, so daß folglich die Maschine das absolute Maximum des Nutzeffectes hervorbringt.

Die allgemeinen Relationen zwischen den bekannten und unbekannten Größen der hier vorkommenden Aufgaben ergeben sich ebenfalls wieder, wenn man ausdrückt: daß während beider Kolbenläufe die Arbeit oder Leistung der bewegenden Kraft der des Widerstandes gleich ist, und daß die Quantität des verbrauchten Dampfes der des gleichzeitig erzeugten Dampfes ebenfalls gleich ist. Werden alle früheren Bezeichnungen beibehalten und der Kürze wegen wieder gesetzt:

$$k' = \frac{l'}{l'+c} + log. \left(\frac{l+c}{l'+c}\right);$$

so wird die während des niedersteigenden Kolbenlaufes von dem Dampfe in dem Cylinder hervorgebrachte Quantität Arbeit wieder ausgedrückt durch:

$$k'a\,(l'+c)\,(n+P') - nal.$$

Andererseits besteht der Widerstand während dieses Kolbenlaufes aus dem Gegengewichte Π, dem Drucke p des unvollständig condensirten Dampfes, der Last ϱ' der Hülfspumpe, der Reibung f' der Maschine und endlich aus der Zunahme $\delta\,(\varrho' + \Pi)$ dieser Reibung wegen des Gegengewichtes Π und der Luft ϱ' der Hülfspumpe. Man hat folglich wieder die Gleichung:

$$k'a\,(l'+c)\,(n+P') - nal = [(1+\delta)\,(\varrho'+\Pi) + p + f']\,al,$$

woraus folgt:

$$n + P' = \frac{l}{l'+c} \cdot \frac{1}{k'}\,[(1+\delta)\,(\varrho'+\Pi) + n + p + f'], \quad (A)$$

welches die erste gesuchte Relation ist.

Bei dem aufsteigenden Kolbenlaufe bildet das Gegengewicht die bewegende Kraft und der Widerstand besteht aus der Last ϱ'' der Hauptpumpe, aus dem Gegendrucke des über dem Kolben nach Verschluß des Gleichgewichtsventiles comprimirten Dampfes, und endlich aus der Reibung f'' der leeren Maschine. Was die Arbeit des über dem Kolben comprimirten Dampfes anlangt, so wird sie, wie bei den einfachwirkenden Watt'schen Dampfmaschinen, ausgedrückt durch:

$$k''al\,(n+P')\,\frac{l'+c}{l},$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$k''=\frac{l-l''+c}{l+2c}\;log.\left(\frac{l-l''+c}{l}\right)-\frac{l''+c}{l+2c}\;log.\left(\frac{l+c}{l''+c}\right),$$

und da die Quantität Arbeit der bewegenden Kraft der des Widerstandes gleich ist; so hat man für den aufsteigenden Kolbenlauf die Gleichung:

$$k''al\,(n+P')\,\frac{l'+c}{l}+\varrho''al+f''al=\Pi al,$$

woraus folgt:

$$n+P'=\frac{l}{l'+c}\cdot\frac{1}{k''}\,(\Pi-\varrho''-f''), \qquad (B)$$

welches die zweite gesuchte allgemeine Relation ist.

Bei einigen Maschinen der in Rede stehenden Art findet die Compression des Dampfes, welcher das Stillstehen des Kolbens am Ende seines aufsteigenden Laufes mit bewirkt, nicht blos nach Verschluß des Gleichgewichtsventiles, sondern schon während eines gewissen Theiles des Kolbenlaufes statt, weil der Dampf nicht ganz frei durch das Gleichgewichtsventil von dem einen Ende des Cylinders nach dem andern strömen kann. Dieser Zustand der Maschinen ist hinsichtlich des Erfolges ganz derselbe, als wenn das Gleichgewichtsventil weiter, aber während des Kolbenlaufes zum Theil verschlossen wäre, und sich erst allmählig am Ende des Kolbenlaufes ganz verschlösse. In diesem Falle bleibt die Compression des Dampfes in demselben freien Raume des Cylinders, und folglich auch seine Wirkung gegen den Kolben zuletzt immer dieselbe, und der comprimirte Dampf wirkt bei dem nächsten niedersteigenden Kolbenlaufe ebenfalls ganz auf dieselbe Weise, wie bei einem plötzlichen Verschlusse des Gleichgewichtsventiles. Wenn man die Spannung des Dampfes im Anfange des aufsteigenden Kolbenlaufes und die des comprimirten Dampfes in dem freien oder schädlichen Raume des Cylinders am Ende desselben Kolbenlaufes kennt; so kann man die Größe l'' bestimmen, wenn man untersucht, in welchem Puncte des Kolbenlaufes das Gleichgewichtsventil plötzlich verschlossen werden müßte, um zuletzt dieselbe Compression des Dampfes zu erhalten. Wenn z. B. im Anfange des aufsteigenden Kolbenlaufes die Spannung des Dampfes im Cylinder $=\tilde{\omega}'$ und am Ende desselben $=\tilde{\omega}''$ wäre, so hätte man bei Anwendung des Mariotte'schen Gesetzes:

$$\frac{a\,(l-l''+c)}{ac}=\frac{\tilde{\omega}''}{\tilde{\omega}'},$$

woraus folgt:

$$l''=l+c-\frac{\tilde{\omega}''}{\tilde{\omega}'}\,c,$$

und man könnte folglich die vorhergehenden Formeln immer noch anwenden, wenn man für l'' seinen so bestimmten Werth setzte.

Wenn ferner die Compression des Dampfes nicht benutzt würde, um den Kolben zum Stillstehen zu bringen, so müßte man $l'' = l$, folglich $k'' = 0$ setzen.

Wenn endlich v wieder die Geschwindigkeit des Kolbens nach der Anzahl der in der Minute stattfindenden Kolbenläufe, bei welchen der Nutzeffect hervorgebracht wird, und S die wirksame Verdampfung des Kessels bezeichnet; so gibt die Bedingung der Gleichheit zwischen der erzeugten und der verbrauchten Quantität Dampf wieder wie früher für die dritte gesuchte Relation:

$$n + P' = m \frac{l + 2c}{l'' + c} \cdot \frac{l}{l' + c} \cdot \frac{S}{av}. \qquad (C)$$

Verfährt man also wieder, wie im vorhergehenden Abschnitte, d. h. eliminirt man P' zuerst zwischen den Gleichungen (A) und (C) und dann zwischen den Gleichungen (B) und (C), so erhält man die beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{k'}\left[n + p + f' + (1+\delta)\varrho' + (1+\delta)\Pi\right] = m \frac{l + 2c}{l'' + c} \cdot \frac{S}{av},$$

$$\frac{1}{k''}(\Pi - \varrho'' - f'') = m \frac{l + 2c}{l'' + c} \cdot \frac{S}{av},$$

woraus sich durch Elimination von Π und wenn man $\varrho' + \varrho'' = r$ setzt, die folgenden Gleichungen ergeben:

$$v = m \cdot \frac{S}{a} \cdot \frac{l + 2c}{l'' + c} \cdot \frac{k' - (1+\delta)k''}{(1+\delta)r + n + p + f' + (1+\delta)f''}, \qquad (1)$$

$$ar = m \cdot \frac{S}{v} \cdot \frac{l + 2c}{l'' + c}\left(\frac{k'}{1+\delta} - k''\right)$$

$$- \frac{a}{1+\delta}\left[n + p + f' + (1+\delta)f''\right], \qquad (2)$$

$$S = \frac{av}{m} \cdot \frac{l'' + c}{l + 2c} \cdot \frac{(1+\delta)r + n + p + f' + (1+\delta)f''}{k' - (1+\delta)k''}, \qquad (3)$$

$$E = arv, \qquad (4)$$

welche die Auflösung aller bei den fraglichen Maschinen vorkommenden Aufgaben enthalten, und worin die Größen k', k'' wieder durch die Ausdrücke:

$$k' = \frac{l'}{l' + c} + \log.\left(\frac{l + c}{l' + c}\right),$$

$$k'' = \frac{l - l'' + c}{l + 2c} \log.\left(\frac{l - l'' + c}{c}\right) - \frac{l'' + c}{l + 2c} \log.\left(\frac{l + c}{l'' + c}\right)$$

gegeben werden.

Auch ist noch zu bemerken, daß die in den vorhergehenden Formeln vorkommende Größe l'' gewöhnlich nicht a priori bekannt ist, sondern von dem Gegengewichte Π, welches die eigentliche gegebene Größe ist, abhängt. Um aber l'' als Function von Π zu bestimmen, braucht man nur P' zwischen den beiden Gleichungen (A) und (B) oder (A) und (C) zu eliminiren, wodurch man erhält:

$$k'' = \frac{\Pi - (r - \varrho') - f''}{(1+\delta)(\Pi + \varrho') + n + p + f'} \tag{E}$$

$$\frac{l'' + c}{l + 2c} = m\frac{S}{av} \cdot \frac{k'}{(1+\delta)(\Pi + \varrho') + n + p + f'}. \tag{E'}$$

Diese letzten Gleichungen werden wie bei den einfachwirkenden Watt'schen Dampfmaschinen aufgelöst und geben den Werth von $\frac{l''}{l}$, sobald das Gegengewicht und die Last oder Geschwindigkeit der Maschine bekannt sind. In dem Falle des Maximums des Nutzeffectes ist weder die Last, noch die Geschwindigkeit der Maschine a priori bekannt; aber alsdann ist die Größe $\frac{l''}{l}$ direct bestimmt, und sie wird durch die Gleichungen (E), (E') immer bestimmt, sobald das Gegengewicht Π gegeben ist.

Endlich ergibt sich, wie bei den einfachwirkenden Watt'schen Dampfmaschinen:

1) Für die Last oder die Geschwindigkeit, welche bei einem gegebenen Werthe von l', l'' und Π das Maximum des Nutzeffectes geben:

$$v' = m\frac{l + 2c}{l'' + c} \cdot \frac{l}{l' + c} \cdot \frac{S}{a} \cdot \frac{1}{n + P}, \tag{5}$$

$$ar' = a\frac{l' + c}{l}\left(\frac{k'}{1+\delta} - k''\right)(n + P)$$
$$- \frac{a}{1+\delta}[n + p + f' + (1+\delta)f''], \tag{6}$$

aus welchen Gleichungen sich auch die Reibung der Maschine durch das früher angegebene Verfahren ableiten läßt.

2) Für den Werth von l'', welcher bei einem gegebenen Werthe von l' das Maximum des Nutzeffectes gibt:

$$\log.\left(\frac{l - l'' + c}{c}\right) = \frac{k'}{1+\delta}$$
$$- \frac{1}{1+\delta} \cdot \frac{l}{l' + c} \cdot \frac{n + p + f' + (1+\delta)f''}{n + P}. \tag{7}$$

3) Für den Werth von l', welcher das absolute Maximum des Nutzeffectes gibt:

$$\frac{l'}{l} = \frac{n + p + f' + (1+\delta)f''}{n + P}. \tag{8}$$

Endlich ergibt sich das dieser Expansion entsprechende Gegengewicht aus der Gleichung (A), wenn man darin $P' = P$ setzt, nämlich:

$$\Pi = \frac{\frac{l' + c}{l}k'(n + P) - (n + p + f')}{1 + \delta} - \varrho'. \tag{9}$$

Dieser Werth des Gegengewichtes wird also als Function von $\frac{l'}{l}$ und nicht von $\frac{l''}{l}$, wie bei den einfachwirkenden Watt'schen Maschinen, bestimmt.

Endlich wollen wir noch bemerken, daß wenn die durch die vorhergehenden Formeln bestimmten Werthe des Gegengewichtes, der Geschwindigkeit oder der Expansion der Maschine in der Praxis mit Nachtheilen verbunden sind, man Werthe dafür nehmen muß, welche sich von den berechneten möglichst wenig entfernen.

Practische Formeln zur Berechnung der einfachwirkenden Cornwall'schen Dampfmaschinen nebst einem Anwendungsbeispiele.

§. 308. Zunächst wollen wir bemerken, daß die Constanten m und n hier folgende Werthe haben:

$$m = 4100000,$$
$$n = 250.$$

Der Druck P des Dampfes im Kessel muß für jede Maschine, welche man berechnen will, direct bestimmt werden, und variirt im Allgemeinen zwischen 40 bis 80 Pfd. für den Quadratzoll.

Die Spannung p des condensirten Dampfes muß jedesmal vermittelst des Watt'schen Indicators bestimmt werden, ist aber im Allgemeinen weit geringer, als in den übrigen Dampfmaschinen, weil die in Rede stehenden Maschinen sehr vervollkommnet und immer hinreichend mit Injectionswasser versehen sind, so daß die Condensation des Dampfes weit vollständiger, als in andern Maschinen bewirkt werden kann. Da ferner die Durchgangsöffnungen von dem Cylinder nach dem Condensator einen beträchtlichen Durchmesser haben und nach der Construction der Ventile augenblicklich ganz geöffnet werden, so kann auch nur ein sehr geringer Unterschied zwischen der Spannung im Condensator und der im Cylinder stattfinden. Wenn man die Spannung p nicht direct gemessen hat, so kann man im Allgemeinen $p = 0{,}75$ Pfd. für den Quadratzoll setzen, und folglich für den Quadratfuß:

$$p = 0{,}75 \times 144 \text{ Pfd.}$$

Auch die Reibung ist bei den fraglichen Maschinen weit geringer, als bei den Watt'schen. Nach den Versuchen von Wicksteed beträgt die Reibung einer gut ausgeführten Maschine mit einem Cylinder von 6,66 Fuß im Durchmesser bei dem aufsteigenden Kolbenlaufe nur 0,186 Pfd. und bei dem niedersteigenden Kolbenlaufe 0,339 Pfd. für den Quadratzoll der Kolbenfläche. Es ist also in dem gegenwärtigen Falle:

$$f' = 0{,}339 \times 144 \text{ Pfd.}$$
$$f'' = 0{,}186 \times 144 \text{ Pfd. für den Quadratfuß.}$$

Da aber Versuche mit den Watt'schen Maschinen gelehrt haben, daß sich die Reibung im umgekehrten Verhältnisse des Durchmessers des Cylinders ändert, so kann man die vorhergehende Bestimmung auch auf Maschinen von verschiedenen Dimensionen anwenden, indem man sie durch das Verhältniß der Zahl 6,66 zu der, welche den Durchmesser des Cylinders der jedesmaligen Maschine in Fußen ausdrückt, multiplicirt. Man kann folglich im Allgemeinen setzen:

$$f' = \frac{325}{d}, \quad f'' = \frac{180}{d};$$

Hinsichtlich der Größe δ oder der Zunahme der Reibung für die Einheit der Last ist zu bemerken, daß sie ähnliche Veränderungen, wie die Reibung der unbelasteten Maschine erfahren muß, weil beide auf gleiche Weise von dem Grade der Vollkommenheit der Maschine abhängen. Bisher haben wir gefunden, daß die Reibung der verschiedenen Arten von Dampfmaschinen, wenn sie unbelastet sind, näherungsweise durch die Formel $f = \frac{300}{d}$ ausgedrückt werden kann, und die Zunahme der Reibung für die Einheit der Last durch $\delta = 0{,}14$. Aber für die einfachwirkenden Cornwall'schen Dampfmaschinen wird die mittlere Reibung während beider Kolbenzüge durch $\frac{250}{d}$ ausgedrückt, und wenn man $\frac{2}{5}$ davon näherungsweise für die Reibung der Schöpfpumpen abzieht; so bleibt für die Reibung der Maschine selbst nur die Größe $\frac{150}{d}$, welche nur halb so groß ist, als bei den Watt'schen Maschinen, und wir müssen daher in dem gegenwärtigen Falle näherungsweise nur:

$$\delta = 0{,}07$$

setzen.

Endlich unterscheiden sich auch die einfachwirkenden Cornwall'schen Dampfmaschinen von den bisher betrachteten hinsichtlich der wirksamen Verdampfung. Da in diesen Maschinen sich die Dampfdurchgänge sehr rasch öffnen und der Raum, welchen der Dampf im Kessel anfüllt, wegen der innern Lage des Feuerheerdes verhältnißmäßig klein ist, so unterliegt es keinem Zweifel, daß aus dem Kessel eine beträchtliche Menge tropfbarflüssiges Wasser mit dem Dampfe fortgeführt wird; aber da in den Cornwall'schen Dampfmaschinen der Cylinder bei einer hohen Temperatur erhalten wird, so können drei Fälle stattfinden, nämlich: dieses Wasser wird entweder zum Theil oder ganz durch die von außen in den Cylinder geführte Wärme in Dampf verwandelt, oder endlich es wird auch die Spannkraft des reinen Dampfes durch Erhöhung seiner Temperatur noch vermehrt. Der gewöhnlichste Fall scheint jedoch der zu sein, wo durch die Erhitzung des Cylinders nur das mit dem Dampfe fortgenommene tropfbarflüssige Wasser ganz in Dampf verwandelt wird, ohne daß die gesunkene Temperatur des expandirten Dampfes wieder erhöht wird. Denn wenn man den Indicator beobachtet, das bei jedem Kolbenzuge in dem Kessel verdampfte Volumen Wasser in Rechnung bringt, hierauf das Volumen notirt, welches der daraus gebildete Dampf in dem Augenblicke des Verschlusses des Regulators in dem Cylinder einnimmt, und endlich den Druck beobachtet, welchen der Indicator in demselben Augenblicke anzeigt; so findet man, daß dieses Volumen Dampf anfangs kleiner ist, als wenn das ganze Wasser bei der angegebenen Temperatur in Dampf verwandelt wäre. Aber wenn man successive die verschiedenen Volumen, welche der Dampf in dem Cylinder bei fortgesetzter Expansion einnimmt, mit denen vergleicht, welche der Totalverdampfung des Wassers bei den in denselben Augenblicken von dem Indicator angegebenen Temperaturen entsprechen; so findet man, daß sich diese Volumen immer mehr und mehr der Gleichheit nähern, und im Allgemeinen am Ende des Kolbenlaufes nur sehr wenig von einander verschieden sind. Aus diesen Beobachtungen folgt also, daß in den einfachwirkenden Cornwall'schen Dampfmaschinen das mit dem Dampfe fortgenommene tropfbarflüssige Wasser während der Dauer des Kolbenlaufes in Dampf verwandelt und folglich in dem Cylinder nutzbar gemacht wird, daß aber die Erhitzung des Cylinders im Allgemeinen nicht so weit geht, daß die Spannkraft des reinen Dampfes durch den erhitzten Cylinder noch merklich erhöhet würde. Der fragliche Umstand wird also bei diesen Maschinen in Rechnung gebracht, wenn man $S = S'$ setzt, oder ausdrückt, daß die wirksame Verdampfung der Bruttoverdampfung gleich ist. Wenn ferner die Temperatur des Dampfes in dem Cylinder durch den letztern so weit erhöht würde, daß sie der im Kessel gleich wäre; so brauchte man für diesen Fall nur $n = 0$ zu setzen, weil diese Bedingung nach dem bereits früher Gesagten der Voraussetzung entspricht, daß der Dampf, während er sein Volumen in der Maschine ändert, doch seine Temperatur behält oder das Mariotte'sche Gesetz befolgt, was in dem gewöhnlichen Zustande dieser Maschinen jedoch nicht der Fall ist.

Diese verschiedenen Werthe müssen in die allgemeinen Gleichungen eingeführt werden, wenn man eine specielle Maschine berechnen will; aber wenn man zunächst nur für m und n die allen Fällen entsprechenden Werthe substituirt, so erhält man die folgenden practischen Formeln.

A. Für eine beliebige Last oder Geschwindigkeit und bei einem beliebigen Werthe von l', l'' und H.

Geschwindigkeit des Kolbens:

$$v = 4100000 \frac{S}{a} \cdot \frac{l + 2c}{l'' + c} \cdot \frac{k' - (1+\delta) k''}{(1+\delta) r + 250 + p + f' + (1+\delta) f''}.$$

Nutzlast in Pfunden:

$$ar = 4100000 \frac{S}{a} \cdot \frac{l + 2c}{l'' + c} \left(\frac{k'}{1+\delta} - k'' \right) - \frac{a}{1+\delta} [250 + p + f' + (1+\delta) f''].$$

Wirksame Verdampfung in der Minute:

$$S = \frac{av}{4100000} \cdot \frac{l'' + c}{l + 2c} \cdot \frac{(1+\delta) r + 250 + p + f' + (1+\delta) f''}{k' - (1+\delta) k''}.$$

Nutzeffect in Fußpfunden:

$$E = arv.$$

B. Für das Maximum des Nutzeffectes bei einem beliebigen Werthe von l'' und l' oder Π.

Geschwindigkeit in der Minute:

$$v' = 4100000\,\frac{l+2c}{l''+c}\cdot\frac{l}{l'+c}\cdot\frac{S}{a}\cdot\frac{1}{250+P}.$$

Nutzlast in Pfunden:

$$ar' = a\,\frac{l'+c}{l}\left(\frac{k'}{1+\delta}-k''\right)(250+P)$$
$$-\frac{a}{1+\delta}\left[250+p+f'+(1+\delta)f''\right].$$

Wirksame Verdampfung in der Minute:

$$S = \frac{av'}{4100000}\cdot\frac{l''+c}{l+2c}\cdot\frac{l'+c}{l}(250+P).$$

Größter Nutzeffect in Fußpfunden:

$$E\ \text{Max.} = ar'v'.$$

C. Bedingungsgleichung für den vortheilhaftesten Werth von $\frac{l''}{l}$, welcher dem Maximum des Nutzeffectes bei einem beliebigen Werthe von $\frac{l'}{l}$ oder von Π entspricht.

$$\log.\left(\frac{l-l''+c}{c}\right) =$$
$$\frac{k'}{1+\delta}-\frac{1}{1+\delta}\cdot\frac{l}{l'+c}\cdot\frac{250+p+f'+(1+\delta)f''}{250+P}.$$

D. Expansion oder Gegengewicht für das absolute Maximum des Nutzeffectes.

$$\frac{l'}{l} = \frac{250+p+f'+(1+\delta)f''}{250+P}.$$

$$\Pi = \frac{\frac{l'+c}{l}k'(250+P)-(250+p+f')}{1+\delta}\,\varrho'.$$

§. 309. Wir wollen die vorhergehenden Formeln nun auf die Berechnung einer Maschine dieses Systemes anwenden, welche in London zur Vertheilung des Wassers aufgestellt ist und womit Wicksteed fünf Versuche angestellt hat. Man hat für diese Maschinen die folgenden Data:

Durchmesser des Cylinders = 80 Zoll oder Kolbenfläche, nach Abzug des Querschnittes der Stange, $a = 34{,}858$ Quadratfuß.
Kolbenlauf $l = 10$ Fuß.

Schädlicher Raum $c = 0{,}05\,l$.
Expansion für die fünf Versuche:

Versuch I.	$\frac{l'}{l}$	$= 0{,}603$,
„ II.		$= 0{,}477$,
„ III.		$= 0{,}397$,
„ IV.		$= 0{,}352$,
„ V.		$= 0{,}313$,

Werth von $\frac{l''}{l} = 0{,}985$.

Absoluter Druck des Dampfes im Kessel bei den fünf Versuchen:

Versuch I.	$P = 30{,}45 \times 144$ Pfd. für den Quadratf.
„ II.	$= 34{,}7 \times 144$ „ „ „ „
„ III.	$= 42{,}7 \times 144$ „ „ „ „
„ IV.	$= 45{,}7 \times 144$ „ „ „ „
„ V.	$= 51{,}7 \times 144$ „ „ „ „

Absoluter Druck im Condensator und Cylinder $= 0{,}730$ Pfd. für den Quadratzoll, oder $p = 0{,}730 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß.

Verdampfung im Kessel während der fünf Versuche:

Versuch	Pfd. Wasser				Cubikf. Wasser in der Minute
I.	261968	in 96	Stunden,	oder	$S = 0{,}72770$
II.	412160	„ 144	„	„	$S = 0{,}76330$
III.	393456	„ 168	„	„	$S = 0{,}62454$
IV.	355824	„ 154,25	„	„	$S = 0{,}61514$
V.	269696	„ 117,6	„	„	$S = 0{,}61160$.

Consumirte Quantität Kohlen = 1 Pfund für 9,493 Pfund verdampften Wassers; also:

Versuch I.	$N = 4{,}791$ Pfd. in der Minute
„ II.	$N = 5{,}025$ „ „ „ „
„ III.	$N = 4{,}112$ „ „ „ „
„ IV.	$N = 4{,}050$ „ „ „ „
„ V.	$N = 4{,}026$ „ „ „ „

Werth von $\varrho' = 0{,}821 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß.
Werth von $\varrho'' = 10{,}269 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß.
Werth von $r = \varrho' + \varrho'' = 11{,}090 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß.
Gegengewicht $\Pi = 11{,}037 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß.
Werth von $f' = 0{,}339 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß.
Werth von $f'' = 0{,}186 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß.

Vermittelst dieser Data erhält man folgende Resultate:

	Dauer des Versuchs		Expansion	Beobachtete Geschwindigkeit.	Berechnete Geschwindigkeit. in 1 Minute.
Versuch I. . .	96	Stunden . .	$\frac{l'}{l} = 0{,}603$	60,35	58,59
„ II.	144	„	$= 0{,}477$	73 81	69,92
„ III.	168	„	$= 0{,}397$	62,95	62,28
„ IV.	154,25	„	$= 0{,}352$	64,23	65,02
„ V.	117,6	„	$= 0{,}313$	69,87	67,84.

Aus dieser Vergleichung sieht man, wie genau die berechneten Geschwindigkeiten mit den beobachteten übereinstimmen.

Wenn man ferner die Maschine mit andern Expansionen und mit den den größten Nutzeffect entsprechenden Werthen von $\frac{l''}{l}$, Π, der Last und den Mittelwerthen $S = 0{,}66846$ Cubikfuß Wasser, $N = 4{,}401$ Steinkohlen in der Minute aus den beobachteten Werthen, und endlich mit dem absoluten Drucke im Kessel $P = 50 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß arbeiten läßt; so erhält man folgende Resultate:

			Max. d. Nutzeff.
$\frac{l'}{l} =$	0,30	0,20	0,10
$\frac{\Pi}{144} =$	29,82	23,83	15,85
$\frac{l''}{l} =$	0,78	0,71	0,62
$v' =$	38,22	58,44	110,48
$ar' =$	131636	99076	60890
$\frac{r'}{144} =$	26,22	19,74	12,13
$S =$	0,66846	0,66846	0,66846
$E =$	503100	5789600	672700
E in Pferdekr. = ...	152	175	204
E für 1 Pfd. Kohle = ...	1143150	1315500	1528500
E für 1 Cubikfuß Wasser = . .	7546100	8684000	1009000
Q Kohle für 1 Pferdekr. = . .	0,029	0,025	0,022
Q Wasser für 1 Pferdekr. = . .	0,00437	0,00380	0,00327
E in Pferdekr. für 1 Pfd. Kohle =	34,64	39,86	46,32
E in Pferdekr für 1 Cubikf. Wass. =	229	263	306.

Diese Resultate zeigen, welchen Gebrauch man von unsern Formeln machen kann, indem sie zeigen, welches für den Nutzeffect der Maschine die vortheilhaftesten Combinationen sind, so daß man folglich, wenn man die in der Praxis im Allgemeinen zuläßigen oder die einem speciellen Falle entsprechenden Combinationen auswählt, zwar nicht das absolute Maximum des Nutzeffectes der Maschine erhält, sich aber demselben doch möglichst nähren kann, sobald es die Umstände gestatten.

Neunzehnter Abschnitt.

XI. Theorie der atmosphärischen Dampfmaschinen.

§. 310. Die atmosphärischen Dampfmaschinen sind einfachwirkende, mit niederem Druck, mit Expansion und mit Condensation, worin der Nutzeffect während der Condensation des Dampfes und durch den atmosphärischen Druck hervorgebracht wird. Der Dampf wird darin zuerst unter den Kolben geleitet, um denselben mit Hülfe eines an dem andern Ende des Balanciers befindlichen Gegengewichtes zu heben, worauf dieser Dampf condensirt und der Kolben vermöge des auf seine obere Fläche wirkenden atmosphärischen Druckes abwärts bewegt, und die Last mit dem Gegengewichte auf eine entsprechende Höhe gehoben wird. Alsdann tritt wieder eine neue Quantität Dampf in den Cylinder, wodurch der Kolben wieder gehoben und das Spiel wie zuvor fortgesetzt wird. In diesen Maschinen bildet also successive der Druck des Dampfes nebst dem Gegengewichte und der atmosphärische Druck die bewegende Kraft, und der Nutzeffect wird nicht während der Wirkung des Dampfes, sondern während der des atmosphärischen Druckes hervorgebracht. Diese beiden Kräfte wirken also abwechselnd; aber da der atmosphärische Druck allein keine Wirkung hervorbringen kann, so folgt, daß doch der Dampf die eigentliche bewegende Kraft ist. Die Wirkungsart einer atmosphärischen Dampfmaschine läßt sich leicht auf die einer einfachwirkenden Watt'schen Maschine zurückführen; denn da der atmosphärische Druck 14,71 Pfund für den Quadratzoll beträgt, so kann man sich statt desselben ein auf den oberen Theil des Kolbens wirkendes Gewicht von 14,71 Pfund für den Quadratzoll denken, so daß man folglich auf den Fall einer einfachwirkenden Watt'schen Dampfmaschine zurückkommt, worin der Nutzeffect nicht unmittelbar während der Wirkung des Dampfes, sondern während des Rückganges des Kolbens hervorgebracht wird, und folglich der Dampf in beiden Maschinen dieselbe Rolle spielt.

Da die atmosphärischen Maschinen im Allgemeinen weder ein Schwungrad, noch eine Kurbel haben, d. h. keine Rotationsmaschinen sind, so erfordern sie, wie die einfachwirkenden Watt'schen Maschinen, eine besondere Regulirung, damit der Kolben in dem Cylinder von selbst stehen bleibt, sobald er den bestimmten Weg durchlaufen hat, ohne darüber hinaus zu gehen, noch früher stehen zu bleiben. Um nämlich bei dem aufsteigenden Kolbenzuge zu verhindern, daß der Kolben gegen den oberen Boden des Cylinders stößt, unterbricht man die Communication mit dem Kessel in dem gehörigen Zeitpuncte, so daß der Kolben seine Bewegung nur noch vermöge der erlangten Geschwindigkeit, der Wirkung des Gegengewichtes und der Expansion des Dampfes in dem Cylinder fortsetzt und vollendet, indem er ohne Stoß gegen den oberen Boden des Cylinders und ganz allmählig zur Ruhe kommt, weil nach der Absperrung des Dampfes im Kessel der auf die obere Kolbenfläche wirkende atmosphärische Druck bald größer wird, als die bewegende Kraft.

Bei dem niedersteigenden Kolbenlaufe dagegen unterbricht man die Condensation kurz vor dem Ende des Kolbenlaufes, indem man das Injectionswasser zurückhält, wenn die Condensation in dem Cylinder selbst stattfindet, oder indem man die Communication zwischen dem Cylinder und dem Condensator zeitig genug unterbricht. Der alsdann unter dem Kolben befindliche, nicht condensirte Dampf wird durch den Kolben immer mehr und mehr zusammen gedrückt, und übt folglich gegen den Kolben einen immer größer werdenden Gegendruck aus, wodurch derselbe allmählig zur Ruhe gebracht wird. Es ist aber zu bemerken, daß hierdurch kein Verlust an Arbeit stattfindet, weil der comprimirte Dampf bei dem folgenden Kolbenzuge mitwirkt. Zuweilen öffnet man auch den Regulator etwas früher, als der Kolben den Boden des Cylinders erreicht, und der Dampf des Kessels bildet alsdann ein Hinderniß, wodurch der Kolben bald zur Ruhe gebracht wird.

Durch diese Mittel, deren practischer Zweck kein anderer ist, als den Boden des Cylinders gegen die Stöße des Kolbens zu schützen, wird die atmosphärische Dampfmaschine, wie die einfachwirkende Watt'sche, regulirt, woraus folgt, daß sich die Formeln zur Berechnung der ersteren aus denselben Fundamentalbedingungen wie früher, nämlich: daß die Arbeit oder Leistung der bewegenden Kraft der des Widerstandes und die verbrauchte Quantität Dampf der erzeugten gleich ist, ableiten lassen müssen.

A. Effecte der Maschine mit einer beliebigen Last oder Geschwindigkeit, einem beliebigen Verschlusse des Injectionshahnes und einem beliebigen Gegengewichte.

§. 311. Man muß bei der Arbeit der atmosphärischen Dampfmaschinen vier Fälle unterscheiden, nämlich: 1) wenn sie mit einem beliebigen Gegengewichte, einem beliebigen Verschlusse des Injectionshahnes und einer beliebigen Last oder Geschwindigkeit arbeiten; 2) wenn sie mit einem beliebigen Gegengewichte und mit einem beliebigen Verschlusse des Injectionshahnes; aber mit einer Last oder Geschwindigkeit arbeiten, welche für dieses Gegengewicht und diesen Verschluß des Injectionshahnes das Maximum des Nutzeffectes hervorbringen; 3) wenn sie mit einem beliebigen Gegengewichte, aber mit dem vortheilhaftesten Verschlusse des Injectionshahnes und der vortheilhaftesten Last für dieses Gegengewicht arbeiten, und endlich 4) wo auch das Gegengewicht den vortheilhaftesten Werth bekommt, so daß man das absolute Maximum des Nutzeffectes der Maschine erhält.

Wir wollen zunächst den ersten Fall betrachten, indem wir die früheren Bezeichnungen beibehalten und blos noch hinzufügen, daß φ jetzt den atmosphärischen Druck, ϱ' die Nutzlast während des aufsteigenden Kolbenlaufes und ϱ'' die während des niedersteigenden Kolbenlaufes für die Einheit der Kolbenfläche bezeichnet, so daß $r = \varrho' + \varrho''$ ist, während f' die Reibung der leeren Maschine bei dem aufsteigenden Kolbenlaufe und f'' die bei dem niedersteigenden Kolbenlaufe ist. Der Dampf wirkt in dem Cylinder jetzt während des aufsteigenden Kolbenzuges, wie in den einfachwirkenden Watt'schen Dampfmaschinen während des niedersteigenden Kolbenzuges, und folglich wird die von dem Dampfe während des aufsteigenden Kolbenzuges hervorgebrachte Totalquantität Arbeit ausgedrückt durch:

$$a\,(l' + c)\,(n + P')\left[\frac{l'}{l' + c} + \log.\left(\frac{l + c}{l' + c}\right)\right] - nal.$$

Andererseits werden die dem Gegengewichte Π, der Last ϱ', der Reibung f' und dem atmosphärischen Drucke φ entsprechenden Quantitäten Arbeit resp. ausgedrückt durch Πal, $\varrho' al$, $f'al$ und φal. Folglich hat man, da die Arbeit der bewegenden Kraft der des Gesammtwiderstandes gleich sein muß, die Gleichung:

$$a\,(l' + c)\,(n + P')\left[\frac{l'}{l' + c} + \log.\left(\frac{l + c}{l' + c}\right)\right] - nal + \Pi al$$
$$= \varphi al + \varrho' al + f'al,$$

und wenn man zur Abkürzung setzt:

$$k' = \frac{l'}{l' + c} + \log.\left(\frac{l + c}{l' + c}\right),$$

so kann man diese Gleichung auf folgende Form bringen:

$$n + P' = \frac{l}{l' + c} \cdot \frac{1}{k'}\,[n + \varphi + \varrho' + f' - \Pi], \qquad (A)$$

welches die erste der drei gesuchten allgemeinen Relationen ist.

Bei dem niedersteigenden Kolbenlaufe bildet der atmosphärische Druck die bewegende Kraft, deren Quantität Arbeit $= \varphi al$ ist, während die dem Gesammtwiderstande entsprechende Quantität Arbeit durch:

$$(f'' + \delta\varrho'' + \delta\Pi)\; al$$

ausgedrückt wird.

Was die dem Drucke p des unter dem Kolben unvollständig condensirten Dampfes entsprechende Quantität Arbeit anlangt, so besteht dieselbe aus zwei Theilen. Der Druck p wirkt nämlich zuerst unverändert, während der Kolben eine gewisse Länge l'' durchläuft, bis die Communication mit dem Condensator abgeschlossen oder die Condensation in dem Cylinder unterbrochen wird, und die entsprechende Quantität Arbeit ist offenbar gleich:

$$pal''.$$

Aber von diesem Puncte an hört die Condensation auf, der noch **unter** dem Kolben befindliche Dampf wird, während der Kolben die Länge $l - l''$ durchläuft, immer mehr zusammengedrückt, und es ist die entsprechende Quantität Arbeit zu bestimmen. In dem Augenblicke des Beginnens der Compression des Dampfes hat derselbe unter dem Kolben eine Spannung $= p$ und ein Volumen gleich:

$$a\,(l - l'' + c).$$

Bezeichnet folglich ϖ die Spannung des Dampfes, wenn der Kolben die Länge λ durchlaufen hat, und man läßt denselben noch das Wegelement $d\lambda$ beschreiben; so ist das entsprechende Arbeitselement der Compression des Dampfes offenbar gleich:

$$a\varpi d\lambda.$$

Da es aber derselbe Dampf ist, welcher in Berührung mit dem Condensationswasser und unter dem Drucke p den Raum:

$$a\,(l - l'' + c)$$

einnahm, und jetzt unter dem Drucke ϖ den Raum:

$$a\,(l - \lambda + c)$$

einnimmt, ohne von seiner Totalwärme etwas zu verlieren; so findet nach der allgemeinen Relation (c) in §. 274 zwischen den Volumen und den zugehörigen Spannkräften des Dampfes die Relation statt:

$$\varpi = (n + p)\,\frac{a\,(l - l'' + c)}{a\,(l - \lambda + c)} - n,$$

und folglich hat man:

$$\varpi a d\lambda = a\,(n + p)\,(l - l'' + c)\,\frac{d\lambda}{(l - l'' + c)} - nad\lambda.$$

Nimmt man von diesem letzten Ausdrucke das Integral zwischen den Grenzen l'' und l, so erhält man für die gesuchte Quantität Arbeit der allmähligen Compression des Dampfes während der Länge $l - l''$ des Kolbenlaufes folgenden Ausdruck:

$$a\,(n + p)\,(l - l'' + c)\,log.\left(\frac{l - l'' + c}{c}\right) - na\,(l - l'').$$

Addirt man hierzu die Quantität Arbeit pal'' des Dampfes vor der Compression, so erhält man für die **Gesammt**quantität Arbeit des widerstehenden, nicht condensirten Dampfes:

$$al\,(n + p)\left[\frac{l''}{l} + \frac{l - l'' + c}{l}\,log.\left(\frac{l - l'' + c}{c}\right)\right] - nal,$$

und wenn man zur Abkürzung setzt:

$$k''' = \frac{l''}{l - l'' + c} + log.\left(\frac{l - l'' + c}{c}\right);$$

so kann man den vorhergehenden Ausdruck auf folgende Form bringen:

$$(n + p)\,\frac{l - l'' + c}{l}\,k'''al - nal.$$

Unter Berücksichtigung der vorhin gefundenen Werthe für die Quantität Arbeit des atmosphärischen Druckes, der Last, des Gegengewichtes und der Reibung der Maschine haben wir also für den betrachteten Kolbenlauf zwischen der Arbeit der bewegenden Kraft und der des Widerstandes die Gleichung:

$$\varphi al = \varrho'' al + \Pi al + (f'' + \varrho'' + \delta\Pi)\, al$$
$$+ \frac{l - l'' + c}{l}(n + p)\, k''' al - nal,$$

woraus folgt:

$$(1 + \delta)\, \Pi = n + \varphi - (1 + \delta)\, \varrho'' - f''$$
$$- \frac{l - l'' + c}{l}(n + p)\, k''', \qquad (B)$$

welches die zweite gesuchte allgemeine Relation ist.

Bezeichnet S wieder das in der Minute im Kessel verdampfte und in den Cylinder übergetretene Volumen Wasser, so nimmt dasselbe als Dampf von der Spannung P' in dem Cylinder bekanntlich ein Volumen:

$$\frac{mS}{n + P'}$$

ein, während der innere Rauminhalt des Cylinpers, welcher sich bei jedem aufsteigenden Kolbenzuge mit Dampf füllt, durch:

$$a\,(l' + c)$$

ausgedrückt wird.

Wir haben aber gesehen, daß bei jedem absteigenden Kolbenzuge unter dem Kolben eine gewisse Quantität Dampf im comprimirten Zustande zurückbleibt, welcher bei dem folgenden Kolbenzuge wirksam wird, indem derselbe nicht condensirt, sondern dem Kessel wieder zugeführt wird. Die Spannung dieses Dampfes ist in dem Augenblicke, wo derselbe in dem Cylinder abgeschlossen wird, $= p$, und das Volumen, welches er bei diesem Drucke einnimmt, ist gleich:

$$a\,(l - l'' + c).$$

Wenn dieser Dampf ohne Wärmeverlust zu dem Drucke P' übergeht, so ändert sich sein Volumen in dem Verhältnisse:

$$\frac{n + p}{n + P'}$$

und wird gleich:

$$a\,(l - l'' + c)\,\frac{n + p}{n + P'}.$$

Die bei jedem doppelten Kolbenzuge wirklich verbrauchte Quantität Dampf ist also nur gleich:

$$a\,(l' + c) - a\,(l - l'' + c)\,\frac{n + p}{n + P'},$$

und wenn v die Geschwindigkeit des Kolbens während der Hervorbringung des Nutzeffectes und M die Anzahl der doppelten Kolbenzüge in der Minute bezeichnet; so wird das in der Minute verbrauchte Volumen Dampf ausgedrückt durch:

$$M\left[a\,(l'+c)-a\,(l-l''+c)\,\frac{n+p}{n+P'}\right],$$

oder wegen:

$$v=Ml,\text{ also } M=\frac{v}{l}$$

durch:

$$\frac{v}{l}\,a\left[l'+c-(l-l''+c)\,\frac{n+p}{n+P'}\right].$$

Man hat folglich für die dritte gesuchte allgemeine Relation:

$$\frac{v}{l}\,a\left[l'+c-(l-l''+c)\,\frac{n+p}{n+P'}\right]=\frac{mS}{n+P'},$$

woraus folgt:

$$n+P'=\frac{mS}{av}\cdot\frac{l}{l'+c}+\frac{l-l''+c}{l}\cdot\frac{l}{l'+c}\,(n+p).\qquad (C)$$

Eliminirt man also die unbekannte Größe P' zwischen den Gleichungen (A) und (C), so erhält man zunächst:

$$\frac{1}{k'}\,(f'+n+\varphi+\varrho'-\Pi)=\frac{mS}{av}+\frac{l-l''+c}{l}\,(n+p),\qquad (D)$$

und wenn man alsdann zwischen dieser letzten Gleichung und der Gleichung (B) das Gegengewicht Π eliminirt, hierauf die erhaltene Gleichung für die verschiedenen unbekannten Größen der Aufgabe auflöst, und endlich für $\varrho'+\varrho''$ seinen Werth r setzt; so erhält man die folgenden Formeln:

$$v=\frac{mS}{a}\cdot\frac{(1+\delta)\,k'}{\left\{\begin{matrix}(1+\delta)\,(r+f')+f''+(n+\varphi)\,\delta\\+\dfrac{l-l''+c}{l}\,(n+p)\left[k''-(1+\delta)\,k'\right]\end{matrix}\right\}},\qquad (1)$$

$$ar=m\cdot\frac{S}{v}\,k'-a\,\frac{l-l''+c}{l}\left(\frac{k'''}{1+\delta}-k'\right)(n+p)$$
$$-\frac{a}{1+\delta}\left[(1+\delta)\,f'+f''+\delta\,(n+\varphi)\right],\qquad (2)$$

$$S=\frac{av}{m}\cdot\frac{\left\{\begin{matrix}(1+\delta)\,(r+f')+f''+(n+\varphi)\,\delta\\+\dfrac{l-l''+c}{l}\,(n+p)\left[k'''-(1+\delta)\,k'\right]\end{matrix}\right\}}{(1+\delta)\,k'},\qquad (3)$$

$$E=arv,\qquad (4)$$

wo die Größen k' und k''' folgende Werthe haben:

$$k' = \frac{l'}{l' + c} + log. \left(\frac{l + c}{l' + c}\right),$$

$$k''' = \frac{l''}{l - l'' + c} + log. \left(\frac{l - l'' + c}{c}\right),$$

welche man unmittelbar aus der weiter unten folgenden Tafel nehmen kann.

Die vorhergehenden Formeln geben die Auflösung aller vorkommenden Aufgaben, weil alle in den zweiten Theilen vorkommenden Größen bekannt sind, ausgenommen die Größe $\frac{l''}{l}$, welche gewöhnlich nicht unmittelbar gegeben ist, aber von dem gegebenen Gegengewichte abhängt, und um sie als Function gegebener Größen zu erhalten, braucht man nur auf die allgemeinen Gleichungen (B), (D) zurückzugehen, woraus folgt:

$$\frac{l - l'' + c}{l} k''' = \frac{n + \varphi - (1 + \delta)(r - \varrho' + \Pi) - f''}{n + p}, \quad (E)$$

$$\frac{l''}{l} = \frac{l + c}{l} - \frac{n + \varphi + \varrho' + f' - \Pi - \frac{mS}{av} k'}{(n + p) k'}. \quad (E')$$

Um für den Fall des Maximums des Nutzeffectes, wo weder die Last, noch die Geschwindigkeit der Maschine bekannt ist, die erste der beiden Gleichungen (E), (E') numerisch aufzulösen, muß man wie bei den einfachwirkenden Watt'schen Maschinen für l'' einen ersten Näherungswerth annehmen, daraus vermittelst der später folgenden Tafel k''' ableiten und dann das Product:

$$\frac{l - l'' + c}{l} k'''$$

bilden. Wenn dasselbe größer oder kleiner ist, als der Werth des zweiten Theiles der Gleichung (E), so muß man für l'' einen etwas verschiedenen Werth annehmen und dasselbe Verfahren so lange wiederholen, bis man ein hinreichend genaues Resultat erhält.

B. Last oder Geschwindigkeit, welche für einen bestimmten Verschluß des Injectionshahnes und für eine bestimmte Expansion oder ein bestimmtes Gegengewicht das Maximum des Nutzeffectes gibt.

§. 312. Aus den obigen Formeln sieht man, daß jeder Last der Maschine bei denselben Werthen von $\frac{l'}{l}$ und $\frac{l''}{l}$ eine gewisse Geschwindigkeit und folglich ein gewisser Nutzeffect entspricht, und es handelt sich jetzt darum, unter allen Lasten oder Geschwindigkeiten die zu bestimmen, welche bei gegebenen Werthen von $\frac{l'}{l}$ und $\frac{l''}{l}$ den Nutzeffect der Maschine zu einem Maximum machen. Zu dem Zwecke müssen wir zunächst den Ausdruck des Nutzeffectes bei einer beliebigen Last oder Geschwindigkeit bilden, was geschieht, wenn wir die beiden Theile der Gleichung (2) mit v multipliciren, wodurch sich ergibt:

$$arv = mk'S - \frac{av}{1+\delta}\left[(1+\delta)f' + f'' + \delta(n+\varphi)\right]$$
$$- av\,\frac{l - l'' + c}{l}(n+p)\left(\frac{k'''}{1+\delta} - k'\right).$$

Da nach den später vorkommenden Tafeln der Werthe von k' und k''' immer $\frac{k'''}{1+\delta}$ größer als k' ist, so sieht man aus dem vorhergehenden Ausdrucke, daß das Maximum des Nutzeffectes dem kleinsten Werthe von v entspricht, und da ferner aus der allgemeinen Gleichung (C) folgt:

$$v = \frac{S}{a} \cdot \frac{m}{\frac{l'+c}{l}(n+P') - \frac{l-l''+c}{l}(n+p)};$$

so sieht man, daß der kleinste Werth von v dem größten Werthe von P', nämlich P entspricht. Substituirt man also diesen Werth in den vorhergehenden Ausdruck von v, so erhält man für die das Maximum des Nutzeffectes der Maschine gebende Geschwindigkeit:

$$v' = \frac{S}{a} \cdot \frac{m}{\frac{l'+c}{l}(n+P) - \frac{l-l''+c}{l}(n+p)}, \qquad (5)$$

und wenn man diesen Werth in die Gleichung (2) substituirt; so erhält man für die zugehörige Last der Maschine, d. h. die, welcher das Maximum des Nutzeffectes entspricht:

$$ar' \quad a\frac{l'+c}{l}k'(n+P) - \frac{a}{1+\delta} \cdot \frac{l-l''+c}{l}k'''(n+p)$$
$$- \frac{a}{1+\delta}\left[(1+\delta)f' + f'' + \delta(n+\varphi)\right]. \qquad (6)$$

Wenn das Gegengewicht der Maschine mit der Bedingung des größten Nutzeffectes a priori bestimmt ist, d. h. wenn man das Maximum des Nutzeffectes sucht, welches die Maschine bei einem gegebenen Gegengewichte hervorbringen kann; so ist die Expansion $\frac{l'}{l}$ zu gleicher Zeit bestimmt. Denn wenn man in die Gleichung (A) die Bedingung $P' = P$ einführt, so erhält man:

$$\frac{l'+c}{l}k' = \frac{n + \varphi + \varrho' + f' - \Pi}{n+P},$$

wodurch der Werth von $\frac{l'}{l}$ völlig bestimmt wird, weil im zweiten

Theile der letzten Gleichung alle Größen bekannt und constant sind. In diesem Falle wird also die für das gegebene Gegengewicht vortheilhafteste Last durch die Gleichung (6) bestimmt, worin $\frac{l'}{l}$ nothwendig den aus der Gleichung (A) abgeleiteten Werth hat, welcher durch keine andere Bedingung bestimmt werden kann.

Aber es gibt auch einen allgemeinen Fall, nämlich den, wo das anzuwendende Gegengewicht nicht zum Voraus bestimmt ist, sondern man sich im Gegentheil vorbehält, dasselbe so zu bestimmen, daß der Nutzeffect der Maschine möglichst groß wird. Alsdann muß man den Werth von $\frac{l'}{l}$, welcher diese Bedingung erfüllt, direct suchen, und aus der Gleichung (A) kann man nur noch den Werth des Gegenwichtes ableiten.

C. Bestimmung der Reibung der unbelasteten Maschine und der Zunahme dieser Reibung für die Einheit der Last.

§. 313. Vermittelst des Gesagten kann man auch die Reibung der unbelasteten Maschine und die Zunahme dieser Reibung für die Einheit der Last bestimmen, wie bei allen früher betrachteten Dampfmaschinen. Denn wenn man die Maschine ohne alle Last arbeiten läßt, aber den Druck des Dampfes im Kessel so weit vermindert, daß er eben noch im Stande ist, den Kolben bis an das Ende seines Laufes zu bewegen, und man sorgt dafür, daß das Austrittsventil oder der Injectionshahn zeitig genug geschlossen wird, damit am Ende des niedersteigenden Kolbenlaufes der Balancier nicht anschlägt; so ist klar, daß die Reibung der Maschine für die Spannung im Kessel eine größte Last geworden ist. Bezeichnet also P'' den vermittelst des Manometers bestimmten Druck im Kessel, so finden die allgemeinen Gleichungen (A), (B) noch statt, wenn man darin zu gleicher Zeit $P' = P''$ und $\varrho' = 0$, $\varrho'' = 0$ setzt. Man hat also:

$$f' = \Pi - n - \varphi + \frac{l'+c}{l} k'(n+P''),$$

$$f'' = n + \varphi - \Pi - \frac{l-l''+c}{l}(n+p)k''' - \delta\Pi,$$

und wenn man die Größen l', l'', p direct beobachtet und das Glied $\delta\Pi$ vernachlässigt; so kann man die Größen f' und f'' berechnen.

Der Werth der Größe δ ergibt sich auf eine ähnliche Weise. Man läßt nämlich die Maschine mit einer beliebigen, aber bekannten Last ϱ'' arbeiten, sorgt dafür, daß am Ende des niedersteigenden Kolbenzuges kein Stoß stattfindet und bestimmt zugleich den Condensationsdruck p in dem Cylinder. Alsdann wird die Gleichung (B) erfüllt, und man hat zur Bestimmung von δ die Formel:

$$1 + \delta = \frac{n + \varphi - f' - \frac{l-l''+c}{l}(n+p)k'''}{\Pi + \varrho''},$$

weil f' nach der vorhergehenden Bestimmung bekannt und ϱ'' gegeben ist. Da aber bei der Bestimmung des Werthes von f'' die Größe $\delta\Pi$ vernachlässigt wurde, so kann man, wenn man es für nöthig hält, den vorhin gefundenen Werth von δ benutzen, um einen genaueren Werth von f'' zu erhalten. Man kann die beiden Reibungen f' und f'' auch bestimmen, ohne die gewöhnliche Last der Maschine zu verändern, wenn man nur dafür sorgt, daß kein Stoß des Kolbens stattfindet, und die Spannung des Dampfes im Kessel so weit vermindert, daß die Last der Maschine für diese Spannung ein Maximum wird. Denn wenn P_1 diese beobachtete Spannung im Kessel bezeichnet, so gibt die Gleichung (A):

$$f' = \Pi - (n + \varrho' + \varphi) + \frac{l' + c}{l} k' (n + P_1).$$

Da ferner die Last ϱ' bei dem aufsteigenden Kolbenzuge bekannt ist, so gibt diese Gleichung den Werth von f', woraus sich alsdann der von f'' ergibt, wie bei den einfachwirkenden Watt'schen und Cornwall'schen Maschinen.

D. Vortheilhaftester Verschluß des Injectionshahnes für eine gegebene Expansion oder für ein gegebenes Gegengewicht.

§. 314. Nach den Formeln in §. 312 ist klar, daß sich die Last und Geschwindigkeit, und folglich auch der Nutzeffect der Maschine mit den Größen $\frac{l''}{l}$ und $\frac{l'}{l}$ ändert, und wir wollen jetzt näher untersuchen, wie man diese beiden Größen annehmen muß, damit der Nutzeffect der Maschine möglichst groß wird.

Um zunächst den vortheilhaftesten Werth von $\frac{l''}{l}$ kennen zu lernen, und zwar bei einem gegebenen Werthe von $\frac{l'}{l}$, muß man den Ausdruck des Nutzeffectes der Maschine bei einem beliebigen Werthe von $\frac{l''}{l}$ und mit der für diesen Werth vortheilhaftesten Last betrachten, und untersuchen, für welchen Werth von $\frac{l''}{l}$ dieser Ausdruck am größten wird. Der fragliche Ausdruck wird aber offenbar erhalten, wenn man die entsprechenden Theile der Gleichungen (5) und (6) in einander multiplicirt, und ist:

$$ar'v' = mS \cdot \frac{\left\{\frac{l' + c}{l} k' - \frac{l - l'' + c}{l} \cdot \frac{k'''}{1 + \delta} \cdot \frac{n + p}{n + P} - \frac{(1 + \delta) f' + f'' + \delta (n + \varphi)}{(1 + \delta)(n + P)}\right\}}{\frac{l' + c}{l} - \frac{l - l'' + c}{l} \cdot \frac{n + p}{n + P}}.$$

Es kommt also darauf an, den Werth von $\frac{l''}{l}$ zu finden, welcher diesen Ausdruck zu einem Maximum macht. Setzt man aber für k'' seinen Werth, nämlich:

$$k'' = \frac{l''}{l - l'' + c} + log.\left(\frac{l - l'' + c}{c}\right),$$

differentiirt das Resultat in Beziehung auf l'' und setzt den Differentialquotienten gleich Null; so erhält man die Gleichung:

$$\frac{l}{l' + c} \cdot \frac{n + p}{n + P} \cdot \frac{l''}{l} + log.\left(\frac{l - l'' + c}{c}\right)$$
$$= (1 + \delta)\, k' - \frac{l}{l' + c} \cdot \frac{(1 + \delta) f' + f'' + \delta\,(n + \varphi)}{1 + P}, \quad (7)$$

welche den gesuchten Werth von $\frac{l''}{l}$ gibt. Um sie numerisch aufzulösen, muß man für k' und für die Constanten ihre Werthe setzen, wodurch die Gleichung auf die sehr einfache Form:

$$A\,\frac{l''}{l} - log.\left(\frac{l - l'' + c}{c}\right) = B$$

gebracht wird. Um daraus den gesuchten Werth von $\frac{l''}{l}$ abzuleiten, muß man successive verschiedene Werthe von $\frac{l''}{l}$ versuchen, bis man den findet, welcher den ersten Theil der Gleichung dem zweiten gleich macht, was durchaus mit keinen Schwierigkeiten verbunden ist.

E. Expansion oder Gegengewicht, welche das absolute Maximum des Nutzeffectes geben.

§. 315. Bei den bisherigen Aufgaben wurde der Werth von $\frac{l'}{l}$ als bestimmt und gegeben angenommen; allein es ist einleuchtend, daß die Last und Geschwindigkeit, und folglich auch der Nutzeffect der Maschine sich ändern, wenn man für $\frac{l'}{l}$ verschiedene Werthe setzt, und man kann folglich den Werth von $\frac{l'}{l}$ zu bestimmen suchen, welcher das absolute Maximum des Nutzeffectes gibt. Um diese Aufgabe direct zu lösen, müßte man in den obigen Werth von $ar'v'$ für l'' und k''' ihre Werthe als Function von l' setzen, das erhaltene Resultat in Beziehung auf l' differentiiren und den Differentialquotienten gleich Null setzen. Da sich aber aus der Gleichung (7) der Werth von l'' nicht leicht ableiten läßt, so wollen wir ein Näherungsverfahren statt des directen anwenden. Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst den Ausdruck:

$$ar'v' = mS \cdot \frac{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{l'+c}{l} - \dfrac{l-l''+c}{l} \cdot \dfrac{k'''}{1+\delta} \cdot \dfrac{n+p}{n+P} \\ \quad - \dfrac{(1+\delta)f' + f'' + \delta(n+\varphi)}{(1+\delta)(n+P)}\end{array}\right\}}{\dfrac{l'+c}{l} - \dfrac{l-l''+c}{l} \cdot \dfrac{n+p}{n+P}},$$

welcher sich, wenn man einstweilen $l'' = l$, folglich $k''' = \frac{l}{c}$ setzt, auf folgenden reducirt:

$$ar'v' = mS \cdot \frac{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{l'+c}{l} k - \dfrac{1}{1+\delta} \cdot \dfrac{n+p}{n+P} \\ \quad - \dfrac{(1+\delta)f' + f'' + \delta(n+\varphi)}{(1+\delta)(n+P)}\end{array}\right\}}{\dfrac{l'+c}{l} - \dfrac{c}{l} \cdot \dfrac{n+p}{n+P}}.$$

Differentiirt man ferner diesen letzten Ausdruck in Beziehung auf l' und setzt den Differentialquotienten gleich Null, so erhält man die Relation:

$$\frac{l'}{l} + \frac{c}{l} \cdot \frac{n+p}{n+P} \log.\left(\frac{l+c}{l'+c}\right)$$
$$= \frac{1}{1+\delta} \cdot \frac{n+p+(1+\delta)f' + f'' + \delta(n+\varphi)}{n+P}, \qquad (8)$$

welche die gesuchte Bedingung ausdrückt, und da das Glied:

$$\frac{c}{l} \cdot \frac{n+p}{n+P} \log.\left(\frac{l+c}{l'+c}\right)$$

immer eine sehr kleine Größe ist, welche vernachlässigt werden kann; so hat man endlich die Gleichung:

$$\frac{l'}{l} = \frac{1}{1+\delta} \cdot \frac{n+p+(1+\delta)f' + f'' + \delta(n+\varphi)}{n+P}, \quad (9)$$

welche in den meisten Fällen der Praxis genügt.

Es könnte scheinen, als bliebe das Gegengewicht der Maschine noch unbestimmt, und könnte ebenfalls so bestimmt werden, daß der Nutzeffect noch vergrößert würde. Allein wir haben die Maschine in allen Fällen so regulirt vorausgesetzt, daß sie ihren größten Nutzeffect hervorbringt, was $P' = P$ voraussetzt, durch welche Bedingung das Gegengewicht als Function der Expansion bestimmt wird, so daß, wenn diese auf die vorhergehende Weise bestimmt wird, das Gegengewicht es ebenfalls ist. Denn wenn man die Bedingung

$P' = P$ in die allgemeine Gleichung (A) einführt, so erhält man die Relation:

$$\Pi = n + \varphi + \varrho' + f' - \frac{l' + c}{l} k' (n + P), \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

welche unmittelbar den gesuchten Werth des Gegengewichtes gibt, weil alle im zweiten Theile vorkommenden Größen bekannte Werthe haben, und wenn man das Gegengewicht zum Voraus bestimmt hätte; so gäbe dieselbe in Beziehung auf $\frac{l'}{l}$ aufgelöste Gleichung auch die vortheilhafteste Expansion für das bestimmte Gegengewicht. Bestimmt man also die Expansion durch die Gleichung (9), oder das Gegengewicht durch die Gleichung (8), nachdem man in diese für $\frac{l'}{l}$ seinen aus der Gleichung (9) abgeleiteten Werth gesetzt hat, hierauf den Werth von $\frac{l''}{l}$ durch die Gleichung (7) und endlich die Last durch die Gleichung (6); so erhält man das **absolute Maximum** des Nutzeffectes der Maschine. Wenn aber die auf diese Weise erthaltenen Werthe von $\frac{l'}{l}$, Π, $\frac{l''}{l}$ oder r in der Praxis nachtheilig oder unzulässig gefunden werden, so muß man sich bei der Annahme anderer Werthe doch so wenig als möglich von den berechneten entfernen. Zur Erleichterung der numerischen Berechnungen fügen wir nachfolgende Tafeln hinzu:

Werth von $\frac{l''}{l}$.	Zugehöriger Werth von $k''' = \frac{l''}{l - l'' + c} + log.\left(\frac{l - l'' + c}{c}\right)$ für $\frac{c}{l} = 0{,}1.$	$\frac{c}{l} = 0{,}2.$	$\frac{c}{l} = 0{,}3.$	Werth von $\frac{l''}{l}$.	Zugehöriger Werth von $k''' = \frac{''}{l - l'' + c} + log.\left(\frac{l - l'' + c}{c}\right)$ für $\frac{c}{l} = 0{,}1.$	$\frac{c}{l} = 0{,}2.$	$\frac{c}{l} = 0{,}3.$
0,10	2,205	1,720	1,429	0,25	1,860	1,536	1,315
0,11	2,180	1,708	1,422	0,26	1,839	1,524	1,306
0,12	2,155	1,697	1,416	0,27	1,819	1,512	1,298
0,13	2,130	1,685	1,409	0,28	1,790	1,500	1,290
9,14	2,105	1,673	1,402	0,29	1,781	1,488	1,282
0,15	2,082	1,661	1,394	0,30	1,782	1,476	1,273
0,16	2,058	1,649	1,387	0,31	1,743	1,464	1,265
0,17	2,033	1,636	1,379	0,32	1,725	1,452	1,257
0,18	2,012	1,624	1,371	0,33	1,707	1,440	1,248
0,19	1,988	1,611	1,363	0,34	1,689	1,428	1,240
0,20	1,966	1,599	1,356	0,35	1,672	1,417	1,231
0,21	1,944	1,586	1,348	0,36	1,654	1,405	1,223
0,22	1,922	1,574	1,339	0,37	1,637	1,394	1,215
0,23	1,901	1,561	1,331	0,38	1,621	1,382	1,207
0,24	1,880	1,549	1,323	0,39	1,605	1,371	1,199

Werth von $\frac{l'}{l}$.	Zugehöriger Werth von $k' = \left(\frac{l'}{l' + c} + log. \frac{l + c}{l' + c}\right)$ für			Werth von $\frac{l'}{l}$.	Zugehöriger Werth von $k' = \left(\frac{l'}{l' + c} + log. \frac{l + c}{l' + c}\right)$ für		
	$\frac{c}{l} = 0{,}1.$	$\frac{c}{l} = 0{,}2.$	$\frac{c}{l} = 0{,}3.$		$\frac{c}{l} = 0{,}1.$	$\frac{c}{l} = 0{,}2.$	$\frac{c}{l} = 0{,}3.$
0,40	1,588	1,360	1,190	0,71	1,183	1,057	0,955
0,41	1,573	1,349	1,182	0,72	1,172	1,048	0,948
0,42	1,557	1,338	1,174	0,73	1,161	1,040	0,942
0,43	1,542	1,327	1,166	0,74	1,151	1,031	0,935
0,44	1,526	1,316	1,158	0,75	1,140	1,023	0,928
0,45	1,511	1,305	1,150	0,76	1,130	1,015	0,921
0,46	1,496	1,295	1,142	0,77	1,120	1,007	0,914
0,47	1,482	1,284	1,134	0,78	1,110	0,998	0,908
0,48	1,468	1,274	1,126	0,79	1,100	0,990	0,901
0,49	1,453	1,264	1,118	0,80	1,090	0,982	0,894
0,50	1,439	1,253	1,111	0,81	1,080	0,974	0,888
0,51	1,426	1,243	1,103	0,82	1,070	0,966	0,881
0,52	1,412	1,233	1,095	0 83	1,060	0,959	0,875
0,53	1,399	1,223	1,087	0,84	1,050	0,951	0,868
0,54	1,385	1,213	1,080	0,85	1,041	0,943	0,862
0,55	1,372	1,203	1,072	0,86	1,032	0,935	0,855
0,56	1,359	1,194	1,064	0,87	1,023	0,928	0,849
0,57	1,347	1,184	1,057	0,88	1,014	0,920	0,843
0,58	1,334	1,174	1,049	0,89	1,005	0,913	0,836
0,59	1,321	1 165	1,042	0,90	0,996	0,905	0,830
0,60	1,309	1,156	1,034	0,91	0,987	0,898	0,824
0,61	1,297	1,146	1,027	0,92	0,978	0,890	0,818
0,62	1,285	1,137	1,020	0,93	0,969	0,883	0,811
0,63	1,273	1,128	1,012	0,94	0,960	0,876	0,805
0,64	1,261	1,119	1,005	0,95	0 951	0,869	0,799
0,65	1,250	1,110	0,998	0,96	0,943	0,861	0,793
0,66	1,238	1,101	0,991	0,97	0,934	0,854	0,787
0,67	1,227	1,092	0,984	0,98	0,926	0,847	0,781
0,68	1,215	1,083	0,976	0,99	0,918	0,840	0,775
0,69	1,204	1,074	0,969	1,00	0,909	0,833	0,769
0,70	1,193	1,066	0,962				

Werth von $\frac{l''}{l}$.	Zugehöriger Werth von $k'''=\frac{l''}{l-l''+c}+\log.\left(\frac{l-l''+c}{c}\right)$ für			Werth von $\frac{l''}{l}$.	Zugehöriger Werth von $k'''=\frac{l''}{l-l''+c}+\log.\left(\frac{l-l''+c}{c}\right)$ für		
	$\frac{c}{l}=0{,}1.$	$\frac{c}{l}=0{,}2.$	$\frac{c}{l}=0{,}3.$		$\frac{c}{l}=0{,}1.$	$\frac{c}{l}=0{,}2.$	$\frac{c}{l}=0{,}3.$
0,50	2,625	1,967	1,606	0,76	3,459	2,516	1,995
0,51	2,639	1,978	1,614	0,77	3,527	2,556	2,022
0,52	2,654	1,989	1,622	0,78	3,601	2,599	2,050
0,53	2,670	2,000	1,631	0,79	3,680	2,645	2,080
0,54	2,687	2,012	1,640	0,80	3,765	2,693	2,111
0,55	2,705	2,025	1,650	0,81	3,858	2,745	2,144
0,56	2,724	2,038	1,660	0,82	3,958	2,800	2,178
0,57	2,744	2,052	1,670	0,83	4,067	2,858	2,215
0,58	2,764	2,067	1,681	0,84	4,186	2,921	2,254
0,59	2,786	2,083	1,692	0,85	4,316	2,988	2,294
0,60	2,809	2,099	1,704	0,86	4,459	3,060	2,337
0,61	2,834	2,116	1,717	0,87	4,616	3,137	2,389
0,62	2,860	2,134	1,730	0,88	4,788	3,220	2,432
0,63	2,888	2,153	1,744	0,89	4,980	3,309	2,483
0,64	2,917	2,173	1,758	0,90	5,193	3,406	2,538
0,65	2,949	2,194	1,773	0,91	5,431	3,510	2,596
0,66	2,982	2,216	1,789	0,92	5,699	3,622	2,658
0,67	3,017	2,239	1,805	0,93	6,001	3,745	2,723
0,68	3,054	2,263	1,823	0,94	6,345	4,878	2,793
0,69	3,094	2,289	1,841	0,95	6,739	4,023	2,868
0,70	3,136	2,316	1,860	0,96	7,194	4,182	2,949
0,71	3,182	2,345	1,880	0,97	7,724	4,357	3,035
0,72	3,230	2,376	1,901	0,98	8,349	4,550	3,127
0,73	3,281	2,408	1,923	0,99	9,096	4,763	3,226
0,74	3,337	2,442	1,946	1,00	10,000	5,000	3,333
0,75	3,396	2,478	1,970				

Practische Formeln zur Berechnung der atmosphärischen Maschinen mit einem Anwendungsbeispiele.

§. 314. Um die practischen Formeln zur Berechnung der atmosphärischen Dampfmaschinen zu erhalten, muß man in den obigen allgemeinen Gleichungen für die darin vorkommenden Constanten ihre durch Beobachtung bestimmten Werthe setzen. Der Druck P des Dampfes im Kessel ist gewöhnlich $1\frac{1}{2}$ bis 2 Pfund für den Quadratzoll stärker als der atmosphärische Druck, d. h. es ist im Allgemeinen:

$$P = 16,5 \times 144 \text{ Pfd. für den Quadratfuß.}$$

Der atmosphärische Druck ändert sich mit dem Zustande der Atmosphäre und bei genauen Versuchen muß derselbe mit dem Barometer gemessen werden; aber im Allgemeinen kann man seinen mittlern Werth 14,71 Pfd. für den Quadratzoll annehmen, und folglich ist:

$$\varphi = 14,71 \times 144 \text{ Pfd. für den Quadratfuß.}$$

Der Condensationsdruck p in dem Cylinder muß womöglich in jedem Falle direct beobachtet werden, nämlich mit dem Watt'schen Indicator, wenn die Maschine einen Condensator hat, und wenn dieses nicht der Fall ist, so muß man wenigstens die Temperatur des nach der Condensation aus dem Cylinder tretenden Wassers bestimmen, welches zugleich die des Dampfes ist, der damit in Berührung stand, und alsdann kann man vermittelst der früher mitgetheilten Tafeln der Spannkräfte und zugehörigen Temperaturen des mit dem Wasser in Berührung stehenden Dampfes den Condensationsdruck unter dem Kolben finden. Die auf diese Weise beobachtete Condensationstemperatur variirt nach vielen mit atmosphärischen Maschinen angestellten Versuchen zwischen 142° und 174° Fahrh. und folglich der Condensationsdruck zwischen 3 und 7 Pfd. für den Quadratzoll. Es ist also gewöhnlich:

$$p = 4,7 \times 144 \text{ Pfd. für den Quadratfuß.}$$

Was den Werth der Reibungen f' f'' und δ anlangt, so fehlt es bis jetzt hierüber an speciellen Beobachtungen; um aber wenigstens den Gang der Rechnung zeigen zu können, wollen wir diese Größen für die Rede stehenden Maschinen wieder nach ihrem Werthe bei den einfach wirkenden Watt'schen Maschinen bestimmen, weil beide Arten von Maschinen einander ziemlich ähnlich sind, so daß diese Bestimmung der Wahrheit nahe genug kommt, um in der Praxis mit Nutzen angewandt werden zu können. Für atmosphärische Maschinen, welche wie die Watt'schen einen besonderen Condensator und eine Luftpumpe haben, setzen wir folglich wieder:

$$f' = \frac{350}{d}, \; f'' = \frac{250}{d},$$

wo d den Durchmesser des Cylinders der Maschine in Fußen bezeichnet.

Wenn die Maschine keinen Condensator hat, also die Condensation in dem Cylinder selbst stattfindet, so wird der Werth von f' wegen der fehlenden Luftpumpe vermindert und die Reibung ist für beide Kolbenzüge nahezu dieselbe. Aber da dieser Fall nur bei sehr alten Maschinen vorkommt, deren Construction bei weitem unvollkommener ist, als die der neuern Maschinen; so ist es fast unzulässig, ihre Reibung der einer Watt'schen Maschine gleichzusetzen, und wir wollen deßhalb näherungsweise setzen:

$$f' = f'' = \frac{450}{d}.$$

Ferner setzen wir wieder:

$$\delta = 0,14$$
$$m = 4100000$$
$$n = 250.$$

Was endlich die wirksame Verdampfung anlangt, so muß man unterscheiden, ob die Maschine einen besonderen Condensator hat, oder nicht. Im ersten Falle kann man die wirksame Verdampfung wie bei den Watt'schen Maschinen gleich 0,95 der Bruttoverdampfung annehmen. Aber bei Maschinen ohne Condensator wird der Cylinder bei jedem Kolbenzuge bis auf die Condensationstemperatur abgekühlt, und muß dann durch den Dampf des Kessels wieder bis zu der Temperatur erhitzt werden, die der Spannung entspricht, welche der Dampf bei seinem Eintritte in den Cylinder hat, wodurch offenbar ein beträchtlicher Verlust entsteht. Watt hat bei einer großen Anzahl directer Beobachtungen gefunden, daß dieser Verlust an Dampf in Folge der Abkühlung des Cylinders in den günstigsten Fällen 0,75 des nutzbar gemachten Dampfes und in den ungünstigsten Fällen sogar das Doppelte desselben betrug. Jedoch scheint dieser letzte Fall eine Ausnahme gewesen zu sein und von einem besondern Mangel hergerührt zu haben, so daß man bei Maschinen im guten Zustande der Wahrheit näher kommt, wenn man annimmt, daß der fragliche Dampfverlust zwischen 0,75 und 1,00 der nutzbaren Verdampfung variirt. Wenn also S wieder die wirksame Verdampfung und S' die Bruttoverdampfung bezeichnet, so variirt die wirksame Verdampfung zwischen:

$$S = \frac{S'}{1,75} = 0,57\, S', \text{ und } S = \frac{S'}{2} = 0,50\, S',$$

und folglich ist im Mittel:

$$S = 0,535\, S'.$$

Von den vorhergehenden Werthen wollen wir jedoch nur die von φ, m und n substituiren, weil die übrigen in verschiedenen Maschinen verschieden oder noch nicht genau genug bestimmt sind, wodurch wir folgende

Practische Formeln zur Berechnung der atmosphärischen Maschinen

erhalten.

A. Für eine beliebige Last, oder Geschwindigkeit mit einem gegebenen Werthe von $\frac{l''}{l}$ und $\frac{l'}{l}$ oder Π.

Geschwindigkeit des Kolbens in Fußen für die Minute:

$$v = 4100000\, \frac{S}{a} \frac{(1+\delta)\, k'}{\left\{ (1+\delta)\,(r+f') + f'' + 2368\,\delta \atop \frac{l-l''+c}{l}\,(250+p)\,[k''' - (l+\delta)\,k'] \right\}}.$$

Nutzlast in Pfunden:

$$ar = 4100000\, \frac{S}{v}\, k' - a\, \frac{l-l''+c}{l} \left(\frac{k'''}{1+\delta} - k' \right)(250+p)$$
$$- \frac{a}{1+\delta} \left[(1+\delta)\, f' + f'' + \delta\, 2369\, \delta \right].$$

Wirksame Verdampfung in der Minute:

$$S = \frac{av}{4100000} \cdot \frac{\left\{\begin{array}{l}(1+\delta)(r+f') + f'' + 2368\,\delta \\ + \frac{l - l'' + c}{l}(250+p)\left[k''' - (1+\delta)\,k'\right]\end{array}\right\}}{(1+\delta)\,k'}.$$

Nutzeffect in Fußpfunden:

$$E = arv.$$

B. Für das Maximum des Nutzeffectes bei einem gegebenen Werthe von $\frac{l''}{l}$ und $\frac{l'}{l}$ oder II.

Geschwindigkeit des Kolbens in der Minute:

$$v' = \frac{S}{a} \cdot \frac{4100000}{\frac{l'+c}{l}(250+P) - \frac{l-l''+c}{l}(250+p)}.$$

Nutzlast in Pfunden:

$$ar' = a\frac{l'+c}{l}k'(250+P) - \frac{a}{1+\delta} \cdot \frac{l-l''+c}{l}k'''\;(250+p)$$
$$-\frac{a}{1+\delta}\left[(1+\delta)\,f' + f'' + 2368\,\delta\right].$$

Wirksame Verdampfung in der Minute:

$$S = \frac{av'}{4100000}\left[\frac{l'+c}{l}(250+P) - \frac{l-l''+c}{l}(250+p)\right].$$

Nutzeffect in Fußpfunden:

$$E = ar'\,v'.$$

C. Bedingungsgleichung, welche den Werth von $\frac{l''}{l}$ für das Maximum des Nutzeffectes bei einem gegebenen Werthe von $\frac{l'}{l}$ oder II gibt:

$$\frac{l}{l'+c} \cdot \frac{250+p}{250+P} \cdot \frac{l''}{l} + \log.\left(\frac{l-l''+c}{c}\right) =$$
$$(1+\delta)\,k' - \frac{l}{l'+c} \cdot \frac{(1+\delta)\,f' + f'' + 2368\,\delta}{250+P}.$$

D. Expansion oder Gegengewicht für das absolute Maximum des Nutzeffectes.

$$\frac{l'}{l} = \frac{1}{1+\delta} \cdot \frac{250+p+(1+\delta)\,f' + f'' + 2368\,\delta}{250+P}.$$

$$\Pi = 2368 + \varrho'' + f' - \frac{l' + c}{l'} k' (250 + P).$$

Um von den vorhergehenden Formeln eine Anwendung zu machen, wollen wir die Effecte der bei den Steinkohlengruben von Long-Benton bei Newcastle von Smeaton aufgestellten atmosphärischen Maschine berechnen. Diese Maschine ist sehr bekannt und hat bis zu den Zeiten Watt's als Muster aller Maschinen dieser Art gegolten. Sie hat keinen besonderen Condensator und folgende Dimensionen und sonstige Data:

Durchmesser des Cylinders = 52 Zoll, oder Kolbenfläche a = 14,75 Quadratfuß.
Kolbenlauf $l = 7$ Fuß.
Schädlicher Raum $c = 0{,}29\ l$.
Absoluter Druck des Dampfes im Kessel = 16,5 Pfund für den Quadratzoll, oder $P = 16{,}5 \times 144$ Pfund f. d. Quadratfuß.
Druck unter dem Kolben $p = 4{,}25 = 144$ Pfund für den Quadratfuß.
Bruttoverdampfung des Kessels = 90 Cubf. Wasser in der Stunde oder 1,50 Cubf. in der Minute und folglich die wirksame Verdampfung $S = 0{,}535 \times 1{,}50 = 0{,}80$ Cubf. Wasser in der Minute.
Consumirte Quantität Steinkohlen erster Qualität 714 Pfd. in der Stunde, also 11,9 Pfd. in der Minute oder $N = 11{,}9$.
Gegengewicht $\Pi = 1{,}25 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß.
Werth von $\varrho' = 0{,}44 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß.
Werth von $\varrho'' = 7{,}07 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß.
Also $r = \varrho' + \varrho'' = 7{,}51 \times 144$ Pfd. für den Quadratfuß der Kolbenfläche.
Geschwindigkeit $v = 84$ Fuß in der Minute.

$$\text{Werth von } \frac{l'}{l} = 0{,}90 \text{ und } \frac{l''}{l} = 0{,}80.$$

Wenn man die verschiedenen Werthe in die vorhergehenden practischen Formeln einführt, so erhält man die folgenden Resultate:

v	= 84
ar	= 17868
$\frac{r}{144}$	= 8,41
S	= 1,80
E	= 1,500930
E in Pfrdkr.	= 45,5
E 1 Pfd. Kohle	= 126130
E 1 Cubf. Wasser	= 1876200
Q Kohle 1 Pfrdkr.	= 0,262
Q Wasser 1 Pfrd.	= 0,0176
E in Pfrdkr. 1 Pfd. Kohle . .	= 3,82
E in Pfrdkr. 1 Cubf. Wasser .	= 58,85.

Aus diesen Resultaten sieht man, daß die obigen Formeln durch den Versuch von Smeaton im Allgemeinen als richtig bestätigt werden.

Bestimmt man nun zunächst die vortheilhafteste Expansion $\frac{l'}{l}$ nach der Gleichung (9), sowie das zugehörige Gegengewicht nach der Gleichung (8), hierauf den vortheilhaftesten Werth von $\frac{l''}{l}$ und der Last nach den Gleichungen (7) und (6), nimmt alsdann verschiedene andere Expansionen an, welche der Praxis besser entsprechen, und bestimmt für dieselben das Gegengewicht, den Werth von $\frac{l''}{l}$ und die Last für das Maximum des Nutzeffectes, so erhält man folgende Resultate:

			Maximum des Nutzeffectes.
$\frac{l'}{l}$	= 0,90	0,60	0,34
$\frac{\Pi}{144}$	= 0,58	0,57	2,99
$\frac{l''}{l}$	= 0,77	0,69	0,65
v'	= 79,72	115,95	187,53
ar'	= 19633	16668	11239
$\frac{r'}{144}$	= 9,24	7,85	5,29
S	= 0,80	0,80	0,80
E	= 1565170	1932700	2107700
E in Pfrdkr.	= 47,43	58,57	63,87
E 1 Pfd. Kohle	= 131530	162410	177,110
E 1 Cubf. Wasser	= 1956450	2415850	2634600
Q Kohle 1 Pfrdkr.	= 0,251	0,203	0,186
Q Wass. 1 Pfrdkr.	= 0,0169	0,0137	0,0125
E in Pfrdkr. 1 Pfd. Kohle	= 3,99	4,92	5,37
E in Pfrdkr. 1 Cbf. Wasser	= 59,29	73,21	79,84.

Diese Resultate zeigen, daß es am vortheilhaftesten ist, $\frac{l'}{l} = 0{,}34$, $\frac{l''}{l} = 0{,}65$, das Gegengewicht = 2,99 und endlich die Totallast = 5,29 Pfd. für den Quadratzoll der Kolbenfläche zu nehmen; denn wenn man verschiedene andere Werthe der Expansion annimmt und die Rechnung wiederholt, so erhält man folgende Nutzeffecte:

$\frac{l'}{l}$ = 0,45	E Max. = 2,074650	
0,35	2104800	
0,34	2107700	absol. Max.
0,33	2103800	

Der größte Nutzeffect der Maschine wäre also $= 64$ Pfrdkr. und entspräche der Expansion $\frac{l'}{l} = 0{,}34$; aber da bei dieser Expansion die Bewegung des Kolbens sehr unregelmäßig sein würde und außerdem die zugehörige Last Veränderungen in der Maschine erforderlich machen könnte; so haben wir auch $\frac{l'}{l} = 0{,}60$ gesetzt, wodurch der Effect der Maschine von 64 auf 58,6 Pfrdkr. herabgesetzt wird; u. s. f.

Aus dem Vorhergehenden sieht man, welchen Gebrauch man von den bisher aufgestellten Formeln zur vortheilhaftesten Regulirung einer gegebenen Maschine machen kann, und wenn man erwägt, daß vier ursprünglich veränderliche Elemente darin vorkommen, nämlich: $\frac{l''}{l'}$, $\frac{l'}{l}$, Π und die Last r; so sieht man leicht ein, wie schwierig es in der Praxis sein muß, unter so vielen Combinationen dieser Elemente die heraus zu finden, welche für die Arbeit der Maschine am **vortheilhaftesten** ist.

Zwanzigster Abschnitt.

Ueber die von Girard erfundene neue Schiffschleuse mit Schwimmer.

§. 315. Der Zweck, welchen der Erfinder bei seinem Schleusensysteme hat, und welchen auch Andere, namentlich: Reynolds, Foulton, Mercodier, Solage, Bossut, Betancourt, Burdin ꝛc. zu erreichen gesucht haben, besteht hauptsächlich darin: bei dem Durchgange der Schiffe durch Canalschleusen möglichst wenig Wasser zu verbrauchen. — Die Einrichtung des neuen Schleusensystemes, welches vor allen frühern wesentliche Vortheile darbietet, ist folgende:

Neben die Schleusenkammer macht man einen hinreichend weiten und tiefen Behälter oder Brunnen, in welchen ein leerer allseitig verschlossener Schwimmer taucht, der einen prismatischen Kasten trägt, welcher so viel Wasser enthält, als zum Füllen der Schleusenkammer erforderlich ist. Wenn letztere noch nicht gefüllt ist, so steht das Niveau in dem schwimmenden Kasten etwa 5 Centimeter höher, als in der Schleusenkammer oder als das Niveau des Unterwassers. Durch 10 große stets mit Wasser gefüllte Heber kann das Wasser, sobald ihre Hähne geöffnet werden, aus dem schwimmenden Kasten in die Schleusenkammer fließen, wodurch der Kasten an Gewicht verliert und folglich um eine gewisse Größe steigt, welche von dem Verhältnisse der Oberfläche des Wassers in dem Kasten zu der des Wassers in dem Brunnen, worauf er schwimmt, abhängt, und man kann dieses Verhältniß leicht so berechnen, daß sich das Niveau in dem Kasten mit diesem wieder um so viel hebt, als das Niveau in der Schleusenkammer gestiegen ist, worin eben das Wesentlichste des Girard'schen Idee besteht.

Man läßt das Wasser so lange aus dem Kasten in die Schleusenkammer fließen, bis das Niveau in letzterer ungefähr 10 und das in dem Kasten folglich nur 5 Centimeter unter dem des Oberwassers liegt, worauf die Heber verschlossen und die obern Thore der Schleusenkammer geöffnet werden, so daß das Niveau in letzterer durch das hinzutretende Oberwasser noch um die fehlenden 10 Centimeter gehoben und das Schiff aus der Schleusenkammer auf das Oberwasser gebracht wird. Werden alsdann die obern Thore wieder verschlossen, so kann man leicht die umgekehrte Operation vornehmen, d. h. das Niveau in der Schleusenkammer sinken und ein von dem Oberwasser kommendes Schiff durch die untern Thore auf das Unterwasser gehen lassen, wenn man die Hähne der Heber wieder öffnet, so daß das Wasser, welches wegen des hinzugelassenen Oberwassers jetzt in der Schleusenkammer 5 Centimeter höher steht, als in dem schwimmenden Kasten, aus ersterer in letztern überströmt, in Folge dessen der Kasten sich wegen seines zunehmenden Gewichtes senkt und das Niveau in der Schleusenkammer ebenfalls, wogegen das Niveau in dem Brunnen steigt, folglich der Niveauunterschied in dem Kasten und Brunnen deßhalb abnimmt. Sind nun die Querschnitte des Wassers in der Schleusenkammer in dem Kasten und in dem Brunnen, so wie der des Schwimmers, so bestimmt, daß das Niveau in dem Kasten um dieselbe Größe sinkt, wie in der Schleusenkammer; so läßt man den Ausfluß so lange fortdauern, bis sich die Schleusenkammer so weit entleert hat, daß das Niveau in derselben nur noch 10 Centimeter über dem des Unterwassers liegt, wo alsdann die Hähne der Heber durch eine besondere Vorrichtung, oder durch den Schleusenwärter verschlossen werden, und wenn man endlich die 10 Centimeter aus der Schleusenkammer in das Unterwasser übergehen läßt; so befindet sich Alles wieder in dem ursprünglichen Zustande, weil alsdann das Niveau in dem Kasten 5 Centimeter über dem des Wassers in der Schleusenkammer liegt.

§. 316. Die später vorkommenden Rechnungen lehren jedoch, daß bei dieser Einrichtung die practische Ausführung Schwierigkeiten hat, wenn auch gerade nicht absolut unmöglich ist, weßhalb Girard seinem Schleusensysteme eine zweite weit bessere Einrichtung gegeben hat. Bei dieser besteht der Schwimmer aus einem prismatischen Kasten, welcher durch einen Zwischenboden in zwei Abtheilungen (Etagen) getheilt wird, wovon die untere mittelst eines umgekehrten Hebers, dessen senkrechter Schenkel durch ihren Boden und den des Brunnens geht, mit dem Unterwasser in Verbindung gesetzt werden kann, während die obere Abtheilung mittelst eines gleichen Hebers, dessen verticaler Schenkel durch eine die beiden Böden des Schwimmers verbindende Röhre hindurch geht, mit dem Oberwasser in Communication gebracht werden kann. — Beide Abtheilungen des Schwimmers stehen übrigens mit der äußern Luft in Verbindung, nämlich die obere direct und die untere mittelst einer durch die obere hindurch gehende Röhre. Der Schwimmer soll nach Girard aus Eisenblech von $0,^{m}003$ Dicke verfertigt und durch hohle gußeiserne Rippen verstärkt werden. Der Wasserstand in der untern Abtheilung wird jeden Augenblick durch einen darin befindlichen kleinen Schwimmer angezeigt, und die beiden Heber sind wieder mit Klappen versehen, um die Communication zwischen der obern Abtheilung und dem Oberwasser, so wie zwischen der untern Abtheilung und dem Unterwasser herstellen, oder unterbrechen zu können, welches mit Hülfe einer besonderen Vorrichtung durch den Schwimmer selbst am Ende seiner auf- und absteigenden Bewegung geschieht.

Wenn das Niveau des Ober- und Unterwassers als unveränderlich angenommen wird, so muß jede Abtheilung des Schwimmers eine Höhe haben, welche dem gegenseitigen Abstande dieser beiden Niveaus oder dem Schleusengefälle gleich ist, und einen horizontalen Querschnitt, welcher dem der Schleusenkammer und des freien Spielraumes in dem Brunnen zusammen genommen gleich ist.

Betrachtet man nun das System in dem Momente, wo die obern Schleusenthore verschlossen und die untern offen sind, um ein Schiff von unten in die Schleusenkammer treten zu lassen; so steht das Wasser in der Schleusenkammer und in dem Brunnen gleich hoch, weil beide unterhalb communiciren und der leere Kasten muß sich vermöge seines Gewichtes um eine gewisse Größe unter das Niveau in dem Brunnen einsenken, welche Girard = 0,^{m}05 annimmt, indem er die Dicke der Böden des Schwimmers unberücksichtigt läßt. Der obere und untere Boden des Schwimmers liegt also resp. ebenso tief unter dem Niveau des Ober- und Unterwassers, so daß dieses Wasser gleichzeitig resp. in die obere und untere Abtheilung des Schwimmers fließen kann, wenn man die untern Thore verschließt und die Klappen der Heber öffnet. Sind alsdann die Durchmesser dieser Heber einander gleich, so daß unter derselben Druckhöhe und in derselben Zeit gleiche Wassermengen ausfließen und abstrahirt man von der Dicke der Wände des Kastens rc. oder nimmt man an, daß die innern und äußern Querschnitte desselben denen der Schleusenkammer und des freien Spielraumes im Brunnen zusammen genommen gleich sind, und betrachtet endlich den Hergang aus statischem Gesichtspunkte, was wegen der langsamen Bewegung des Schwimmers erlaubt ist; so ist klar, daß sich der Kasten unter das äußere bewegliche Niveau um die Größe $2x$ eingesenkt hat, wenn sich in jeder Abtheilung desselben eine Wasserschicht von der Höhe X befindet. Da aber das Niveau nur so viel in dem Brunnen steigen kann, als sich der Kasten eingesenkt hat, und der Brunnen und die Schleusenkammer communicirende Behälter sind; so folgt, daß das Steigen des Niveaus in denselben nur $= x$ ist; d. h. gleich dem Steigen der Niveaus in den beiden Abtheilungen des Kastens. Diese letzten Niveaus behalten folglich während der Bewegung des Kastens stets dieselbe Lage gegen die Niveaus des Ober- und Unterwassers, wenn sich diese nicht ändern und wie vorausgesetzt wird, die Druckhöhen anfangs gleich waren.

Wenn letzteres nicht der Fall wäre, so würde vermöge der Einrichtung des Systemes selbst offenbar schnell eine Ausgleichung dieser ungleichen Druckhöhen stattfinden; denn die größere Druckhöhe würde anfangs in die entsprechende Abtheilung des Kastens eine größere Menge Wasser liefern, wodurch der ganze Kasten und folglich auch das Niveau in der anderen Abtheilung mehr sinken würde, als dieses letzte Niveau innerhalb in Folge des Zuflusses unter einer geringern Druckhöhe steigen konnte. Diese letzte Druckhöhe würde also zu- und die erste abnehmen, folglich bald eine völlige Ausgleichung eintreten.

Hiernach sieht man leicht ein, daß bei dem Auf- und Niedersteigen des Schwimmers dieser zweiten Einrichtung ganz dieselben Bedingungen erfüllt werden, wie bei der ersten Anordnung des Systemes, welche vorhin angegeben sind.

Wir wollen nun successive die **mathematischen Bedingungen** jedes dieser beiden Systeme näher untersuchen, uns aber hinsichtlich des erstern kürzer fassen, weil es unvollkommener ist, als das zweite.

Erstes System oder mit einfachem Schwimmer.

§ 317. Nach dem bereits oben Gesagten kommt es darauf an: die Dimensionen des Systems so zu bestimmen, daß der obere Kasten mittelst der Heber während seines Auf- und Niedersteigens unter einem **constanten Drucke** oder **Niveauunterschiede** nach Belieben gefüllt oder entleert werden kann. — Wir wollen annehmen, daß der Kasten anfangs leer und die Schleusenkammer voll ist, so daß das Niveau in letzterer 5 Centimeter **höher** liegt, als der Boden des erstern und das Wasser durch die Heber aus ersterer in letztern fließt.

Es bezeichne:

B den constanten horizontalen Querschnitt des Schwimmers, A den freien Spielraum in dem Brunnen, folglich $A + B$ den Querschnitt des letztern und A', B' resp. den Querschnitt der Schleusenkammer und des obern Wasserkastens. Ferner sei in einem beliebigen Augenblicke der niedersteigenden Bewegung des Schwimmapparates:

v die Größe, um welche das Niveau in der Schleusenkammer unter seine anfängliche Lage **gesunken** ist,

x die Größe, um welche das Niveau in dem schwimmenden Kasten **gestiegen** ist oder die Höhe der Wasserschicht in dem Kasten,

y die Größe, um welche sich das ganze Schwimmersystem in Folge der Druckhöhe x **gesenkt** hat,

z die Größe, um welche das äußere Niveau in dem Brunnen gleichzeitig **gestiegen** ist,

h die Größe, um welche das veränderliche Niveau in der Schleusenkammer **höher** liegt, als das entsprechende Niveau in dem schwimmenden Kasten, d. h. die Druckhöhe, welche die Bewegung des Wassers in den Hebern bewirkt,

h_0 sei der willkürliche **anfängliche** Werth von h,

P_0 das **anfängliche** Gewicht des ganzen schwimmenden Apparates, d. h. ohne die Wasserschicht von der veränderlichen Höhe x,

$y_0 = \dfrac{P_0}{\Pi B}$ die Größe, um welche sich der **leere** Schwimmapparat unter das Niveau in dem Brunnen einsenkt, wo $\Pi = 1000$ Kilgr. das Gewicht von 1 Cubikmeter Wasser bezeichnet;

so ist zum hydrostatischen Gleichgewichte des Schwimmersystems erforderlich, daß das Totalgewicht desselben:

$$\Pi B'x + P_0 = \Pi B'x + \Pi B y_0$$

dem **Gewichte**:

$$\Pi B\,(y_0 + y + z)$$

des von demselben verdrängten Volumen Wassers stets gleich ist. Man hat daher die Gleichung:

$$B'x = B(y + z).$$

Da sich ferner der Boden des Schwimmers um die Größe y gesenkt hat, so hat derselbe abwärts ein Volumen Wasser $= B y$ verdrängt, wodurch das äußere Niveau in dem Brunnen um die Größe 2 gestiegen ist, und man hat folglich die zweite Gleichung:

$$By = Az.$$

Endlich hat der obere Kasten durch die Heber aus der Schleusenkammer ein Volumen Wasser $= B'x$ erhalten, wodurch das Niveau in letzterer um die Größe v gesunken ist, und mithin hat man die dritte Gleichung:

$$B'x = A'v.$$

Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich durch leichte Eliminationen:

$$(a) \quad x = \frac{A'}{B'} v, \quad y = \frac{B'A}{B\,(B + A)} x = \frac{AA'}{B\,(B + A)} v,$$

$$z = \frac{B'}{B + A} x = \frac{A'}{B + A} v.$$

Da sich der ganze Schwimmapparat um die Größe y gesenkt hat, während das Niveau in dem obern Kasten um die Höhe x gestiegen ist, so ist das absolute Senken dieses Niveaus:

$$y - x = \frac{AA'}{B\,(B + A)} v - \frac{A'}{B'} v$$

und dasselbe liegt folglich um $h_0 + y - x$ unter dem ursprünglichen Niveau in der Schleusenkammer. Dieses letzte Niveau ist aber in dem betrachteten Augenblicke nach der Voraussetzung um die Größe v gesunken, und folglich ist $h_0 + y - x - v$ der Niveauhöhenunterschied h in dem Kasten und der Schleusenkammer oder die Druckhöhe, welche die Bewegung des Wassers in den Hebern aus der Schleusenkammer nach dem Kasten bewirkt. Man hat also die Gleichung:

$$h = h_0 + y - x - v = h_0 + \left(\frac{AA'}{B\,(B + A)} - \frac{A'}{B'} - I\right) v.$$

Die Größe h bleibt also in allen Lagen des Schwimmersystems constant und $= h_0$, wenn man die Bedingungsgleichung hat:

$$\frac{AA'}{B\,(B + A)} - \frac{A'}{B'} - 1 = 0,$$

welcher auf unendlich viele verschiedene Weisen genügt werden kann, wenn man für die darin vorkommenden Größen schickliche Werthe annimmt. —

Wenn namentlich die Größen von A, B und A' als *a priori* gegeben angenommen werden, so ergibt sich aus der letzten Bedingungsgleichung die Größe des Querschnittes B' des schwimmenden Kastens:

$$B' = \frac{A'B\,(B + A)}{AA' - B\,(B + A)}.$$

Allein man sieht leicht ein, daß die Annahme der Größen A, B und A' nicht ganz willkürlich ist, sondern von Local- und Oekonomieverhältnissen abhängt, welche bei jeder Anlage wohl berücksichtigt werden müssen. — Hauptsächlich müssen die Querschnitte des Schwimmers und obern Kastens, so wie ihre Höhen und die Dimensionen des Brunnens so klein als möglich sein. — Bezeichnet v den Endwerth des Sinkens v des Niveaus in der Schleusenkammer, welcher nach Girard's Annahme das ganze Schleusengefälle H nur um die sehr kleine Größe $2\,h_0$ übersteigen darf, welche hier unbeachtet bleiben kann; so findet man leicht, wenn x_1, y_1, z_1 die v_1 entsprechenden Werthe von x, y, z bezeichnen und man die Gleichungen (a) berücksichtigt:

1) für die kleinste Höhe des Schwimmers oder Tauchers:

$$y_0 + y_1 + z_1 = \frac{P_0}{\Pi B} + \frac{AA'}{B(B+A)} v_1 + \frac{A'}{B+A} v_1 = \frac{P_0}{\Pi B} + \frac{A'}{B} v_1,$$

2) für die kleinste Höhe des ganzen Schwimmapparats:

$$y_0 + y_1 + z_1 + x_1 = \frac{P_0}{\Pi B} + \frac{A'}{B} v_1 + \frac{A'}{B'} v_1,$$

wo x_1 offenbar die kleinste Höhe des obern Kastens ist, und

3) für die kleinste Tiefe des Brunnens von dem Niveau des Oberwassers an gezählt, wegen der Gleichung (b)

$$y_0 + y_1 + z_1 + x_1 + v_1 = \frac{P_0}{\Pi B} + \frac{A'}{B} v_1 + \frac{A'}{B'} v_1 + v_1$$

$$= \frac{P_0}{\Pi B} + \frac{A'(B+2A)}{B(B+A)} v_1.$$

Diesen Ausdrücken gemäß muß man also im Allgemeinen die Querschnitte B und B' möglichst groß und den freien Spielraum A dagegen möglichst klein nehmen, um die Höhe des Schwimmapparates und die Tiefe des Brunnens so viel als möglich zu vermindern. Allein man darf dabei nicht vergessen, daß die Größen A, B, A' und B' durch die Bedingungsgleichung (b) mit einander verbunden sind und überhaupt gewisse Grenzen nicht überschreiten können. — Eine nähere Untersuchung zeigt, daß die Tiefe des Brunnens im günstigsten Falle nicht viel kleiner als $4v$, oder $4H$, d. h. als das 4fache Schleusengefälle werden kann. — Dieses stimmt auch mit Girard's Annahme überein, indem er setzt:

$$A' = \frac{4}{5} B' = \frac{12}{5} B = \frac{4}{5} A, \quad B + A = \frac{4}{5} A',$$

welche Werthe in der That der Gleichung (b) genügen und die kleinste Tiefe des Brunnens $= \frac{1}{5}(12 + 4 + 5)\, v_1 = \frac{21}{5} v_1 > 4\,H$ geben.

Diese Dimensionen sind offenbar für die practische Ausführung viel zu groß und zugleich ist es sehr unzweckmäßig, daß der Brunnen isolirt ist und nicht mit dem fließenden Wasser in Verbindung steht, so daß sich sein Wasser erneuern kann, und nicht verdirbt. Girard kam deßhalb zunächst auf die glückliche Idee, den Brunnen durch einen unteren Canal mit der Schleusenkammer in Verbindung zu bringen, wie bei Betancourt's System und man überzeugt sich auch leicht, daß man alsdann den Bedingungen des Gleichgewichtes genügen kann, und daß man zugleich den wesentlichen Vortheil erreicht: die Höhe des Schwimmapparates und folglich die Tiefe des Brunnens vermindern zu können, wenn man den Querschnitten B und B' schickliche Werthe gibt. Girard nahm anfangs $B = A$, wo A jetzt den Querschnitt der Schleusenkammer mit Einschluß des freien Spielraumes im Brunnen bezeichnet, und $B' = 2B = 2A$; aber er sah sogleich ein, daß, wenn das Wasser für den Kasten nun von dem Oberwasser, statt aus der Schleusenkammer genommen würde, dieser Kasten nur eine Höhe $= H$ oder gleich dem Schleusengefälle und der untere Schwimmer oder Taucher nur eine Höhe $= 2H$ zu haben brauche, um das Niveau in der Schleusenkammer abwechselnd steigen und fallen zu lassen, indem die Druckhöhe h, welche das Wasser jetzt durch drei Heber treibt, die weit genug sind, damit die Geschwindigkeit gering ist, doch constant bleibt, weil das Niveau des Oberwassers als unveränderlich angesehen werden kann. Auch dieses ergibt sich aus den obigen Gleichungen (a) und (b), wenn man darin $A' = \infty$, $v = 0$, $B = A$ setzt, und bemerkt, daß z_1 jetzt das ganze Steigen, oder Fallen des Niveaus in der Schleusenkammer bezeichnet, deren Querschnitt mit Einschluß des freien Spielraums in dem Brunnen $= A$ ist. Denn man erhält alsdann:

$$x = y = z \text{ und } B' = 2B = 2A,$$

woraus sich für die kleinste Höhe des Tauchers, des obern Kastens und für die kleinste Tiefe des Brunnens resp. ergibt:

$$y_0 + y_1 + z_1 = \frac{P_0}{\Pi B} + 2z_1,$$

$$x_1 = z_1, \quad y_0 + y_1 + z_1 + x_1 = \frac{P_0}{\Pi B} + 3z_1,$$

wo z_1 sehr wenig von dem ganzen Schleusengefälle H verschieden ist.

Da auch dieses System noch den Nachtheil hat, daß die Tiefe des Brunnens, so wie der Querschnitt des obern Kastens sehr beträchtlich sein müssen; so kam Girard endlich auf das zweite weiter oben beschriebene System mit einem Schwimmer mit zwei Abtheilungen oder Etagen, welche ihr Wasser resp. von dem Ober- und Unterwasser bekommen, und welches wir jetzt näher untersuchen wollen.

Zweites System mit einem Schwimmer mit zwei Abtheilungen und einer oder mehreren Schleusenkammern.

§. 318. Nach dem weiter oben Gesagten besteht bei diesem zweiten Systeme der Schwimmer in dem Brunnen aus zwei Abtheilungen, wovon die obere mit dem Behälter (Canale) des Oberwassers und die untere mit dem des Unterwassers in Verbindung gesetzt werden kann. — Diese beiden äußern Behälter oder Kammern müssen vertical ausgekleidet sein, wenigstens innerhalb der Grenzen ihrer Niveauschwankungen, und ihre Dimensionen müssen mit denen der mittlern oder Hauptschleusenkammer in einem gehörigen Verhältnisse stehen, so daß zwischen den Niveauveränderungen in ihnen und dem Auf- und Niedersteigen des Schwimmers das gehörige Verhältniß stattfindet.

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß der Schwimmer anfangs ganz, oder fast leer ist und frei auf der Oberfläche des Wassers im Brunnen schwimmt, welche mit der in der mittlern Kammer gleich hoch liegt, daß ein Schiff von dem Unterwasser in die mittlere Schleusenkammer gelassen und ihre Thore wieder verschlossen seien; so kommt es darauf an: die Dimensionen der beiden Heber und des Schwimmers im Verhältniß zu denen der verschiedenen Behälter so zu bestimmen, daß die bewegenden Druckhöhen oder die Niveauunterschiede in der obern Kammer und der obern Abtheilung des Schwimmers, so wie in der untern Kammer und in der untern Abtheilung kurze Zeit nach der Oeffnung der Klappen der Heber nahezu constant, und folglich die Bewegung gleichförmig wird, was wir bei dem gegenwärtigen unvollkommenen Zustande der Hydrodynamik als ein Erfahrungsfaktum annehmen, weil sich die nach der Oeffnung der Klappen sofort eintretende veränderliche Bewegung keiner strengen Rechnung würde unterwerfen lassen.

Die Zeit, nach Verlauf welcher die Bewegung nahezu gleichförmig wird, beträgt in dem vorliegenden Falle ungefähr 20 bis 30 Minuten, wenn die Behälter gegen ihre Länge nicht zu schmal sind, so daß das Niveau stets eben und horizontal bleibt, indem es steigt, oder sinkt.

Nach den bekannten Principien der Hydraulik, welche hier mit der Erfahrung übereinstimmen, kann man in den Gleichungen für den Ausfluß des Wassers bei veränderlichem Niveau auch die Glieder vernachlässigen, welche von den Veränderungen der Geschwindigkeit in den verschiedenen Regionen der Behälter herrühren, wenn die Querschnitte der letztern gegen die der Ausflußröhren und Mündungen sehr groß sind, wie es hier der Fall ist.

Endlich würde es ganz überflüssig sein, wenn wir bei der gegenwärtigen Untersuchung gleich anfangs den Einfluß der lebendigen Kraft des schwimmenden Kastens und der Flüssigkeitsmassen, welche unmittelbar an seiner Bewegung theilnehmen, so wie die Reibungen und übrigen Widerstände, welche seiner Bewegung entgegenwirken, in Betracht ziehen wollten, weil diese Bewegung sehr langsam vor sich geht. — Später werden wir, wenn es nöthig ist, auf einige dieser Punkte wieder zurückkommen, um unsere ersten Voraussetzungen zu rechtfertigen oder unsere ersten Resultate zu verallgemeinern. — Ferner setzen wir voraus, daß sich der Leser mit Hülfe der Figuren, wovon später eine nähere Beschreibung mitgetheilt werden wird, eine genaue Kenntniß von der Einrichtung des Apparates verschafft hat; und da endlich die Umstände und die Gleichungen für die auf- und niedersteigende Bewegung des Kastens dieselben sind, so werden wir nur die letztern näher betrachten.

Bedingungen der Gleichförmigkeit der Bewegung des Apparates.

§. 319. Es bezeichne:

B den äußern horizontalen Querschnitt des Schwimmers, nach Abzug der Durchschnitte seines Bodens mit den Hebern oder Röhren.

B', B'' die innern Querschnitte der untern und obern Abtheilung des Schwimmers nach Abzug derselben Größen, so wie der Querschnitte der Stützen des Zwischenbodens;

A', A'' die Querschnitte der untern und obern Kammer, mit Einschluß der horizontalen Querschnitte der Wasserleitungen zu den Hebern;

A den Querschnitt der mittlern Schleusenkammer mit Einschluß des freien Spielraumes δB im Brunnen, welcher mit dieser Kammer durch einen unterirdischen weiten Canal communicirt, der nicht in Betracht kommt; folglich

$A = A - \delta B$ den Querschnitt dieser Schleusenkammer selbst. Der Coefficient δ ist wenigstens $= 0{,}06$, wenn $B = 200$ Quadratmeter, und $= 0{,}1$, wenn $B = 100$ Quadratmeter ist;

x', x'' die resp. Höhen, um welche die Niveaus in der untern und obern Abtheilung des Schwimmers in einem beliebigen Augenblicke seines Niedersteigers gestiegen sind;

z', z'' die Höhen, um welche die Niveaus in der untern und obern Schleusenkammer gesunken sind;

z die Höhe, um welche das Niveau in der mittlern Schleusenkammer und in dem Brunnen gestiegen ist;

v', v, v'' die resp. Abstände dieser Niveaus von ihrer höchsten, oder tiefsten Lage, welche sie annehmen müssen, wenn die untern Thore von A' und A'' geöffnet werden, um ein neues Schiff in die Kammer A' und ein bereits in A befindliches Schiff in A'' übergehen zu lassen;

$H' = z' + v'$, $H = z + v$, $H'' = z'' + v''$ die resp. Gefälle der Kammern A' A, A'', d. h. die größten Niveauveränderungen zwischen dem Augenblicke der Oeffnung der Heberklappen und dem des darauf folgenden Verschlusses der Schleusenthore;

H das gesammte Schleusengefälle;

y das absolute Sinken des Kastens in Folge des Gewichtes der Wasserschichten x', x'' und des Steigens z des äußern Niveaus;

h', h'' die Druckhöhen, welche in einem beliebigen Augenblicke das Ueberströmen des Wassers aus den Schleusenkammern A', A'' in die Abtheilungen B', B'' des Schwimmers bewirken;

h'_1, h''_1 die constanten Werthe, welche diese Druckhöhen erreichen, wenn die Bewegung nahezu gleichförmig geworden ist;

V_1 die dieser Bewegung entsprechende Geschwindigkeit des Schwimmers;

y_0 die Tiefe, um welche derselbe anfangs sich unter das Niveau des Brunnens einsenkt;

$P_0 = \Pi B y_0$ das Totalgewicht des Schwimmers mit Einschluß des anfangs etwa darin enthaltenen Wassers, wovon das Gewicht des Kubikmeters $= \Pi = 1000$ Kilgr. ist;

h'_0, h''_0 die anfänglichen Werthe von h', h'';

y_1, x'_1, x''_1, z'_1, z_1, z''_1, v'_1, v_1, v''_1 die dem gleichzeitigen Verschlusse der Heberklappen oder dem Ende des Niedersteigens des Schwimmers entsprechenden Werthe von y, x', x'', z', z, z'', v', v, v'';

so hat man für einen beliebigen Augenblick der Bewegung nach den gemachten Voraussetzungen:

1) wegen der beständigen Gleichheit der Wasservolumen, welche die obere und untere Abtheilung des Kastens erhalten und die obere und untere Schleusenkammer verlieren:

$$(c) \qquad B'x' = A'z', \quad B''x'' = A''z'';$$

2) nach der Bedingung des hydrostatischen Gleichgewichtes des Schwimmers, und wenn man die lebendigen Kräfte, die Reibungen und die übrigen Widerstände unbeachtet läßt:

$$(d) \qquad P_0 + \Pi\,(B'x' + B''x'') = \Pi B\,(y_0 + y + z);$$

oder wegen der Relation $P_0 = \Pi B y_0$ einfacher:

$$(e) \qquad B'x' + B''x'' = B\,(y + z);$$

3) weil das Volumenwasser, welches die mittlere Schleusenkammer erhält, während der Schwimmer um y herabsinkt, dem von dem Schwimmer in dem Brunnen verdrängten Volumen gleich ist:

$$(f) \qquad By = Az;$$

4) für die resp. Druckhöhen, welche das Wasser durch die Heber treiben:

$$(g) \qquad \begin{aligned} h' &= h_0 + y - x' - z', \\ h'' &= h''_0 + y - x'' - z''. \end{aligned}$$

Wenn man in diese letzten Gleichungen für z', z'' ihre Werthe als Funktionen von x', x'' setzt, welche sich aus den Gleichungen (c) ergeben; so geben sie:

$$(h) \qquad \begin{aligned} x' &= \frac{A'}{A' + B'}\,(y + h'_0 - h'), \\ x'' &= \frac{A''}{A'' + B''}\,(y + h''_0 - h''). \end{aligned}$$

und wenn man diese letzten Werthe, so wie den von $z = \frac{B}{A}\,y$ in die Gleichung (e) substituirt; so verwandelt sich diese in folgende:

$$\frac{A'B'}{A' + B'}(h'_0 - h') + \frac{A''B''}{A'' + B''}\,(h''_0 - h'')$$
$$= \left[\frac{B\,(B + A)}{A} - \frac{A'B'}{A' + B'} - \frac{A''B''}{A'' + B''}\right] y.$$

Da aber die Bewegung nach einer sehr kurzen Zeit, welche unbeachtet bleibt, gleichförmig werden soll, so muß der erste Theil dieser letzten Gleichung schnell gegen eine constante Größe convergiren, und da der zweite Theil dagegen mit y fortwährend zunimmt; so kann diese Bedingung im Allgemeinen nur insofern erfüllt werden; als man hat:

$$(i) \qquad \frac{A'B'}{A' + B'} + \frac{B''B''}{A'' + B''} = \frac{B\,(B + A)}{A};$$

wodurch, wie man später sehen wird, die innern und äußern Querschnitte des Kastens als Funktionen von A, A', A'' bestimmt werden.

Man hat folglich auch zwischen den **constant** und resp. gleich h'_1, h''_1 gewordenen Druckhöhen h', h'' die Relation:

$$\frac{A'B'}{A'+B'}(h'_0-h'_1)+\frac{A''B''}{A''+B''}(h''_0-h''_1)=o,$$

oder wenn man setzt:

$$(j)\qquad \frac{A''B''(A'+B')}{A'B'(A''+B'')}=k,\ \ h'_1-h'_0+k(h''_1-h''_0)=o.$$

§. 320. Diese verschiedenen Bedingungen sind jedoch zur Sicherung der **gleichförmigen** Bewegung des Kastens noch nicht hinreichend, und es müssen auch die Durchmesser der Heber, die Querschnitte der Zuleitungen und die den Druckhöhen h', h'' entsprechenden Ausflußmengen mit den Querschnitten der Behälter und des Kastens in dem gehörigen Verhältniß stehen. Es bezeichnen daher:

L', L'' die Längen, D', D'' die Durchmesser und S', S'' die Querschnitte der Heber;

U', U'' die Geschwindigkeiten des Wassers in denselben, unter den resp. Druckhöhen h', h'' und U'_1, U''_1 die den constanten Enddruckhöhen h'_1, h''_1 entsprechenden Geschwindigkeiten;

L', L'' die Längen, S', S'' die Querschnitte, P', P'' die **benetzten Umfänge** und $D'=\frac{4S'}{P'}$, $D''=\frac{4S''}{P''}$ die **mittlern** Durchmesser der Wasserleitungscanäle nach den resp. Hebern;

$Q'_1=S'U'_1$, $Q''_1=S''U''_1$, die Wassermengen, welche die Heber bei den gleichförmigen Geschwindigkeiten U'_1, U''_1 in der Secunde liefern;

μ', μ'' die Contractionscoefficienten für den Eintritt des Wassers in die Heber;

m', m'' diese Coefficienten für die Wasserleitungen zu den Hebern;

$\alpha=0{,}00017$, $\beta=0{,}00342$ die Widerstandscoefficienten für das sich in den Hebern bewegende Wasser, welche nach **Prony** ohne merklichen Fehler für Canäle und Röhren gleichanwendbar sind;

r', r'' die Krümmungshalbmesser der Heberkrümmungen:

$c'=\pi r'$, $c''=\pi r''$ die Längen dieser letztern, so daß nach den Versuchen von **Dubuat** die Verluste an lebendiger Kraft wegen dieser Krümmungen für die Wassereinheit der Ausflußmenge ausgedrückt werden durch:

$$(0{,}0039+0{,}0186r')\frac{c'U'^2_1}{r'^2}$$

$$(0{,}0039+0{,}0186r'')\frac{c''U''^2_1}{r''^2}.$$

Alsdann werden die Wassermengen, welche die Abtheilungen B', B'' des Kastens durch die Heber und Zuleitungscanäle in dem Zeitelemente dt erhalten, durch $S'U'dt$, $S''U''dt$ ausgedrückt, und da sie den Zunahmen $B'dx'$, $B''dx''$ des Wassers in diesen Abtheilungen gleich sein müssen; so hat man:

$$S'U'=B'\frac{dx'}{dt},\ \ S''U''=B''\frac{dx''}{dt}.$$

Werden ferner die Ausdrücke (g) von h', h'' in Beziehung auf die Zeit A differentiirt, so hat man, sobald die Bewegung gleichförmig oder die Druckhöhen constant geworden sind:

$$\frac{dh'}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{A' + B'}{A'} \frac{dx'}{dt} = o,$$

$$\frac{dh''}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{A'' + B''}{A''} \frac{dx''}{dt} = o,$$

und da $\frac{dy}{dt}$ nichts anders, als die constante Endgeschwindigkeit V, ist, welche der schwimmende Kasten gleich nach den ersten Momenten annimmt; so hat man die Gleichungen:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{A'}{A' + B'} \frac{dy}{dt} = \frac{A'}{A' + B'} V_1,$$

$$\frac{dx''}{dt} = \frac{A''}{A'' + B''} \frac{dy}{dt} = \frac{A''}{A'' + B''} V_1,$$

$$(k) \qquad S'U'_1 = \frac{B'A'}{A' + B'} V_1 = Q'_1,$$

$$S''U''_1 = \frac{B''A''}{A'' + B''} V_1 = Q''_1,$$

wovon die beiden letzten die Wassermengen geben, welche die Heber in der Secunde liefern, sobald die Endgeschwindigkeit V_1 des Schwimmers gegeben ist.

§. 321. Ferner hat man nach bekannten hydraulischen Lehren für die Bedingungen der Gleichförmigkeit der Bewegung des Wassers in den Hebern und in den Zuleitungen, wenn man die Verluste an lebendiger Kraft und die verschiedenen Widerstände in Betracht zieht:

$$2gh'_1 = \frac{8L'}{D'}\left(\alpha U'_1 + \beta U'^2_1\right) + \frac{8L'}{D'}\left(\alpha \frac{S'}{S'} U'_1 + \beta \frac{S'^2}{S'^2} U'^2_1\right)$$

$$+ (0{,}0039 + 0{,}0186 r') \frac{c'}{r'^2} U'^2_1$$

$$+ \left[1 + \left(\frac{1}{\mu'} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2 \frac{S'^2}{S'^2}\right] U'^2_1,$$

$$2gh''_1 = \frac{8L''}{D''}\left(\alpha U''_1 + \beta U''^2_1\right) + \frac{8L''}{D''}\left(\alpha \frac{S''}{S''} U''_1 + \beta \frac{S''^2}{S''^2} U''^2_1\right)$$

$$+ (0{,}0039 + 0{,}0186 r'') \frac{c''}{r''^2} U''^2_1$$

$$+ \left[1 + \left(\frac{1}{\mu''} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{m''} - 1\right)^2 \frac{S''^2}{S''^2}\right] U''^2_1,$$

wobei jedoch die lebendigen Kräfte der Flüssigkeit in den Schleusenkammern A', A'', so wie in den Abtheilungen B' B'' des Schwimmers, deren Querschnitte wenigstens zehnmal größer sind, als die Querschnitte

S', S'' der Heber, unberücksichtigt gelassen sind, weil die dadurch bewirkten Veränderungen des Gefälles gegen die bewegenden Druckhöhen h_1', h''_1 sehr gering sind. —

Wir haben in den letzten Gleichungen die Glieder mit μ', μ'' m', m'' beibehalten, weil sie einen merklichen Einfluß haben könnten, wenn man an den Enden der Heber und den Mündungen der Leitungscanäle die Contraction nicht hat beseitigen können; jedoch werden die entsprechenden Verluste an Gefälle vermieden, wenn man diesen Enden die weiter unten näher angegebene Form gibt; aber an den Mündungen der Zuleitungscanäle findet, selbst wenn man denselben die gehörige Form gegeben hat, eine obere Contraction statt, deren Coefficient m' oder m'' kaum 0,67 überschreitet und welche an der Oberfläche des Wassers eine kleine Senkung bewirkt, die nach Dubuat erforderlich ist, um der Flüssigkeit die Geschwindigkeit zu ertheilen, welche sie bei dem Eintritte in den Canal haben muß. Um den Einfluß dieser Contraction, so wie den der Reibung des Wassers an den Canalwänden so viel als möglich zu vermindern, muß man die Längen der Canäle so klein und ihre Querschnitte S', S'' dagegen so groß machen, als es die Localverhältnisse nur immer gestatten; ihre Breite muß wenigstens doppelt so groß, als ihre Tiefe und diese wenig von der der Kammern oder Behälter verschieden sein. — Diese Bemerkungen sind hier von besonderer Wichtigkeit, weil die Druckhöhen, welche die der Bewegung des Kastens entgegenstehenden Widerstände überwinden müssen, sehr klein sind.

§. 322. Wenn man in die letzten Gleichungen, die aus den Gleichungen (k) abgeleiteten Werthe von U'_1, U''_1 setzt, so verwandeln sie sich wegen

$$S' = \tfrac{1}{4}\,\pi D'^2,\ S'' = \tfrac{1}{4}\,\pi D''^2$$

in folgende:

$$(l)\quad h'_1 = \frac{4a'}{\pi g}\,\frac{Q'^2_1}{D'^2} + \frac{8b'}{\pi' g}\,\frac{Q'^2}{D'^4},\quad h''_1 = \frac{4a''}{\pi g}\,\frac{Q''_1}{D''^2} + \frac{8b''}{\pi' g}\,\frac{Q''_{12}}{D''^4},$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$4\alpha\left(\frac{L'}{D'} + \frac{L'S'}{D'S'}\right) = a',$$

$$8\beta\left(\frac{L'}{D'} + \frac{L'S'^2}{D'S'^2}\right) + 1 + \left(\frac{1}{\mu'} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2 \frac{S'^2}{S'^2}$$

$$+ (0{,}0039 + 0{,}0186 r')\frac{c'}{r'^2} = b',$$

$$4\alpha\left(\frac{L''}{D''} + \frac{L'S''}{D''S''}\right) = a'',$$

$$8\beta\left(\frac{L''}{D''} + \frac{L''S''^2}{D''S''^2}\right) + 1 + \left(\frac{1}{\mu''} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{m''} - 1\right)^2 \frac{S''^2}{S''^2}$$

$$+ (0{,}0039 + 0{,}0186 r'')\frac{c''}{r''^2} = b''.$$

Man kann also die constanten oder Enddruckhöhen h'_1, h''_1 leicht berechnen, wenn der Apparat schon ganz construirt und die gleichförmige Geschwindigkeit V_1 des Schwimmers gegeben ist, von welcher die Größen, Q'_1, Q_1'' vermöge der Gleichungen (k) unmittelbar abhängen.

Die Verbindung derselben Gleichungen mit der Gleichung (j), welche auch von der Bedingung der Gleichförmigkeit der Bewegung des Schwimmers abhängt, gibt ebenfalls das Mittel zur Berechnung der constanten Druckhöhen h'_1, h''_1 an die Hand, wenn nicht der Werth von V_1, sondern der von h'_0 und h''_0 gegeben ist, wofern jedoch die Größen von B, B', B'' der Bedingung (i) genügen. Denn wenn man Q'_1, Q''_1, V_1 und h'_1, oder h''_1 zwischen den 5 Gleichungen (j), (k) und (l) eliminirt, so erhält man offenbar zwei neue Gleichungen, vermittelst welcher man h'_1 und h''_1 unmittelbar als Funktionen von h''_0 und h''_0 berechnen kann. Da aber diese Eliminationen beschwerlich sind, und zu sehr complicirten Resultaten führen, so ist es zweckmäßiger, das folgende einfachere Verfahren anzuwenden:

Zuerst substituirt man die Werthe (k) von Q'_1 und Q''_1 in die Gleichungen (l), wodurch man die Werthe:

$$(m)\begin{cases} h'_1 = \dfrac{4a'A'B'}{g\pi D'^2(A'+B')}\,V_1 + \dfrac{8b'A'^2B'^2}{g\pi^2 D'^4(A'+B')^2}\,V_1^2, \\[2ex] h''_1 = \dfrac{4a''A''B''}{g\pi D''^2(A''+B'')}\,V_1 + \dfrac{8b''A''^2B''^2}{g\pi^2 D''^4(A''+B'')^2}\,V_1^2. \end{cases}$$

erhält, und wenn man diese Werthe von h'_1, h''_1 in die Gleichung (j) substituirt; so erhält man die Gleichung des zweiten Grades:

$$(n)\qquad h'_0 + kh''_0 = \frac{4}{g\pi}\left[\frac{a'A'B'}{(A'+B')D'^2} + \frac{ka''A''B''}{(A''+B'')D''^2}\right]V_1 + \frac{8}{g\pi^2}\left[\frac{b'A'^2B'^2}{(A'+B')^2D'^4} + \frac{kb''A''^2B''^2}{(A''+B'')^2D''^4}\right]V^2_1$$

woraus sich die gleichförmige Geschwindigkeit V_1 des Schwimmers unmittelbar als Funktion von h'_0 hnd h''_0 ergibt.

Ist der Werth von V_1 gefunden, so ergeben sich die Werthe von h'_1, h''_1 sofort aus den Gleichungen (m). Wenn also der Apparat schon construirt ist, so kann man alle Umstände der, gleich nach Oeffnung der Heberklappen eintretenden gleichförmigen Bewegung berechnen, sobald man die anfänglichen Druckhöhen h'_0, h''_0 kennt. Aber dasselbe gilt nicht in Beziehung auf die Enddruckhöhen h'_1, h''_1, weil sie nicht **beide** willkürlich angenommen werden können und auch die Werthe der anfänglichen Druckhöhen h'_0, h''_0 nicht einzeln geben können; sondern blos die Größe $h'_0 + kh''_0$, welche, wie man später sehen wird, dem Wasserverluste bei jeder Durchschleusung proportional ist.

§. **323**. Wenn der Apparat noch nicht construirt ist, so können umgekehrt die Gleichungen (l) zur directen Bestimmung der unbekannten Durchmesser D', D'' dienen, wenn man die Werthe von h'_0, h''_0 oder h'_1, h''_1 fixirt hat, wie man später sehen wird. Diese Gleichungen sind in Beziehung auf D', D'' vom 5. Grade, lassen sich aber leicht durch die Methode der successiven Substitutionen und nach Art der Gleichungen des 2. Grades auflösen.

Betrachtet man die Coefficienten a', a'', b', b'' zunächst als lauter bekannte Größen, so ergeben sich unmittelbar die Ausdrücke:

$$(o)\quad\begin{cases}\frac{1}{2}D'=\sqrt{\frac{Q'_1a'}{2\pi gh'_1}\sqrt{1+\sqrt{1+2gh'_1\frac{b'}{a'^2}}}},\\[1ex] \frac{1}{2}D''=\sqrt{\frac{Q''_1a''}{2\pi gh''_1}\sqrt{1+\sqrt{1+2gh''_1\frac{b''}{a''^2}}}};\end{cases}$$

welche man berechnet, indem man zuerst in a' und b' die Glieder mit α und β hinwegläßt oder $a'=o$, $a''=o$ setzt, wodurch man die etwas zu kleinen Näherungswerthe erhält:

$$(p)\quad\begin{cases}\frac{1}{2}D'=\sqrt{\frac{Q'_1}{\pi}\sqrt{\frac{b}{2gh'_1}}}=\sqrt[4]{\frac{Q'^2_1b'}{2gh'_1\pi^2}},\\[1ex] \frac{1}{2}D''=\sqrt{\frac{Q''_1}{\pi}\sqrt{\frac{b''}{2gh''_1}}}=\sqrt[4]{\frac{Q''^2_1b''}{2gh''_1\pi^2}};\end{cases}$$

in welchen man blos nimmt:

$$b'=1+\left(\frac{1}{\mu''}-1\right)^2+\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2\frac{S'^2}{S'^2}$$
$$+(0{,}0039+0{,}0186r')\frac{c'}{r'^2},$$
$$b''=1+\left(\frac{1}{\mu''}-1\right)^2+\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2\frac{S''^2}{S''^2}$$
$$+(0{,}0039+0{,}0186r'')\frac{c''}{r''^2},$$

so daß man mehr genäherte Werthe von a', a'', b', b'' und folglich von D', D'' berechnen kann. Diese Werthe von D', D'' sind etwas zu groß und für die gewöhnlichen Anwendungen genügend; aber man kann erforderlichen Falls die Annäherung noch weiter treiben. Im Allgemeinen es ist sogar hinreichend, D' und D'' nach den Näherungsformeln (p) zu berechnen, wofern man bei der zweiten Substitution für b' und b'' die Werthe setzt, welche sie annehmen, wenn man das Glied mit β in Betracht zieht, welches $=0{,}0036$ gesetzt werden muß, um den kleinen Fehler zu compensiren, der aus der Hinweglassung der Glieder mit α entspringt, und hier verhältnißmäßig immer sehr klein ist.

Bedingungen der Regelmäßigkeit und der Periodicität der Bewegung.

§. 324. Die Druckhöhen h'_1, h''_2, welche man nothwendig kennen muß, um die Durchmesser D', D'' der Heber für einen erst zu construirenden Apparat berechnen zu können, müssen nebst den Gesammt-hebungen und Senkungen des Wassers in den verschiedenen Behältern oder Kammern, gewissen Bedingungen genügen, welche sich auf die Beschaffenheit des Apparats, die Regelmäßigkeit und Periodicität der Bewegung beziehen, jetzt näher untersucht werden sollen und in dem allgemeinen Falle gekuppelter Schleusenkammern mit veränderlichen Niveaus ganz dem neusten Systeme Girard's mit einfachen Schleusenkammern und unbegrenzten obern und untern Behältern entsprechen.

Zu dem Zwecke wollen wir das System in dem Augenblicke betrachten, wo das Niveau in der mittlern Schleusenkammer A und in dem damit communicirenden Brunnen in Folge des Einsenkens des Schwimmers um die Höhe $z_1 = H - v_1$ gestiegen und die Niveaus in dem obern und untern Behälter A'', A' resp. um die entsprechenden Größen $z''_1 = H - v''_1$, $z'_1 = H - v'_1$ gesunken sind, und die untern Thore von A'' und A' geöffnet worden, um das Niveau in A'' und A, so wie das in A' und dem untern Canale gleich zu machen. Alsdann steigt das Niveau in A, und folglich auch der ganze Schwimmer um die Höhe v_1, die Kammer A gewinnt ein Wasservolumen $= (B + A)\, v_1$, während die Kammer A'' ein Volumenwasser $= A''v''_1$ verliert. Wegen der Regelmäßigkeit und Leichtigkeit der Handhabung des Apparates müssen diese Wasservolumen dem gleich sein, welches A'' bei jeder Operation oben gewinnt oder A' unten verliert, und endlich muß aus demselben Grunde das Sinken und Steigen des Schwimmers unter identischen, obgleich umgekehrten Verhältnissen erfolgen, was nothwendig der Fall ist, wenn die Einrichtung getroffen wird, daß durch das Steigen oder Sinken v_1 des Schwimmers, in Folge der Oeffnung der Thore, die anfänglichen Druckhöhen h'_0, h''_0 genau wieder dieselben werden.

Alsdann hat man die neuen Bedingungsgleichungen:

$$(q) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A'v'_1 = (B + A)v_1 = A''v''_1, \\ v_1 + v'_1 = h'_1 + h'_0, \quad v_1 + v''_1 = h''_1 + h''_0; \end{array} \right.$$

woraus unmittelbar folgt:

$$v'_1 = \frac{B + A}{B + A + A'}(h'_1 + h'_0),\; v_1 = \frac{A'(h'_1 + h'_0)}{B + A + A'} = \frac{A''(h''_1 + h''_0)}{B + A + A''},$$

$$v''_1 = \frac{B + A}{B + A + A''}(h''_1 + h''_0);$$

und mithin:

$$(r) \qquad \frac{h'_1 + h'_0}{h''_1 + h''_0} = \frac{A''(B + A + A')}{A'(B + A + A'')} = k_1, \text{ oder}$$

$$h'_1 + h'_0 = k_1\,(h''_1 + h''_0),$$

wo k_1 wie k eine unveränderliche Zahl ist, welche blos von den horizontalen Querschnitten der verschiedenen Behälter abhängt.

Durch diese letzte Gleichung und die Gleichung (j) sind die Enddruckhöhen h'_1, h''_1 mit den anfänglichen Druckhöhen h'_0, h''_0 verbunden, so daß die letzten bekannt sind, wenn man die ersten kennt, und umgekehrt. So ergibt sich z. B. aus diesen Gleichungen:

$$(s)\quad h'_1 = \frac{2kk_1 h''_0 + (k_1 - k) h'_0}{k_1 + k} \quad h''_1 = \frac{2h'_0 - (k_1 - k)\ h''_0}{k_1 + k},$$

woraus sich durch bloße Vertauschungen der Indices 1 und 0 die Werthe von h'_0, h''_0 als Funktionen von h'_1, h''_1 ergeben.

Wenn man die Werthe von h'_1, h''_1 in die von v'_1, v_1 v''_1 substituit, so erhält man:

$$v'_1 = 2i \frac{B+A}{A'} (h'_0 + kh'_0), \quad v_1 = 2i (h'_0 + kh''_0),$$

$$v''_1 = 2i \frac{B+A}{A''} (h'_0 + kh''_0),$$

wenn der Kürze wegen wieder gesetzt wird:

$$(t)\qquad \frac{A'k_1}{(B + A + A')(k_1 + k)} \text{ oder}$$

$$\frac{A'B'(B'' + A'')}{B'(B + A + A')(B'' + A'') + B''(B + A + A'')(B' + A')} = i.$$

Der während einer ganzen Periode, d. h. während eines Nieder- und Aufsteigens des Schwimmers stattfindende Wasserverlust wird also ausgedrückt durch:

$$A'v'_1 = A''v''_1 = (B + A) v_1 = 2i (B + A) (h'_0 + kh''_0).$$

Da vermöge der Gleichung (j) der Factor $h'_1 + kh''_1$ für den Factor $h'_0 + kh''_0$ gesetzt werden kann, so folgt, daß man, wenn der Apparat bereits hergestellt ist, diesen Verlust nicht vermindern kann, ohne gleichzeitig die Druckhöhen h'_0, h''_0 oder h'_1, h''_1 zu vermindern, welche auf die Geschwindigkeit oder Dauer der Bewegung des Schwimmers direct Einfluß haben (§. 322). Wäre dagegen der Apparat erst zu construiren, so könnte man die Durchmesser D', D'' der Heber immer so bestimmen, daß der Wasserverlust beliebig klein würde.

Denn bezeichnet q den kleinsten Wasserverlust, welcher stattfinden soll, so hat man die Bedingungsgleichung:

$$(u)\qquad 2i(A + B)(h'_0 + kh''_0) = 2i(A + B)(h'_1 + kh''_1) = q,$$

$$h'_1 + kh''_1 = \frac{q}{2i(A+B)},$$

und wenn man darin für h'_1, h''_1 ihre Werthe als Funktionen von D', D'', Q'_1, Q''_1 setzt; so ergibt sich:

$$(v)\quad \frac{q}{2i(A+B)} = \frac{4}{\pi g}\left(a' \frac{Q'_1}{D'^2} + ka'' \frac{Q'_1}{D''^2}\right) + \frac{8}{\pi^2 g}\left(b' \frac{Q'^2_1}{D'^4} + kb'' \frac{Q''^2_1}{D''^4}\right)$$

$$= \frac{4}{\pi g}\left[\frac{a'A'B'}{(A' + B')D'^2} + \frac{ka''A''B''}{(A'' + B'')D''^2}\right] V_1$$

$$+ \frac{8}{\pi^2 g}\left[\frac{b'A'^2B'^2}{(A' + B')^2 D'^4} + \frac{kb''A''^2B''^2}{(A'' + B'')^2 D''^4}\right] V_1^2.$$

Aus diesem Resultate sieht man, daß der Wasserverlust beliebig klein gemacht werden kann, wenn man die Durchmesser D', D'' der Heber groß genug, oder die sich auf die Zeiteinheit beziehenden Wassermengen Q'_1, Q''_1, folglich die mittlere Geschwindigkeit V_1, welche der Schwimmapparat annehmen soll, hinreichend klein annimmt.

Es werden jedoch hierdurch für D', D'' nur Grenzen bestimmt, welche nicht überschritten werden können. Um diese Grenzen zu erhalten, wenn Q'_1, Q''_1 oder V_1 gegeben sind, braucht man nur zu bemerken: daß die Gleichung (u) folgende Ungleichheiten enthält:

$$h'_1 \text{ oder } \frac{4a'Q'_1}{g\pi D'^2} + \frac{8b'Q'^2_1}{g\pi^2 D'^4} < \frac{q}{2i(A+A)},$$

$$h''_1 \text{ oder } \frac{4a''Q'_1}{g\pi D''^2} + \frac{8b''Q''^2_1}{g\pi^2 D''^4} < \frac{q}{2ik(A+B)};$$

woraus folgt, wenn man, wie für die Gleichungen (l) in §. 322. verfährt und die Glieder mit a', a'' vernachlässigt, welche den Widerstandscoefficienten α der Wände enthalten:

$$\tfrac{1}{2} D' > \sqrt[4]{\frac{ib'Q'^2_1(A+B)}{gq\pi^2}} = \sqrt{\frac{Q'_1}{\pi}} \sqrt[4]{\frac{ib'(A+B)}{gq}},$$

$$\tfrac{1}{2} D'' > \sqrt[4]{\frac{ikb''Q''^2_1(A+B)}{gq\pi^2}} = \sqrt{\frac{Q''_1}{\pi}} \sqrt[4]{\frac{ikb''(A+B)}{gq}}.$$

Ueber diese Grenzen hinaus könnte man offenbar einen der Durchmesser D', D'' beliebig annehmen, wenn der Schwimmer nicht irgend einer neuen Bedingung genügen müßte, vermöge welcher man die Druckhöhen h'_1, h''_1 direct berechnen könnte.

§. 325. Wenn der Wasserverlust q gegeben ist, so kann die mittlere Geschwindigkeit V_1 des Apparates, vermittelst der Gleichung (v) direct berechnet werden, welche voraussetzt, daß der Apparat bereits construirt ist, und im Grunde auf die Gleichung (n) zurückkommt, nur daß sie h'_1, h''_1 oder h'_0, h''_0 nicht als bekannt voraussetzt, sondern im Gegentheil dazu dienen kann, dieselben vermittelst der Formeln (m) und (s) oder:

$$h'_0 = \frac{2kk_1 h''_1 + (k_1 - k) h'_1}{k_1 + k}, \qquad h''_0 = \frac{2h'_1 - (k_1 - k) h''_1}{k_1 + k},$$

zu berechnen, wovon sich die letztern, wie wir gesehen haben, hauptsächlich auf die Gleichförmigkeit und Periodicität der Bewegung des Schwimmers beziehen.

§. 326. Die Niveauveränderungen v_1, v'_1, v''_1 in den verschiedenen Behältern werden vermöge der Relationen (u) unmittelbar durch die Formeln:

$$(x) \qquad v_1 = \frac{q}{A+B}, \quad v'_1 - \frac{q}{A}, \quad v'' = \frac{q}{A''},$$

gegeben, worin nach der Voraussetzung alles bekannt ist, und welche zur Regulirung des Verschlusses der Heberklappen dienen können, so wie die Gleichungen (v), (m) und (s) zur Regulirung der Oeffnung dieser Klappen, wie sich auch die Niveaus in den äußersten Canälen oder Behältern ändern mögen. Der Inhalt dieser Canäle, welche die Behälter A'', A' direct speisen, wird immer als gegen den der letztern sehr groß vorausgesetzt. Die Behälter oder Kammern A'', A, A' bilden das eigentliche Schleusensystem, für welches der Schwimmer bestimmt ist, und durch welches die Schiffe hindurch geschafft werden sollen.

§. 327. Aus dieser Untersuchung geht deutlich hervor, welcher Zusammenhang zwischen den verschiedenen Größen q, V_1, Q'_1, Q''_1, v_1, v'_1, v''_1, h'_1, h''_1, h'_0, h''_0 stattfindet, und wie der Schleusenwärter, wenn der Apparat gehörig eingerichtet ist, die Geschwindigkeit des Schwimmers verändern kann, wenn er den Wasserverlust verändert, und umgekehrt. Ferner sieht man, daß die absoluten Werthe der Druckhöhen h'_1, h''_1, h'_0, h''_0, unabhängig von den Werthen von D', D'', durch nichts bestimmt werden, und daß wenigstens eine, z. B. h'_0, ganz willkürlich bleibt, selbst wenn der Wasserverlust q, oder die mittlere Geschwindigkeit V_1 des Kastens gegeben ist.

Denn aus den Bedingungsgleichungen (j), (q), (r) und (α) ergeben sich durch Elimination nun die Formeln:

$$(y)\begin{cases} h''_1 = \dfrac{(k-k_1)\,q}{2ik(k+k_1)(A+B)} + \dfrac{1}{k}h'_0 = \dfrac{(k-k_1)(B+A+A')}{2kk_1\,A'(B+A)}\,q + \dfrac{1}{k}h'_0, \\ h'_1 = \dfrac{k_1 q}{i(k+k_1)(B+A)}\; h'_0 = \dfrac{B+A+A'}{A'(B+A)}\,q - h'_0, \\ h''_0 = \dfrac{q}{2ik(B+A} - \dfrac{1}{k}\,h'_0 = \dfrac{(k+k_1)(B+A+A')}{2kk_1\,A'(B+A)}\,q - \dfrac{1}{k}\,h'_0, \end{cases}$$

welche h'_1, h''_1 und h''_0 als Funktionen von q geben, ohne über die Größe von D', D'' etwas vorauszusetzen, welche also ganz der von q und h'_0 untergeordnet ist, und umgekehrt.

Ehe wir uns aber mit der Bestimmung der Durchmesser D', D'' beschäftigen, müssen wir uns vorher versichern, daß die Werthe von h'_0 q oder V, in der That willkürlich und constant bleiben oder als nahezu von den Veränderungen des gesammten Schleusengefälles unabhängig betrachtet werden können.

Bedingungen in Beziehung auf die Veränderlichkeit der äußersten Niveaus.

§. 328. Wenn die bewegenden Druckhöhen h'_0, h''_0, h'_1, h''_1, so wie die Durchmesser D', D'' so bestimmt wären, daß den vorhergehenden Bedingungen Genüge geschähe; so ließen sich vermittelst unserer Gleichungen daraus leicht die Werthe der übrigen constanten und veränderlichen Größen der Aufgabe ableiten. Denn setzt man in den Gleichungen (c), (d), für die darin vorkommenden veränderlichen Größen die dem Ende des Niedersteigens des Schwimmers entsprechenden Werthe derselben, so erhält man die Ausdrücke:

$$(z)\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{A'}{A'+B'}(y_1+h'_0-h'_1), \quad x''=\frac{A''}{A''+B''}(y_1+h''_0-h''_1),\\ z &= \frac{B}{A}y_1, \quad z'_1=\frac{B'}{A'}x'_1=\frac{B'}{A'+B'}(y_1+h'_0-h'_1),\\ z''_1 &= \frac{B''}{A''}x''_1=\frac{B''}{A''+B''}(y_1+h''_0-h''_1);\end{aligned}\right.$$

worin man wegen der Gleichungen (j), (r) und (s) nach Belieben setzen kann:

$$h''_0-h''_1=-\frac{1}{k}(h'_0-h'_1)=\frac{2(h'_1-k_1h''_1)}{k+k_1}=$$
$$-\frac{2(h'_0-k_1h''_0)}{k+k_1}=\frac{k_1}{ik(k+k_1)}\frac{q}{(B+A)}-\frac{2}{k}\,h'_0 \text{ ꝛc.}$$

und zu deren Berechnung erfordert wird, daß die Werthe von y_1 vorher nach einer neuen und letzten Bedingung bestimmt sind, welche sich auf das ganze Schleusengefälle H bezieht, das der Summe $H+H'+H''$ der Partialgefälle H, H', H'' gleich ist, die mit den Querschnitten A, A', A'' der Schleusenkammern, die Hauptdata der Aufgabe bilden.

Zur Berechnung von y_1 hat man die Gleichung:

$$\mathrm{H}=H+H'+H''=z_1+z'_1+z''_1+v_1+v'_1+v''_1,$$

oder wenn man für die Buchstaben ihre Werthe setzt:

$$a'\left\{\begin{aligned} H &= \left(\frac{B}{A}+\frac{B'}{A'+B'}+\frac{B''}{A''+B''}\right)y_1+\left(\frac{A+B}{A'}+\frac{A+B}{A''}\right)\frac{q}{A+B}\\ &+\frac{B'}{A'+B'}(h'_0-h'_1)+\frac{B''}{A''+B''}h''_0-h''_1).\end{aligned}\right.$$

§. 329. Der Coefficient von y_1 in dieser Gleichung hat die Eigenschaft, daß sein Werth in allen Fällen sehr wenig von der Einheit verschieden ist, und vermöge der Gleichung (i) der Einheit streng gleich sein würde, wenn man die stets sehr kleine Differenz zwischen dem äußern Querschnitte B des Schwimmers und seinen inneren Querschnitten B', B'' unbeachtet lassen könnte.

Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man nur die Einheit von diesem Coefficienten abzuziehen und gehörig zu reduciren, wodurch man erhält:

$$\frac{B}{A}+\frac{B'}{A'+B'}+\frac{B''}{A''+B''}-1$$
$$=\frac{BB'B''+AB'B''+A'BB''+A''BB'+A'A''B-AA'A''}{A(A'+B')(A''+B'')}.$$

Verfährt man mit den beiden Theilen der Gleichung (*i*) auf ähnliche Weise, so erhält man:

$$\frac{BB'B''+AB'B''+A'BB''+A''BB'+A'A''B-AA'A''}{A(A'+B')(A''+B'')}=$$

$$=-\frac{A'(A''+B'')(B-B')+A''(A'+B')(B-B'')}{B(A'+B')(A''+B'')}$$

und folglich:

$$\frac{B}{A}+\frac{B'}{A'+B'}+\frac{B''}{A''+B''}=1$$

$$-\frac{A'(A''+B'')(B-B')+A''(A'+B')(B-B'')}{B(A'+B')(A''+B'')};$$

was zu beweisen war.

Da die übrigen in dem Ausdrucke (a') von H vorkommenden Glieder die nach der Voraussetzung immer sehr kleinen Factoren q, $h'_0-h'_1$, $h''_0-h''_1$ enthalten; so folgt, daß das ganze Steigen und Sinken des Schwimmers sehr wenig von dem ganzen Schleusengefälle $\mathrm{H}=H+H'+H''$ verschieden ist.

Setzt man zur Abkürzung:

$$(b)\left\{\begin{aligned}&\frac{B}{A}+\frac{B'}{A'+B'}+\frac{B''}{A''+B''}=\\&1-\frac{A'(A''+B'')(B-B')+A''(A'+B')(B-B')}{B(A'+B')(A''+B'')}=\frac{1}{M},\\&\left(1+\frac{A+B}{A'}+\frac{A+B}{A''}\right)\frac{q}{A+B}\\&+\frac{B'}{A'+B'}(h'_0-h'_1)+\frac{B''}{A''+B''}(h''_0-h''_1)=N\ ,\end{aligned}\right.$$

wo also M wenig von der Einheit verschieden und N nach den Bedingungen der Aufgabe immer eine sehr kleine Länge ist; so gibt endlich die Gleichung (a'):

$$(c')\qquad y_1=M\mathrm{H}-MN=M(\mathrm{H}-N).$$

§. 330. Dieser Ausdruck gibt ein zweites sehr einfaches Mittel zur Regulirung der Bewegung des Schwimmers an die Hand, wenn die sehr kleinen Größen $\frac{q}{A+B}$, h'_0, h''_0, h'_1, h''_1 ungeachtet der Veränderungen des Gefälles H constant bleiben müssen; denn derselbe lehrt, daß die entsprechenden Veränderungen der Amplitude y, der Bewegung des Schwimmers diesen Größen genau proportional sind, so daß man für die verschiedenen Gefälle zum voraus die Lage bestimmen kann, die man den Hebeln geben muß, welche zum Verschluß der Heberklappen am Ende der Bewegung des Schwimmers dienen.

Da ferner das letzte Glied MN des Ausdruckes (c'), wie eben bemerkt, sehr klein ist, und gegen das erste, welches dem gesammten Schleusengefälle proportional bleibt, vernachlässigt werden kann; so folgt, daß dieselbe Proportionalität auch nahezu sowohl hinsichtlich der Größen z'_1, x'_1, z''_1, x'', welche sich unmittelbar aus y_1 ergeben, als in Beziehung auf die Partialgefälle H, H', H'' stattfindet, welche durch die Formeln:

$$(d')\left\{\begin{aligned} H &= z_1 + v_1 = \frac{B}{A} y_1 + \frac{q}{A+B}, \\ H' &= z'_1 + v'_1 = \frac{B'}{A'+B'} y_1 + \frac{B'}{A'+B'}(h'_0 - h'_1) + \frac{q}{A'}, \\ H'' &= z''_1 + v''_1 = \frac{B''}{A''+B''} y_1 + \frac{B''}{A''+B''}(h''_0 - h''_1) + \frac{q}{A''} \end{aligned}\right.$$

gegeben werden.

Wenn die Schleuse bereits construirt ist, und folglich die Partialgefälle H, H', H'' gegeben sind, so muß man diesen Gleichungen, welche die Gleichung (c') ersetzen, durch eine schickliche Bestimmung der Größen y_1, B, A, wovon bekanntlich die letzte den ganz willkürlichen freien Spielraum im Brunnen mit in sich begreift, zu genügen suchen. Aber da man auch noch die Gleichung (i), also vier Gleichungen für drei unbekannte Größen hat, so würde die Aufgabe, wenigstens in dem Falle dreier Schleusenkammern, unmöglich, wenn nicht die Partialgefälle, so wie die Horizontaldurchschnitte nahezu einander gleich wären; denn alsdann reduciren sich die Gleichungen (d') auf zwei und können einander nicht widersprechend sein.

Da sich übrigens das Totalgefälle H in den verschiedenen Jahreszeiten und in Folge der wiederholten Durchschleusungen ändert, so folgt, daß dieses auch mit allen übrigen davon abhängigen Größen der Fall ist, und es scheint daher, daß es nicht möglich sei, mit demselben Schwimmer in allen in der Praxis vorkommenden Fällen auszureichen, was jedoch nicht der Fall ist, wenn man die verticalen Dimensionen des Schwimmers und des Brunnens nach dem größten Werthe von H bestimmt und in der untern Abtheilung des Schwimmers eine mit H veränderliche Wassermenge läßt, welche gleichsam die Verminderung des Totalgefälles compensirt.

§. 331. Um klar zu zeigen, was für Relationen zwischen den verschiedenen, mit dem Totalgefälle veränderlichen Größen stattfinden, bezeichnen wir mit:

E', e', die Höhen oder Dicken der anfänglichen Wasserschicht in der untern Abtheilung und des Bodens, worauf sie ruhet; mit:

x' die innere Höhe der untern Abtheilung des Schwimmers zwischen den obern Flächen ihrer beiden Böden gemessen, mit:

j' die Höhe des leeren Raumes dieser untern Abtheilung bei dem höchsten Stande des Schwimmers; mit:

E'', e'', x'', j'' dieselben Größen für die obere Abtheilung des Schwimmers: und endlich mit:

E'_m, j'_m, j''_m die Werthe, welche dem größten Gefälle H_m entsprechen; so ergeben sich für ein beliebiges Gefälle H und für den Augenblick, wo der Schwimmer seine höchste Lage erreicht hat, für seine untere Abtheilung ohne Schwierigkeit die Bedingungsgleichungen:

$$x' = E' + x'_1 + j' + e'',$$

$$x' = E' - E'' + H + H'' + h'_0 - h''_0 = E' - E'' + \mathrm{H} - H' + h'_0 - h''_0,$$

sowie die Gleichungen:

$$x'' = E'' + x''_1 + j'',$$

$$x' = E' - E'' + H + H' + h''_0 - h'_0 + x'_1 - x''_1$$
$$= E' - E'' + \mathrm{H} - H'' + h''_0 - h'_0 + x'_1 - x''_1,$$

wovon sich die eine auf die obere und die andere auf die untere Abtheilung des Schwimmers bezieht, wenn derselbe steigt.

Man erhält übrigens dieselben Gleichungen, man mag den Schwimmer in dem Augenblicke unmittelbar vor der Oeffnung, oder vor dem Verschlusse der Heberklappen betrachten.

Die drei ersten dieser Gleichungen geben zur Berechnung der Werthe der unbekannten oder veränderlichen Größen j', j'', E', wenn x', x'', E'' ein für allemal mit Rücksicht auf das größte Totalgefälle H_m, welchem offenbar auch die größten Werthe von x', x'', entsprechen, bestimmt sind:

$$(e') \quad \begin{cases} j' = x' - E' - x'_1 - e'', \quad j'' = x'' - E'' - x''_1, \\ E' = E'' + x' - \mathrm{H} + H' - h'_0 + h''_0. \end{cases}$$

Wenn man die vierte der vorhergehenden Gleichungen mit der zweiten vergleicht, so ergibt sich, daß sie wegen der Gleichungen (j), (r) oder (y), (z) damit identisch ist, und folglich zwischen den Größen h'_0, h'_1, h''_0 rc., keine neue Bedingung ausdrückt.

Die analogen Gleichungen für das größte Totalgefälle H_m, geben unmittelbar, wenn wieder angenommen wird, daß dieselben Größen, ungeachtet der Veränderungen von H constant bleiben:

$$(f') \quad \begin{cases} x' = E'_m + x'_m + j'_m + e'', \; x'' = E'' + x''_m + j''_m, \\ x' = E'_m - E'' + \mathrm{H}_m - H'_m + h'_0 - h''_0; \end{cases}$$

indem die vierte Gleichung, als mit der zweiten identisch hinweggelassen und bemerkt wird, daß die Höhe E'' der anfänglichen Wasserschicht in der obern Abtheilung des Schwimmers als constant angenommen ist, übrigens aber einen beliebigen Werth haben kann, wofür später die näheren Bedingungen angegeben werden. Wenn man für H'_m, x'_m, x''_m die Werthe setzt, welche sich aus den Gleichungen (z), (c'), (d') ergeben, wenn man darin H'_m, H_m, x'_m, x''_m, y_m für H', H, x'_1, x''_1, y_1 substituirt; so kann man die Werthe von x', x'' bestimmen, wofern man die Bedingungsgleichung:

$$(g') \qquad j'_m = \mathrm{H}_m - E'' - e'' - H'_m - x'_m + h'_0 - h''_0$$

$$= (1 - M)\, \mathrm{H}_m + MN \frac{q}{A'} - E'' - e'' + h'_1 - h''_1,$$

berücksichtigt, welche sich aus den vorhergehenden ergibt, wenn es darauf ankommt, den größten Werth j''_m der Höhe j'' des leer bleibenden Raumes der untern Abtheilung des Schwimmers zu reguliren, welcher, wie man sieht, nicht ganz willkürlich oder von den übrigen Größen unabhängig ist.

Wenn man in die Gleichungen (e'), für x', x'' ihre obigen Werthe setzt, so verwandeln sie sich wegen der auf den Fall des größten Gefälles H_m angewandten Gleichungen (z), (c'), (d') in folgende:

$$(h')\left\{\begin{aligned} & j'=j'_m+(M-1)(\mathrm{H}_m-\mathrm{H}),\quad j''=j''_m+\frac{A''}{A''+B''}M(\mathrm{H}_m-\mathrm{H}),\\ & E'=E'_m+\left(1-\frac{B'}{A'+B'}M\right)\mathrm{H}_m-\mathrm{H}).\end{aligned}\right.$$

Diese einfachen Ausdrücke, welche nur von den Veränderungen des Totalgefälles H abhängen, würden nöthigenfalls dazu dienen können, das Mannöver des Apparates zu reguliren, wenn die unmittelbare Beobachtung dieser Veränderungen in der Praxis nicht mit einigen Schwierigkeiten verbunden wäre.

§. 332. Ehe man die Werthe der Constanten E'_m, E'', j''_m 2c., welche die verticalen Dimensionen des Schwimmers bestimmen, definitiv festsetzt, muß man der Bedingungsgleichung $P_0=\Pi B y_0$ genügen, die sich auf das hydrostatische Gleichgewicht bezieht, und vor dem Oeffnen der Heberklappen stattfindet. Denn wenn P das Gewicht des Schwimmers bezeichnet, so hat man für den fraglichen Augenblick:

$$P_0=P+\Pi B'E'+\Pi B''E'',\qquad y_0=h'_0+E'+e',$$

und folglich, wenn man für E', seinen weiter oben gefundenen Werth (h') setzt:

$$(i')\left\{\begin{aligned} h'_0 &= \frac{P}{\Pi B}+\frac{B''}{B}E''-e'-\frac{(B-B')}{B}\;E'\\ &= \frac{P}{\Pi B}+\frac{B''}{B}E''-e'-\frac{(B-B')}{B}\;E'_m\\ &\quad-\frac{(B-B')}{B}\left(1-\frac{B'}{A'+B'}M\right)(\mathrm{H}_m-\mathrm{H})\end{aligned}\right.$$

Nach dieser Gleichung würde, unserer Voraussetzung zuwider, der Werth von h'_0 von der Veränderung $\mathrm{H}_m-\mathrm{H}$ des Totalgefälles abhängen, wenn P, E'' ganz unveränderlich bleiben müßten.

Allein durch Anwendung von Gegengewichten, welche dem Schwimmer als Ballast dienen, erhält man in dieser Beziehung freien Spielraum, und außerdem kann man die Werthe des Gliedes, worin die Veränderung des Totalgefälles vorkommt, beliebig klein machen, wenn man nach Girard den Schwimmer aus dünnem Blech macht und durch hohle eiserne Träger verstärkt, welche an ihren Enden mit den innern Abtheilungen des Schwimmers communiciren, und in dem obern Theile des Schwimmers leere senkrechte Röhren anbringt, welche zwischen der äußern Luft und dem untern Theile desselben eine Communication herstellen und zugleich zur Compensation des Raumes dienen, welchen die eisernen Träger und die Röhren in der untern Abtheilung einnehmen, durch welche die beiden Heber gehen.

Wenn man übrigens die Constanten P und E'', welche in der Gleichung (i') vorkommen in der Voraussetzung bestimmt, daß für H sein mittlerer Werth gesetzt wird, so reduciren sich die von dem Gliede $H_m - H$ herrührenden Abweichungen selbst für beträchtliche Veränderungen des Niveaus und für ziemlich große Werthe der Differenz $B - B'$ auf Bruchtheile des Millimeters, welche man ohne Bedenken vernachlässigen kann.

Hieraus und aus dem Vorhergehenden folgt, daß die anfängliche Druckhöhe h'_0 auch bei verschiedenen Werthen des Totalgefälles H einen fast willkürlichen und constanten Werth haben, und folglich so bestimmt werden kann, daß irgend einer andern Bedingung genügt wird. Mithin behalten auch die Größen q, V_1, h''_0, h'_1 und h''_1 Werthe, welche nahezu von den Veränderungen des Totalgefälles H unabhängig sind, wie wir ursprünglich vorausgesetzt haben. Wenn man ferner die Werthe (y) dieser drei letzten Größen in die Gleichungen (f'), (g') und (h') substituirt, so hängen die Werthe der übrigen Constanten x', x'', j'_m, E'', P rc., von den für h'_0 angenommenen Werthen ab; aber sie werden dadurch nicht alle bestimmt, und man kann für E'_m, E'', j_m beliebige Werthe annehmen.

Streng genommen, könnten diese letzten Größen völlig gleich Null gesetzt werden, um die Höhen der Abtheilungen des Schwimmers so viel als möglich zu vermindern; allein es ist zweckmäßig, denselben einen Werth von mehreren Centimetern zu geben, um die Zeit zum Ein- und Ausfluß der ersten und letzten Wasserschichten unmittelbar vor dem Oeffnen und Verschließen der Heberklappen bei dem höchsten Stande des Schwimmers möglichst abzukürzen, oder zu verhindern, daß das Wasser in der obern Abtheilung bei dem Schwanken desselben nicht überfließt, oder auf den Zwischenboden schlägt, u. s. f.; so kann man z. B. $E'' = E' = 0^m,05$ und $j''^m = 0^m,03$ setzen, wofern man für j'_m und P Werthe annimmt, welche den Gleichungen (g') und (i') genügen.

Dimensionen und Verhältnisse der verschiedenen Theile des Apparates.

§ 333. Nachdem wir uns überzeugt haben, daß man den Forderungen der Aufgabe immer genügen kann, was für Werthe man den Constanten h'_0, q oder V_1 auch geben mag, können wir auch die Durchmesser D', D'' der Heber bestimmen; allein vorher müssen die Werthe der Querschnitte B' B', B'' des Schwimmers, welche wegen der Gleichung (i), die wir unter ihrer allgemeinsten und einfachsten Form beibehalten haben, in fast allen Formeln vorkommen, näherungsweise bestimmt werden, zu welchem Zwecke man sich erinnern muß, daß A, B' und B'' wegen des freien Spielraumes im Brunnen, sowie des Raumes, welchen die Stützen und Röhren hinweg nehmen, Functionen von B sind, und man folglich die Gleichungen durch das bekannte Verfahren der successiven Versuche oder der Regel vom falschen Satze auflösen muß.

Da übrigens die innern Querschnitte B' und B'' selbst in den ungünstigsten Fällen von B nur um einen sehr kleinen Theil ihres Werthes verschieden sein können, so kürzt man die Rechnung ab, wenn man diesen Unterschied anfangs unbeachtet läßt und B näherungsweise vermittelst der Gleichung:

$$(j') \qquad \frac{A'}{A'+B} + \frac{A''}{A''+B} = \frac{A+B}{A} = \frac{A+(1+\delta)B}{A+\delta B},$$

bestimmt, worin δB den freien Spielraum im Brunnen und A den Querschnitt der mittleren Schleusenkammer bezeichnet, mit welcher der Brunnen unmittelbar in Verbindung steht.

§. 334. Diese Gleichung ist im Allgemeinen vom dritten Grade, aber sie reducirt sich in den meisten Fällen der Anwendung II, wo $A''=A'$ und A' oder A'' gegen B und A sehr groß ist, auf eine Gleichung des zweiten Grades. Auch kann man vermöge der praktischen Bedingungen der Aufgabe und der Form der Gleichung (j') für die Werthe von B, welche derselben genügen müssen, ziemlich enge Grenzen angeben, zwischen welchen man folglich nur die Substitutionen vorzunehmen braucht. Weiß man z. B., daß in dem allgemeinen Falle, wo A' und A'' verschieden sind, die Bedingung $A'>A''$ erfüllt wird, welche, wie wir später sehen werden, der Stabilität des Schwimmers günstig ist; so hat man:

$$\frac{A'}{A'+B} < 1, \quad \frac{A'}{A'+B} > \frac{A''}{A''+B},$$

und folglich wegen der Gleichung (j'):

$$\frac{A+(1+\delta)B}{A+\delta B} < 1 + \frac{A''}{A''+B} > \frac{2A''}{A''+B}.$$

Aus diesen Ungleichheiten ergeben sich für B die Grenzen:

$$B < \tfrac{1}{2}(1-\delta)\,A''\left[-1+\sqrt{1+\frac{4A}{(1-\delta)^2 A''}}\right]$$

$$> \frac{A+(1-\delta)A''}{2(1+\delta)}\left\{-1+\sqrt{1+\frac{4(1+\delta)AA''}{[A+(1-\delta)A'']^2}}\right\},$$

welche man immer mehr zusammenziehen kann; allein diese Rechnungen sind nur in sehr seltenen Fällen erforderlich. Vermittelst dieses ersten, in der Voraussetzung $B'=B''=B$ erhaltenen Werthes von B kann man die zugehörigen Näherungswerthe der Constanten k, k_1, i, M, N berechnen, welche zur Bestimmung der verschiedenen Größen erforderlich sind, wodurch die Dimensionen und das Spiel des Apparates, namentlich die Dimensionen der Heber, die ihrer Zuleitungscanäle, die bewegenden Druckhöhen für eine gegebene Wasserconsumtion oder Geschwindigkeit, rc. bestimmt werden. Wegen localer und öconomischer Verhältnisse sind die Größen V_1, k'_0 und q oder $\frac{q}{A}$ an gewisse Grenzen gebunden, und wenn man die erste etwas zu groß annimmt, so erhält man die zugehörigen Werthe von Q'_1 und Q'_1 durch die Gleichungen (k). Nimmt man alsdann Q'_1, Q''_1 etwas zu klein, und substituirt in die Gleichungen (y), so kann man die Werthe von h'_1, h''_1 berechnen. Vermittelst dieser letzten Größen kann man alsdann durch das in §. 323 angegebene Verfahren die Durchmesser D' und D'' der Heber finden, indem man die Größen der Zuleitungscanäle schicklich annimmt. Da aber die Größe dieser Durchmesser in der Praxis eine gewisse Grenze nicht überschreiten kann, so kann man die zuerst für V_1, q und h'_0 angenommenen Werthe so abändern, daß sie den Bedingungen der Aufgabe besser entsprechen, und namentlich, daß $D' = D''$ wird. Näherungsweise wird $D' = D''$, wenn h'_1 und h''_1 der Bedingung:

$$\frac{h'_1}{h''_1} = \frac{b' Q'^2_1}{b'' Q''^2_1} = \frac{b' A''^2 B''^2 (A'' + B'')^2}{b'' A'^2 B'^2 (A' + B')^2},$$

genügen, wodurch man vorläufig den Werth von h'_0 bestimmt, wenn man sie mit den Gleichungen (y) verbindet, wodurch man erhält:

$$h'_0 = \left[b'' Q''^2_1 + \frac{k_1 - k}{2kk_1} b' Q'^2_1 \right] \frac{k(B + A + A')q}{(kb'' Q''^2_1 + b' Q'^2_1)A'(A+B)}.$$

Da D' und D'' nur näherungsweise einander gleich sein können, so kann man ihre Werthe immer noch festsetzen, wodurch umgekehrt die Werthe von h'_1, h''_1, q oder V_1, h'_0 und h'_0 bestimmt werden. Wenn die Durchmesser D', D'' einander gleich sein müssen, so ist es am einfachsten, ihren gemeinschaftlichen Werth zum voraus anzunehmen, und z. B. $= 1^m$ oder $= 1^m, 3$ zu setzen, dann daraus die Werthe der eben angeführten Größen abzuleiten, und endlich, wenn die so erhaltenen Werthe nicht zweckmäßig erscheinen, die angenommenen Werthe der Heberdurchmesser etwas abzuändern.

§. 335 Sind auf diese Weise die Dimensionen der Heber und der Zuleitungscanäle, sowie die horizontalen Querschnitte des Brunnens und des Schwimmers bestimmt; so läßt sich die Constructionsart des letztern fast definitiv bestimmen, indem man der Bedingung $B'' = B'$ genügt, und $B - B'$ möglichst klein macht. Kennt man alsdann die Verhältnisse von B' und B'' zu B, so kann man zu einer genaueren Auflösung der Gleichung (i), und folglich zu einer genaueren Bestimmung der übrigen Größen schreiten, wobei man die Bedingungsgleichungen (d') und (i') berücksichtigen muß.

Insbesondere geben die Formeln (f') die resp. Höhen x', x'' der Abtheilungen des Schwimmers, sowie seine ganze Höhe $x' + x''$, wenn der Werth des größten Schleusengefälles H_m, sowie die zugehörigen Werthe von j'_m, j''_m etc., zum voraus bestimmt sind. Die Gleichung (c) gibt ferner, wenn darin H_m für H gesetzt wird, die größte Amplitude der Bewegung des Schwimmers, welche offenbar dem größten Schleusengefälle entspricht. Endlich geben die Gleichungen (d') die Werthe der Partialgefälle H, H' und H'' für ein gegebenes Totalgefälle H; allein man muß diese veränderlichen Gefälle nicht mit denen verwechseln, welche die Lage des Bodens der verschiedenen Schleusenkammern bestimmen, sich nicht mit dem Totalgefälle ändern und, sowie die Tiefe des Brunnens, die Höhe der verticalen Schenkel der Heber etc., durch besondere Betrachtungen bestimmt werden müssen.

Zu dem Zwecke bezeichne:

j das Intervall zwischen dem Boden des Brunnens und der untern Fläche des Schwimmers am Ende der niedersteigenden Bewegung des letztern und für den Zeitpunkt, wo das Totalgefälle der Schleuse gleich H ist;

j_m dieselbe Größe für das größte Schleusengefälle H_m;

$\dot{Z}$, $\ddot{Z}$ die Tiefen des Bodens des Brunnens unter denen des obern und untern Canales oder, was genauer ist, unter den Schleusendrempeln;

H_i das kleinste Gefälle;

$C = \ddot{Z} - \dot{Z}$ das mittlere Schleusengefälle;

$\dot{T}$, $\ddot{T}$ die Tiefe des Wassers über den Drempeln;

$T_i = \dot{T}_i = \ddot{T}_i$ den kleinsten zulässigen Werth von $\dot{T}$ und $\ddot{T}$;

$\dot{T}_m$, $\ddot{T}_m$ den größten Werth dieser Tiefen, so daß man die Relationen hat:

$$(k')\left\{\begin{array}{l} H = \ddot{Z} - \dot{Z} + \ddot{T} - \dot{T} = C + \ddot{T} - \dot{T},\ H_m = C + \ddot{T}_m - \dot{T}_i; \\ H_i = C + \ddot{T}_i - \dot{T}_m; \end{array}\right.$$

wo $\dot{Z}$, $\ddot{Z}$ in Folge der Verschlämmung der Canäle nur um nahezu gleiche Größen zunehmen können, sowie die Relation:

$$l')\qquad H_m - H = \ddot{T}_m - \ddot{T} + \dot{T} - \dot{T}_i,$$

welche $H = H_m$ gibt für $\dot{T} = \dot{T}_i$ und $\ddot{T} = \ddot{T}_m$, wie es sein muß;

c', c, c'' die festen Partialgefälle oder die Höhen der Gefällmauern, von den verschiedenen Drempeln aus gemessen;

$z' = \dot{Z}$, $z = z' + c'$, $z'' = z + c$, $\ddot{Z} = z'' + c''$ die Höhen der resp. Schleusenböden über dem Boden des Brunnens;

$T' = \dot{T}$, T, T'' die Tiefen des Wassers in den Schleusenkammern, für ein beliebiges Gefälle H und in dem Augenblicke, wo der Schwimmer am Ende seines Weges ist, diese Tiefen folglich ihren kleinsten Werth haben, und mithin die Gleichungen stattfinden:

$$(m')\left\{\begin{array}{l} \dot{T} + H' = c' + T,\ T + H = c + T'',\ T'' + H'' = c'' + \dot{T}, \\ \qquad C = c' + c + c'' = \ddot{Z} - \dot{Z}; \end{array}\right.$$

$P' = T_m + c' \pm \triangle$, $P = T''_m + c \pm \triangle$, $P'' = \ddot{T}_m + c'' \pm \triangle$, $\ddot{P} = \ddot{T}_m \pm \triangle$ die resp. Vorsprünge der Schleusenthore über den Drempeln, deren absolute Lagen durch z', z, z'' und $\ddot{Z}$ bestimmt werden, wo T_m, T''_m die größten Werthe von T, T'' sind, $\triangle$ eine sehr kleine Größe ist, *rc.*

Alsdann bestimmt man zuerst die Werthe der Größen j, $\dot{Z}$ und $\ddot{Z}$, welche die absolute und relative Lage des Schwimmers und des Bodens des Brunnens gegen den Boden des obern und untern Canales, deren Lage, sowie die der äußern Drempel als gegeben, angenommen wird, bestimmen. Betrachtet man zu dem Zwecke den Zeitpunkt, wo das ganze Schleusengefälle = H und der Schwimmer in seine tiefste Lage gekommen ist; so hat man offenbar die Relation:

$$\dot{Z} + T' + v'_1 = h'_1 + x'_1 + E' + e' + j.$$

Hieraus ergibt sich für den kleinsten Spielraum zwischen dem Boden des Brunnens und dem des Schwimmers der Ausdruck:

$$j = \dot{Z} + T' + v'_1 - h'_1 - (x'_1 + E') - e',$$

welcher seinen absolut kleinsten Werth erreicht, wenn $T' = T_i$, $x_{,1} = x'_m$ und $E' = E'_m$ ist, weil nach den Gleichungen (z), (c') und (h') das negative Glied:

$$x'_1 + E' = (M - 1)\,\mathrm{H} + \left(1 - \frac{B'M}{A' + B'}\right)\mathrm{H}_m$$

$$- \frac{A'}{A' + B'}\,(MN + h'_1 - h'_0) + E'_m$$

seinen größten Werth bekommt wenn $\mathrm{H} = \mathrm{H}_m$ ist, wo $M - 1$ positiv ist, weil M der Einheit sehr nahe kommt, und $B' < A' + B$, ist (§. 329).

Man hat folglich:

$$(n') \qquad j_m = T_i + \dot{Z} + v'_1 - h'_1 - (x'_m + E'_m) - e',$$

und mithin, wegen $T'_1 = \dot{T}$ und weil j_m eine Größe ist, welche zum voraus bestimmt sein muß, und nicht kleiner als $0^m, 15$ bis $0^m, 20$ sein kann, da sich auf dem Boden des Brunnens immer Schlamm anhäufen wird:

$$(o')\left\{\begin{aligned} \dot{Z} &= j_m + h'_1 - v'_1 + e' - T_i + (x'_m + E'_m) \\ &= j_m + h'_1 - v'_1 + e' - T_i + \frac{A'}{A' + B'}(MH_m - MN + h'_0 - h'_1) + E'_m, \\ j &= j_m + \dot{T} - T_i + (M - 1)\,(H_m - H) \\ &= j_m + M\,(\dot{T} - T_i) + (M - 1)\,(\ddot{T}_m - \ddot{T}). \end{aligned}\right.$$

Die erste dieser Gleichungen gibt die Tiefe des Bodens des Brunnens unter dem des untern Canales, und die zweite den kleinsten Spielraum zwischen dem Brunnenboden und dem untern Boden des Schwimmers für ein beliebiges Gefälle H. Da aber der Coefficient M sehr wenig von der Einheit verschieden ist, so folgt, daß dieser Spielraum nur geringe Veränderungen erfährt, welche von denen von $\dot{T}$ abhängen. Da ferner die Differenz $\ddot{Z} - \dot{Z} = C$ das gegebene Normalgefälle bildet, so ist der Werth von $\ddot{Z}$ unmittelbar bekannt, wenn man den von $\dot{Z}$ kennt, und dasselbe ist mit den Werthen von c, c', c''; z, z', z'' 2c., der Fall. Denn die Bedingungsgleichungen (m') geben, wenn man darin die Werthe (d') von H, H', H'' substituirt, nachdem man vorher für y_1 seinen allgemeinen Werth (c') gesetzt hat, die Ausdrücke:

$$T = \dot{T} + H' - c'$$

$$= \dot{T} + \frac{B'}{A' + B'}\left[M\,(\mathrm{H} - N) + h'_0 - h'_1\right] + \frac{q}{A'} - c',$$

$$T'' = \ddot{T} - H'' + c''$$

$$= \ddot{T} - \frac{B''}{A'' + B''}\left[M\,(\mathrm{H} - N) + h''_0 - h''_1\right] - \frac{q}{A''} + c'';$$

worin nach der Voraussetzung alles constant ist, ausgenommen $\dot{T}$, $\ddot{T}$ und H. Setzt man für H seinen Werth $C + \ddot{T} - \dot{T}$, so nehmen diese Ausdrücke folgende Form an:

$$T = \dot{T}\left(1 - \frac{B'M}{A' + B'}\right)$$

$$+ \frac{B'}{A' + B'}\left[M\,(C - N) + M\ddot{T} + h'_0 - h'_1\right] + \frac{q}{A'} - c',$$

$$T'' = \ddot{T}\left(1 - \frac{B''M}{A'' + B''}\right)$$

$$- \frac{B''}{A'' + B''}\left[M\,(C - N) - M\dot{T} + h''_0 - h''_1\right] - \frac{q}{A''} + c''.$$

Da die Factoren von $\dot{T}$, $\ddot{T}$ in diesen letzten Gleichungen offenbar positiv sind, weil M nahezu gleich 1 ist; so folgt, daß die kleinsten Werthe von T und T'' genau $\dot{T} = T_i$ und $\ddot{T} = T_i$ entsprechen.

Da die kleinsten zulässigen Werthe von T und T'' ebenfalls durch T_i ausgedrückt werden, so geben die vorhergehenden Gleichungen unter Berücksichtigung der Gleichungen (b') für die festen Partialgefälle c', c'' und c nach verrichteten Reductionen:

$$(p')\left\{\begin{aligned} c' &= \frac{B'}{A' + B'}\left[M\,(C - N) + h'_0 - h'_1\right] + \frac{q}{A'},\\ c'' &= \frac{B''}{A'' + B''}\left[M(C - N) + h''_0 - h''_1\right] + \frac{q}{A''},\\ c &= C - c' - c'' = \frac{B}{A}\,M\,(C - N) + \frac{q}{A + B}\end{aligned}\right.$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß sich diese Formeln auch aus den allgemeinen Ausdrücken (d') ergeben, wenn man darin für y_1 seinen Werth (c') und C für H setzt. Die vorgehenden Ausdrücke von T und T'', als Functionen von $\dot{T}$ und $\ddot{T}$, geben auch die Werthe der Größen T_m, T''_m, welche in den Werthen von P', P und P'' vorkommen (S. 371); denn sie zeigen, daß diese größten Werthe genau den Zeitpunkten entsprechen, wo zugleich $\dot{T} = \dot{T}_m$ und $\ddot{T} = \ddot{T}_m$ ist.

§. 336. Hiernach kann man nun die Höhen der Schleusenthore und die der verticalen Heberschenkel, welche mit der obern und untern Schleusenkammer in Verbindung stehen, bestimmen, und es braucht blos noch bemerkt zu werden, daß die oberen Mündungen dieser Heberschenkel durch verticale cylinderische Ventile verschlossen sein müssen, welche an ihren Enden ganz offen sind, und selbst in ihren tiefsten Lagen sich über die, den größten Werthen $\dot{T}_m$, $\ddot{T}_m$ entsprechenden Niveaus erheben müssen. Was die, nach den beiden Abtheilungen des Schwimmers gehenden verticalen Heberarme betrifft, so erfordern sie eine ganz specielle Betrachtung, weil ihre Construction Schwierigkeiten darbietet, welche bei dem ursprünglichen Schleusensysteme Girard's fast gar nicht stattfinden.

§. 337. Wir haben schon früher bemerkt, daß es von besonderer Wichtigkeit ist, den Ein- und Ausmündungen der Heber die Form des Wasserstrahles zu geben, welche wenig von der Fläche verschieden ist, die durch die Umdrehung einer logarithmischen Linie erzeugt wird und eine Art abgekürztes Conoid bildet, dessen kleinere Grundfläche dem Querschnitte des Hebers gleich ist, und nach verschiedenen Beobachtern einen Durchmesser gleich 0,8 von dem der größern Grundfläche haben muß, wovon sie ungefähr um ihren eigenen Halbmesser entfernt ist *).

Diese Fläche geht aber nicht in die Ebene der äußern Mündung oder der großen Basis, über, sondern bildet damit vielmehr einen Winkel von etwa 60°. Da aber diese Erweiterung der Heberröhre nach den Versuchen und der Theorie von Borda noch nicht genügt, um die Contraction an der Mündung der Röhren aufzuheben, wenn sie mitten in die Flüssigkeit treten; so muß noch eine ringförmige ebene Wand, in Form eines dünnen Vorsprungs, in der Richtung der erweiterten großen Grundfläche des Conoides, hinzukommen, welche nach Bidone wenigstens 0,414 des innern Halbmessers der Röhre oder 0,166 des äußern Durchmessers der Mündung betragen muß, damit das Wasser die Richtung der Wand der Mündung annimmt, ehe es dieselbe erreicht.

Endlich sind diese Vorrichtungen nur dann hinreichend, den freien Eintritt des Wassers in die Heber unter den Druckhöhen h', h'', zu

---

*) Wenn man die Axe des Wasserstrahles für die der x und einen Halbmesser der großen Grundfläche zur Axe der y nimmt, und den Durchmesser dieser großen Grundfläche mit D bezeichnet, so daß der, der kleinen Grundfläche, welche um 0,4D von der großen entfernt ist, gleich $0{,}8D$ wird; so ist die Gleichung dieser Curve näherungsweise:

$$\frac{y}{D} = 0{,}114\,(220)^{-\frac{x}{D}} + 0{,}386, \text{ oder}$$

$$\frac{x}{D} = 0{,}878 - 0{,}427 \log.\left(1000\,\frac{y}{D} - 386\right);$$

wo $log.$ gewöhnliche Logarithmen bezeichnet.

bewirken, wenn die Enden der Heber wenigstens um die Größe ε unter dem Niveau liegen, welche sich aus der Näherungsgleichung:

$$Q = 0{,}41\,\pi\,(nD)\,\varepsilon\sqrt{2g\varepsilon} = \tfrac{1}{4}\pi D^2 U, \qquad \varepsilon = \sqrt[3]{\frac{3D^2U^2}{16gn^2}},$$

ergibt, worin D der innere Durchmessers des Hebers, U die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in demselben, $g = 9^m, 809$, n das Verhältniß des größten Durchmessers der Mündung zu D und endlich Q die Ausflußmenge in der Secunde bei der Geschwindigkeit U bezeichnet. Wäre dieses nicht der Fall, so würde das Wasser, wie bei einem Ueberfalle in die Heber treten, und bei eingetretener gleichförmiger Geschwindigkeit eine zu geringe Ausflußmenge, folglich eine Verzögerung der Geschwindigkeit, eine Senkung des Wassers in dem Kasten, und ein Verlust an bewegender Druckhöhe entstehen, welche nur in den ersten Augenblicken des Sinkens und Steigens des Kastens, wo die Werthe von U offenbar sehr klein sind, unbeachtet bleiben könnten.

Wäre z. B. die mittlere Geschwindigkeit $U = U'_1 = 1^m$ in der Secunde, $D = D' = 2^m$ und $n = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$, so wäre $\varepsilon = 0^m, 37$, wofür man größerer Sicherheit wegen $0^m, 4$ oder $\frac{1}{5}D$ nehmen kann, zu welchem Resultate man auch gelangen würde, wenn man annähme, daß das Wasser mit derselben Geschwindigkeit U von der Seite über den ringförmigen Vorsprung $\pi\,(nD)\,\varepsilon$ der Hebermündung flösse; denn man hätte alsdann die Gleichung:

$$Q = \pi\,nD\varepsilon U = \tfrac{1}{4}\,\pi D^2 U, \quad \text{folglich } \varepsilon = \frac{D}{4n} = \tfrac{1}{5}\,D.$$

Uebrigens wollen wir bemerken, daß eine solche Wasserschicht über der Mündung der Heber nicht genügen würde, um jedes Sinken, oder Steigen des Niveaus zu verhindern; denn beide sind nothwendig, um in dem erwähnten ringförmigen Querschnitte die Geschwindigkeit zu erzeugen. Bezeichnet nämlich ζ dieses Sinken oder Steigen, so findet man leicht für das erste nach der Formel für unvollkommene Ueberfälle die Gleichung:

$$Q = \pi nD\,(\varepsilon - \zeta)\sqrt{2g\zeta} + 0{,}41\,\pi nD\,\zeta\sqrt{2g\zeta} = \tfrac{1}{4}\,\pi D^2 U;$$

woraus sich näherungsweise ergibt, weil ζ gegen ε eine sehr kleine Größe ist, wovon die dritte Potenz unbeachtet bleiben kann:

$$\zeta = 0{,}424\,\varepsilon - \sqrt{0{,}18\varepsilon^2 - 0{,}053\,\frac{D^2\,U^2}{n^2\varepsilon^3\,2g}}$$

$$= 0{,}424\,\varepsilon\left(1 - \sqrt{1 - 0{,}295\,\frac{D^2\,U^2}{n^2\,\varepsilon^5\,2g}}\right);$$

so daß man ζ berechnen kann, wenn ε gegeben ist. Ebenso findet man im Falle des Steigens:

$$Q = \pi nD\,(\varepsilon\sqrt{2g\zeta} + 0{,}41\,\zeta\sqrt{2g\zeta}) = \tfrac{1}{4}\,\pi D^2 U,$$

$$\zeta = 0{,}61\varepsilon\left(-1 + \sqrt{1 + 0{,}205\,\frac{D^2\,U^2}{n^2\varepsilon^5 2g}}\right).$$

Man darf jedoch nicht glauben, daß ζ, welches für $\varepsilon = \infty$, oder sehr groß, verschwindet, ein wirklicher Verlust an bewegender Druckhöhe ist, unabhängig von dem, welchen die Geschwindigkeit U voraussetzt, wovon derselbe nur ein Theil ist, indem der andere Theil zur Hervorbringung der Wasserwirbel oder zur Ueberwindung der verschiedenen Widerstände des Wassers außerhalb der Röhren oder eigentlichen Heber dient. Man muß daher die Einrichtung so treffen, daß das Wasser so leicht als möglich am Umfange der Mündung der Heber in den Zuleitungscanälen, und auch in den Abtheilungen des Schwimmers sich bewegen kann, weßhalb man die freien Räume außerhalb dieser Mündungen so viel als möglich vergrößern und gleich machen muß.

§. 338. Offenbar lassen sich die obigen Bedingungen, in Beziehung auf die Form der Mündungen, und die Höhe der Wasserschichten, welche sich während der gleichförmigen Bewegung darüber befinden müssen, für die äußern verticalen Heberschenkeln, welche nach den Zuleitungscanälen gehen, leicht erfüllen.

Was die in den Brunnen gehenden Heberschenkel anlangt, so muß man den nach der obern Abtheilung des Schwimmers und den nach der untern Abtheilung desselben gehenden, wohl unterscheiden. Die Amplitude y_m, und um so mehr die Höhe des nach der untern Abtheilung des Schwimmers gehenden Heberarmes, ist im Allgemeinen von dem größten Schleusengefälle H_m nach der Gleichung (a') oder (c') wenig verschieden, während die Höhe x' der untern Abtheilung dagegen weit geringer sein kann, und hieraus folgt, daß in gewissen Fällen, namentlich wenn A' gegen die Querschnitte des Kastens nicht sehr groß ist, der nach dieser letzten Abtheilung gehende Heberschenkel aus zwei Theilen zusammengesetzt werden muß, wovon der untere fest und cylinderisch ist, während der obere Theil beweglich ist, sich nach der weiter oben angegebenen Form erweitert, und eine cylinderische Röhre trägt, worin sich der untere feste Theil wasserdicht bewegt, damit das Wasser aus dem Brunnen nicht in die untere Abtheilung des Schwimmers treten kann; denn es wirkt auf dieses Wasser ein veränderlicher Drucküberschuß:

$$y_0 + y + z - x' - E' - e' = h'_0 + \frac{B''}{B} x'' - \frac{(B - B')}{B} x',$$

sowohl bei dem Steigen, wie bei dem Sinken des Kastens, welcher sich für die tiefste Lage des letztern auf h'_0 reducirt, und für die höchste Lage desselben, d. h. für $x' = x'_1$ oder $= x'_m$, $x'' = x''_1$ oder $= x''_m$ sein Maximum erreicht.

§. 339. Die bewegliche Röhre wird sich, vermöge ihres Gewichtes, welches nöthigenfalls noch durch einen bestimmten Ueberdruck vergrößert werden kann, mit ihrem obern Rande beständig auf dem Boden des Schwimmers anlegen, ausgenommen in dem Augenblicke, wo sich die andere Grundfläche bei dem Niedersteigen des Kastens auf einen ringförmigen Vorsprung des Brunnenbodens stützt, so daß der fragliche Rand innerhalb der betreffenden Abtheilung des Schwimmers sich hebt; aber auch in seiner höchsten Lage tief genug unter dem entsprechenden Wasserniveau bleibt, und es läßt sich alsdann die Grenze dieser Tiefe leicht zum voraus bestimmen. Behalten wir die früheren

Bezeichnungen bei, und bezeichnet außerdem für den verticalen Schenkel des Hebers, welcher die untere Abtheilung des Schwimmers mit Wasser versieht:

l' die Höhe des festen Theiles dieses Heberarmes über dem Boden des Brunnens;

λ' die Höhe der denselben umgebenden beweglichen Röhre;

i' die kleinste Länge, um welche beide in der höchsten Lage des Schwimmers, und bei einem beliebigen Gefälle H in einander stecken;

d' die kleinste Entfernung des obern Randes der beweglichen Röhre von dem Wasserniveau in dem Schwimmer, welche für ein beliebiges Gefälle H offenbar der tiefsten Lage des Schwimmers entspricht;

e' die Dicke dieses Randes, oder sein Vorsprung über dem Boden des Schwimmers, wenn er auf demselben aufliegt;

s' der Vorsprung der Schwelle, auf welche sich die untere Grundfläche der beweglichen Röhre stützt, über dem entsprechenden Theile des Brunnenbodens, und welcher nur 8 bis 10 Centimeter zu betragen braucht* und zweckmäßig um den ganzen Brunnenboden gehen muß, damit derselbe eine Grenze für die Bewegung des Schwimmers bildet;

ϱ' die kleinste Entfernung des obern festen Endes des Hebers von dem der beweglichen Röhre, wenn sie sich auf die Schwelle des Brunnenbodens stützt;

i'_m d'_m die kleinsten Werthe von i', d', welche sich, wie man später sehen wird, auf das größte Totalgefälle H_m beziehen.

Aus der Betrachtung eines durch die verticale Axe des in Rede stehenden Heberschenkels gehenden Durchschnittes, und wenn man sich erinnert, daß der Schwimmer, wenn er seinen tiefsten Stand erreicht hat und die oberen Thore der Schleusenkammer A' geöffnet werden, sich um die Größe v_1 heben muß, ergibt sich leicht für die höchste Lage des Schwimmers die Gleichung:

$$l' - i' + \lambda' - e' - e' = j + y_1 + v_1;$$

und für seine tiefste Lage:

$$s' + \lambda' + d' = j + e' + E' + x'_1, \qquad l' + \varrho' = s' + \lambda'.$$

Die erste dieser Gleichungen gibt für jeden Werth von H:

$$i' = l' + \lambda' - e' - e' - v_1 - (j + y_1),$$

und da sich in diesem Ausdrucke von i' nur die Summe $j + y_1$ nach der Voraussetzung mit H verändern kann; so folgt, daß das Ineinanderschieben der beiden Röhren am kleinsten ist, wenn diese Summe ihren größten Werth hat.

Aber vermöge der Gleichungen (c'), (k'), (l'), und (o') hat man allgemein den Ausdruck:

$$j + y_1 = j_m + M(C + \ddot{T}_m - \dot{T}_i - N) + \ddot{T} - \ddot{T}_m$$

$$= j_m + M(\mathrm{H}_m - N) + \ddot{T} - \ddot{T}_m,$$

dessen Maximum $\ddot{T} = \ddot{T}_m$ entspricht, und folglich gleich:

$$j_m + M(H_m - N) = j_m + y_m,$$

ist, was auch leicht vorher einzusehen war, weil die größte Höhe des Bodens des Schwimmers über dem Boden des Brunnens für das größte Gefälle H_m stattfindet. Man hat folglich endlich für den kleinsten Werth des Ineinandergehens der beiden Röhren:

$$\overset{*}{i}'_m = l' + \lambda' - e' - e' - v_1 - j_m - y_m$$
$$= l' + \lambda' - e' - e' - v_1 - j_m - M(H_m - N),$$

und folglich, wenn i'_m zum voraus gegeben ist:

$$(q')\left\{\begin{aligned} l' + \lambda' &= i'_m + j_m + y_m + e' + e' + v_1 \\ &= i'_m + j_m + e' + e' + v_1 + M(H_m - N), \\ {}^{*}i' &= i'_m + j_m - j + y_m - y_1 = i_m + \ddot{T}_m - \ddot{T}. \end{aligned}\right.$$

Wird dieselbe Untersuchung auf den veränderlichen Werth der Größe:

$$d' = E' + j + x'_1 + e' - s' - \lambda'$$

$$= E'_m + j_m + e' - s' - \lambda' + \frac{A'}{A' + B'}\left[M(H_m - N) + h'_0 - h'_1\right] + \dot{T} - T_{,,}$$

angewandt, so findet man, daß ihr Minimum, welches für das Minimum von $E' + j + x'_1$ stattfindet, ebenfalls dem kleinsten Werthe T_i von $\dot{T}$ oder dem größten Schleusengefälle H_m entspricht, so daß man hat:

$$d'_m = E'_m + j_m + x'_m + e' - s' - \lambda'$$

$$= E'_m + j_m + e' - s' - \lambda' + \frac{A'}{A' + B'}\left[M(H_m - N) + h'_0 - h'_1\right];$$

und folglich, wenn d'_m zum voraus gegeben ist:

$$(r')\left\{\begin{aligned} \lambda' &= E'_m + j_m + x'_m + e' - s' - d'_m \\ &= E'_m + j_m + e' - s' - d'_m + \frac{A'}{A' + B'}\left[M(H_m - N) + h'_0 - h'_1\right], \\ d' &= d'_m + E' - E'_m + j - j_m + x'_1 - x'_m = d'_m + \dot{T} - T_i. \end{aligned}\right.$$

Nachdem die Höhe λ' der beweglichen Röhre auf diese Weise durch lauter bekannte Größen ausgedrückt ist, substituirt man sie in dem obigen Ausdruck (q') der Summe $l' + \lambda'$, so daß man l' durch die Formel:

$$(s') \qquad l' = i'_m + d'_m - E'_m + e' + s' + v_1$$

$$+ \frac{B'}{A' + B'} M(H_m - N) - \frac{A'}{A' + B'}(h'_0 - h'_1);$$

berechnen kann, woraus sich endlich durch blose Addition oder Subtraction ergibt:

$$(t')\begin{cases} \varrho' = s' + \lambda' - l' \\ = 2E'_m - e' - 2d'_m + j_m - i'_m - s' + e' - v_1 + 2x'_m - y_m \\ = 2E'_m - e' - 2d'_m + j_m - i'_m - s' + e' - v_1 \\ + \dfrac{A' - B'}{A' + B'} M(H_m - N) + \dfrac{2A'}{A' + B'} (h'_0 - h'_1). \end{cases}$$

Das kleinste Ineinandergreifen i'_m der beiden Röhren hängt von der Form und Höhe ihrer Verliederung ab, welche aber wenigstens $0_m,2$ des kleinsten Ineinandergehens betragen muß, damit die beiden Röhren bei dem geringsten Steigen des Niveaus, welches in der mittlern Schleusenkammer A der höchsten Lage des Schwimmers, wo derselbe fast leer ist, entspricht und mit dem in der untern Schleusenkammer A' alsdann gleich hoch liegt, nicht auseinander herausgehen. Diese Höhe kann nämlich die Grenze, welche ihr durch die untern Thore von A' gesetzt sind, nur dann überschreiten, wenn die oberen Thore dieser Schleusenkammer verschlossen bleiben, und die mittlere Schleusenkammer A aus der oberen A'' durch Filtration, oder auf andere Weise Wasserzufluß erhält, so daß das Niveaü über seine regelmäßige Lage steigt, welches Steigen keine andere Grenze hätte, als die der Höhe der untern Thore von A, wenn nicht vermittelst der Heberklappen das Steigen des Schwimmers verhindert würde, so daß aber alsdann ein wesentlicher Verlust an Wasser stattfände.

§. 340. Wenn man der kleinsten Druckhöhe d'_m, welche über der Mündung der beweglichen Röhre stattfinden muß, keine Größe geben kann, welche viel kleiner ist, als ε, so kann dieselbe auch nicht sehr groß gemacht werden, weil dadurch die kleinste Entfernung ϱ' des obern Randes des Hebers von dem der Mündung der Röhre vermindert wird, welche aber nicht kleiner, als $\frac{1}{2}D$ werden darf, weil sonst während eines Theiles des Aufsteigens des Schwimmers innere Contractionen stattfinden würden. Wegen dieses Umstandes und weil U und ε im Anfange der Bewegung, oder bald nach der Oeffnung der Heberklappen sehr klein sind, sowie endlich wegen des Erfordernisses: die Geschwindigkeit des Schwimmers vor dem Verschlusse der Heberklappen allmälig vermindern zu können, um Stöße zu verhindern, wird es genügen, $d'_m = 0_m,12$ oder $= 0_m,10$ zu nehmen.

Da ferner ϱ' nach der Formel (t') mit der kleinsten oder anfänglichen Höhe $E'_m - e'$ der Wasserschicht über der Mündung der beweglichen Röhre in der höchsten Lage des Schwimmers zunimmt; so folgt, daß E'_m aus verschiedenen Gründen nicht bis auf $0^m,5$ vermindert werden kann, sondern wenigstens gleich $0^m,10 = d'_m$ genommen werden muß.

Diese Vergrößerung von E'_m, wodurch, wie schon bemerkt, die Stabilität des Schwimmers vermehrt wird, hat keinen andern Nachtheil, als daß dadurch die Höhe der untern Abtheilung des Schwimmers etwas vergrößert wird; denn sonst ist ihr Einfluß in der Gleichung des Gleichgewichtes in §. 332, worin B' sehr wenig von B verschieden ist, ganz unmerklich, und kann unbeachtet bleiben. Da in Beziehung auf die anfängliche Druckhöhe E'' in der obern Abtheilung des Schwimmers gerade das Gegentheil stattfindet, so folgt, daß für diese Abtheilung die Umstände weniger günstig sind, und der Werth von E'' auf den früher angegebenen beschränkt werden muß. Ueberhaupt scheint es nach dem Ausdrucke von ε am zweckmäßigsten zu sein, das Verhältniß von E'_m zu E'' so zu bestimmen, daß dasselbe sehr wenig von dem Verhältnisse $(D' U'_1)^{\frac{2}{3}} : (D'' U''_1)^{\frac{2}{3}}$ verschieden ist, welche Regel der Stabilität günstig ist, wenn $D'' U''_1 < D' U'_1$, was stattfindet, wenn $Q'_1 > Q''_1$ oder $A' > A''$, d. h. der Querschnitt der untern Schleusenkammer größer ist, als der der obern (§. 320).

§. 341. Wir wollen nun den verticalen Schenkel des Hebers betrachten, welcher bei der ursprünglichen Einrichtung des Girard'schen Schleusensystems mit der obern Abtheilung des Schwimmers in Verbindung steht, indem er durch eine gußeiserne cylinderische Röhre geht, welche bei beiden Böden des Schwimmers mit einander verbindet. Da die obere Mündung dieses Heberarmes oder dieser Röhre auf die weiter oben angegebene Weise eingerichtet werden kann, so besteht die ganze Schwierigkeit darin: zu verhüten, daß das obere feste Ende des Hebers gegen das Ende der niedersteigenden Bewegung des Schwimmers die Mündung der Röhre nicht erreicht, was offenbar geschieht, wenn man den obern Theil des verticalen Schenkels des Hebers durch einen beweglichen Cylinder ersetzt, der den untern festen Theil umschließt, und sich an die Wände der obern Röhre anlegt, wenn der Schwimmer seine tiefste Lage erreicht, eine ganz ähnliche Einrichtung wie bei Fernröhren. Da die mittlere bewegliche Röhre an ihrem obern Ende einen kleinen äußern Rand hat, welcher einem innern Rande an der Grundfläche der andern Röhre entspricht, die mit den Böden des Schwimmers fest verbunden ist; so sieht man leicht ein, daß sie allen Bewegungen des Schwimmers folgt, außer in dem Augenblicke, wo sich derselbe gegen den ringförmigen Vorsprung auf den Brunnenboden stützt. Auch ist der obere und untere Theil der beweglichen Röhre gehörig geliedert, so daß das Wasser aus der obern Abtheilung des Schwimmers, auf welches ein veränderlicher Drucküberschuß:

$$e' + X' + E'' + x'' - (y + y_0 + z)$$
$$= v + v'' - h'' = H + H'' - z - z'' - h'',$$

wirkt, nicht entweichen kann. Dieser Drucküberschuß hat seinen größten Werth $H + H' - h''_0 = H - H' - h''_0$ für $h'' = h''_0$ und $y = z = x'' = z'' = 0$, welche Werthe der höchsten Lage des Schwimmers entsprechen, während sein kleinster Werth $v_1 + v''_1 - h''_1 = h''_0$ nach der Gleichung (q) der tiefsten Lage des Schwimmers entspricht, für welche $v = v_1$, $v'' = v''_1$ und $h = h''_1$ ist.

§. 342. Bezeichnen nun weiter:

l'', λ'' die Höhen des festen Schenkels des fraglichen Hebers und des beweglichen Stückes, indem die der obern Röhre $= x' + e'$ ist;

i''_m ihr kleinstes Ineinandergehen bei der höchsten Lage des Schwimmers;

o''_m das entsprechende Ineinandertreten der festen und der beweglichen Röhre;

s'' die Höhe des Vorsprunges an dem Brunnenboden, auf welchen sich die Röhre stützt, wenn der Schwimmer seinen tiefsten Stand erreicht hat;

ϱ''_m die kleinste Entfernung des obern Randes der erweiterten Mündung der Röhre von dem obern Ende des festen Heberstückes, welche offenbar der tiefsten Lage des Schwimmers entspricht, und dieselbe sein soll, wie für die mittlere bewegliche Röhre, wenn sie auf der Schwelle des Brunnenbodens ruht; aber diese letzte Entfernung besser etwas kürzer gemacht wird;

so hat man unter Beibehaltung der frühern Bezeichnungen 1) für die höchste Lage des Schwimmers und das größte Gefälle H_m:

$$l''+\lambda''-i'_m-o''_m=j_m+y_m+v_1;$$

und 2) für die tiefste Lage des Schwimmers bei demselben Gefälle:

$$l''=\lambda''+s'',\quad l''+\varrho''_m=x'+e'+j_m.$$

Diese Gleichungen geben unmittelbar für die unbekannten Größen l'', λ'', ϱ''_m die Ausdrücke:

$$(u')\left\{\begin{aligned}\lambda''&=\tfrac{1}{2}(j_m+y_m+v_1+i''_m+o''_m-s''),\\ l''&=\tfrac{1}{2}(j_m+y_m+v_1+i''_m+o''_m+s''),\\ \varrho''_m&=x'+e'-\tfrac{1}{2}(y_m-j_m+v_1+i''_m+o''_m+s'');\end{aligned}\right.$$

in welche man, die aus den Gleichungen (x), (c') und (f') abgeleiteten Werthe substituirt, indem man nöthigenfalls auf die Vertauschung des untern Inder $({}_1)$ in $({}_m)$, welcher sich auf das größte Totalgefälle bezieht, achtet.

Was die Größen j_m, i''_m und s'' anlangt, so werden ihre kleinsten Werthe zum voraus, nach den bereits in §§. 335 und 339 angegebenen Bedingungen regulirt, und außerdem muß man so viel als möglich zu verhindern suchen, daß die feste Heberspitze, sowie die der mittlern beweglichen Röhre nicht in die erweiterte obere Mündung der festen Röhre trete, wozu erfordert wird, daß ϱ''_m größer ist, als 0,4 des größten Halbmessers dieser Mündung. Wir wollen uns jedoch bei diesen Einzelheiten nicht länger aufhalten, weil sie für jeden Ingenieur, welcher mit den Theorien und den Erfahrungssätzen der Hydraulik vertraut ist, keine Schwierigkeiten darbieten. Uebrigens sind diese verschiedenen Rechnungen bei weitem nicht so weitläufig, als sie nach den Formeln oder Gleichungen zu sein scheinen, und geben die Mittel an die Hand, die praktischen Grundlagen des Girard'schen Schleusensystemes in allen Fällen zu berechnen.

Schleusensystem mit einem Schwimmer von drei Abtheilungen und mit Sparbecken.

§. 343. Ehe wir zu den Fällen übergehen, die bei der Schifffahrt insbesondere vorkommen, wollen wir zeigen, wie sich die vorhergehenden Rechnungen auch in dem Falle leicht anwenden lassen, wo der Schwimmer noch eine mittlere Abtheilung hat, welche einem Neben- oder Sparbecken entspricht, und etwa angewandt werden, um die Amplitude der Bewegung des Schwimmers ꝛc., zu vermindern, wobei das Sparbecken ebenfalls eine zwischen B' und B'' befindliche Lage haben muß. Da übrigens dieses Sparbecken von dem übrigen Theile der Vorrichtung ganz unabhängig ist, so kann dasselbe auch keine wesentliche Abänderung in dem bisher Gesagten bewirken.

Wenn wir alle Größen, welche sich auf die mittlere Abtheilung des Schwimmers beziehen, mit denselben Buchstaben wie früher, aber mit drei Accenten (‴) behaftet, bezeichnen; so ergeben sich sofort die folgenden Gleichungen:

$$(c'') \qquad B'x' = A'z', \quad B''x'' = A''z'', \quad B'''x''' = A'''z''',$$

$$(d'') \qquad P_0 = \Pi B y_0,$$

$$(e'') \qquad B'x' + B''x'' + B'''x''' = B\,(y + z),$$

$$(f'') \qquad By = Az,$$

$$(g'') \qquad h' = h'_0 + y - x' - z', \quad h'' = h''_0 + y - x'' - z'',$$
$$h''' = h'''_0 + y - x''' - z''',$$

welche den Fundamentalgleichungen in §. 319 analog sind, und woraus unmittelbar folgt:

$$(h'') \quad x' = \frac{A'}{A' + B'}\,(y + h'_0 - h'), \quad x'' = \frac{A''}{A'' + B''}(y + h''_0 - h''),$$
$$x''' = \frac{A'''}{A''' + B'''}\,(y + h'''_0 - h'').$$

Vermöge der Bedingung der Gleichförmigkeit der Bewegung des Wassers und des Schwimmers hat man also:

$$(i'') \qquad \frac{A'B'}{A' + B'} + \frac{A''B''}{A'' + B''} + \frac{A'''B'''}{A''' + B'''} = \frac{B(B + A)}{A},$$
$$\frac{A'B'}{A' + B'}\,(h'_0 - h'_1) + \frac{A''B''}{A'' + B''}\,(h''_0 - h''_1)$$
$$+ \frac{A'''B'''}{A''' + B'''}\,(h'''_0 - h'''_1) = o.$$

§. 344. Mit Hülfe der Gleichung (i'') kann man die Querschnitte B, B', B'', B''' des Kastens durch ähnliche Verfahrungsarten, wie früher (§. 333) bestimmen, indem man bemerkt, daß die Werthe dieser immer sehr wenig von einander verschiedenen Querschnitte hier zwischen den Grenzen A und $(\sqrt{3} - 1)\ A = 0{,}732\,A$ liegen.

Die andere Bedingungsgleichung kann auf die einfachere Form:

$$(j'') \qquad h'_1 - h'_0 + k\,(h''_1 - h''_0) + k'(h'''_1 - h'''_0) = o,$$

gebracht werden, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{A''B''(A' + B')}{A'B'\,(A'' + B'')} = k, \quad \frac{A'''B'''(A' + B')}{A'B'(A''' + B''')} = k'.$$

Ebenso erhält man, vermöge der Bedingung der Gleichförmigkeit der Bewegung des Wassers in dem Heber für die mittlere Abtheilung des Schwimmers:

$$(k'') \qquad S'''U'''_1 = \frac{A'''B'''}{A'''+B'''} V_1 = Q'''_1,$$

und

$$(l'') \qquad (m'')\ h'''_1 = \frac{4a'''}{\pi g}\frac{Q'''_1}{D'''^2} + \frac{8b'''Q'''^2_1}{\pi^2 g D'''^4}\ h'''_1$$

$$= \frac{4a'''A'''B'''}{g\pi D'''^2(A'''+B''')} V_1 + \frac{8b'''A'''^2B'''^2}{g\pi^2 D'''^4(A'''+B''')^2} V_1^2,$$

welche man mit den Gleichungen (k), (l) und (m) verbinden muß, indem man zugleich auf die Coefficienten a''' und b''' die früheren Bestimmungen ausdehnt, welche sich auf a', a'' und b' und b'' beziehen.

Werden die Werthe von h'_1, h''_1 und h'''_1 in die Gleichung (j'') substituirt, so erhält man eine Gleichung, welche (n) ganz analog ist, und vermittelst welcher man, wenn der Apparat bereits construirt wäre, die Geschwindigkeit V_1 des Kastens nach den gegebenen anfänglichen Druckhöhen h'_0, h''_0, h'''_0 berechnen könnte. Denn diese geben unmittelbar den Werth der aus der Gleichung (j'') abgeleiteten Funktion:

$$h'_1 + kh''_1 + k'h'''_1 = h'_0 + kh''_0 + kh'''_0,$$

welche der aus der Gleichung (n) abgeleiteten Function $h'_0 + kh''_0$ analog ist, und zur Bestimmung der fraglichen Geschwindigkeit hinreicht. Auch steht diese Function mit dem Wasserverluste wegen der Ueberwindung aller Widerstände der Bewegung des Apparates noch in derselben einfachen Beziehung, wie man später sehen wird.

Es wird ferner nicht nöthig sein, die analogen Formeln von denen in §. 323 für den gegenwärtigen Fall speciell aufzustellen, vermittelst welcher man den Durchmesser D''' des dritten Hebers als Function der Druckhöhe h'''_1, der Ausflußmenge Q'''_1, oder der mittleren Geschwindigkeit V_1 des Kastens bestimmen kann. Was ferner die Bedingungsgleichungen (q) und (r) für die Regelmäßigkeit und Periodicität der Bewegung des Schwimmers anlangt, so finden sie auch in dem gegenwärtigen Falle unverändert statt; nur muß man noch folgende:

$$(q'') \qquad h'''_1 + h'''_0 = v_1 = \frac{A'(h'_1 + h'_0)}{B + A + A'},$$

hinzufügen, welche ausdrückt, daß die anfänglichen Druckhöhen in Beziehung auf die mittlere Abtheilung des Schwimmers und das Sparbecken im Anfange jeder Operation, d. h. nach der Oeffnung der obern Thore der vollen Schleusenkammer A wieder dieselben werden.

Für die Gleichungen (q), (r), (q'') und (j'') kann man durch Elimination folgende setzen, worin q den Wasserverlust ausdrückt, welcher während eines Auf- und Niedersteigens des Schwimmers stattfindet, so daß man hat:

$$(r'')\left\{\begin{array}{l} h'_1 + h'_0 = \dfrac{B+A+A'}{A'(B+A)}\,q,\quad h''_1 + h''_0 \\ = \dfrac{B+A+A''}{A''(B+A)}\,q,\quad h'''_1 + h'''_0 = \dfrac{q}{A+B}, \\ h'_1 + kh''_1 + k'h'''_1 = h'_0 + kh''_0 + k'h'''_0, \end{array}\right.$$

was auf die Relationen (x) in §. 326 zurückkommt, welche unmittelbar die Niveauveränderungen v'_1, v_1, v''_1, vermittelst des gegebenen Werthes des Wasservolumens q geben.

$$(x'')\qquad q = A'v'_1 = (B+A)v_1 = Av''_1.$$

Wenn man in die vierte der Gleichungen (r'') die Werthe von h'_1, h''_1, h'''_1, welche sich aus den drei ersten ergeben, substituirt; so erhält man die neue Relation:

$$(u'')\quad h'_0 + kh''_0 + k'h'''_0 \text{ oder } h'_1 + kh''_1 + k'h'''_1 = \frac{q}{2i_1(A+B)},$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$(t'')\qquad \frac{B+A+A'}{A'} + k\,\frac{B+A+A''}{A''} + k' = \frac{1}{i_1}.$$

Diese Relation (u'') ist für den gegenwärtigen Fall die analoge von (u) für einen Schwimmer von zwei Abtheilungen. Substituirt man in dieselbe die Werthe von h'_1, h''_1, h'''_1, welche die Formeln (l) und (l''), oder (m) und (m'') geben; so erhält man eine neue Gleichung, welche in Beziehung auf V_1 vom zweiten Grade ist, die Gleichung (v) ersetzen kann, und woraus sich in Beziehung auf die beliebige Verminderung des Wasserverlustes ꝛc., dieselben Folgerungen ergeben.

Wenn man endlich die Gleichung (u'') mit den drei ersten der Gleichungen (r'') verbindet, und darin die Größen h'_0, h''_0, q und V_1 als willkürliche oder unabhängige betrachtet; so erhält man zur Berechnung von h'_1, h''_1, h'''_1 und h'''_0 die Formeln:

$$(y'')\left\{\begin{array}{l} h'''_1 = \dfrac{(2k'i_1 - 1)\,q}{2k'i_1\,(A+B)} + \dfrac{k}{k'}\,h''_0 + \dfrac{1}{k'}\,h'_0, \\[2ex] h''_1 = \dfrac{B+A+A''}{A'(B+A)}\,q - h''_0, \\[2ex] h'''_0 = \dfrac{q}{2k'i_1(A+B)} - \dfrac{k}{k'}\,h''_0 - \dfrac{1}{k'}\,h'_0, \\[2ex] h'_1 = \dfrac{B+A+A'}{A'(B+A)}\,q - h'_0, \end{array}\right.$$

welche in dem gegenwärtigen Falle die Formeln (y) des vorhergehenden Falles vertreten, und wovon man für die Bestimmung der Heberdurchmesser einen ähnlichen Gebrauch machen kann, wenn die Werthe der willkürlichen Größen h'_0, h''_0, q oder V_1, welche man, wie man sogleich sehen wird, auch constant annehmen kann, bestimmt sind.

§. 345. Die Gleichungen (z), (a'), (c'), (d') und die analogen, finden auch in dem gegenwärtigen Falle statt, und können zur Berechnung der Partialgefälle H, H', H'', sowie der Amplitude y_1 der Bewegung des Kastens für ein gegebenes Totalgefälle H dienen, wofern die Werthe von q, h'_0, h'_1, h''_0 und h''_1, welche nach der Voraussetzung gegen das Gefälle H immer sehr klein sind, vorher bestimmt sind. Nur ist der Zahlencoefficient M jetzt nicht mehr nahezu der Einheit gleich, sondern vermöge der Gleichung (i'') weit kleiner; denn man hat:

$$\frac{1}{M} \text{ oder } \frac{B}{A} + \frac{B'}{A'+B'} + \frac{B''}{A''+B''} = 1 + \frac{A'''B'''}{B(A'''+B''')}$$
$$- \frac{A'(A''+B'')(B-B') + A''(A'+B')(B-B'')}{B(A'+B')(A''+B'')}$$

und da die innern Querschnitte B', B'' des prismatischen Kastens immer sehr wenig von dem äußern Querschnitte desselben B verschieden sind; so folgt, daß das letzte Glied im zweiten Theile dieser Gleichung, gegen die Summe der beiden ersten, welche die Einheit um so mehr übersteigt, als A''' größer ist, wie B''', vernachlässigt werden kann. Für die Gleichungen in §§. 331, welche sich auf die verticalen Dimensionen der Abtheilungen des Schwimmers beziehen, müssen dagegen die folgenden gesetzt werden:

1) für ein beliebiges Totalgefälle H:

$$x' = E' + x'_1 + j' + e''', \quad x''' = E''' + x'''_1 + j''' + e'',$$
$$x'' = E'' + x''_1 + j'',$$
$$x' + x''' = E' + h'_0 + H + H'' - h''_0 - E''$$
$$= E' - E'' + \mathrm{H} - H' + h'_0 - h''_0,$$

woraus sich für die mit dem Totalgefälle H veränderlichen Größen E', j', j'', j''', wenn die übrigen Größen x'_1, x''_1, x'''_1, H, H', H'', welche Functionen von H sind (§. 328 f.), sowie x', x'', x''' bekannt sind, folgende Ausdrücke ergeben:

$$(e'')\left\{\begin{aligned} &j' = x' - x'_1 - E' - e''', \quad j''' = x''' - x'''_1 - E''' - e'', \\ &j'' = x'' - x''_1 - E'', \\ &E' = E'' + x' + x''' - \mathrm{H} + H' - h'_0 + h''_0; \end{aligned}\right.$$

2) In dem Falle des größten Totalgefälles H_m, und wenn E'', E'''

wie bei einem Schwimmer mit zwei Abtheilungen als constant angenommen werden, die Gleichungen:

$$(f'')\left\{\begin{array}{c} x' = E'_m + x'_m + j'_m + e''', \; x''' = E''' + x'''_m + j'''_m + e'', \\ x'' = E'' + x''_m + j''_m, \\ x' + x''' = E'_m - E'' + \mathrm{H}_m - H'_m + h'_0 - h''_0; \end{array}\right.$$

welche zur Bestimmung der Höhen x', x'', x''' der resp. Abtheilungen des Schwimmers als Functionen von H_m dienen, wofern man die Größen j'_m, j''_m, E'' so annimmt, daß der Bedingungsgleichung:

$$(g'')\; j'_m + j'''_m = \mathrm{H}_m - H'_m - E'' - E''' - e'' - e''' - x'_m - x'''_m + h'_0 - h''_0,$$

Genüge geschieht, welche sich aus der Verbindung der vorhergehenden Gleichungen ergiebt, und der Gleichung (g') entspricht.

§. 346. Wenn man die Werthe von x', x'', x''' in die allgemeinen Ausdrücke von E', j', j'', j''' substituirt und die Gleichungen (z), (c'), (d') oder die analogen von (z) für die dritte Abtheilung des Schwimmers berücksichtigt, so erhält man die sehr einfachen Ausdrücke:

$$(h'')\left\{\begin{array}{c} E' = E'_m + \left(1 - \frac{B'M}{A' + B'}\right)(\mathrm{H}_m - \mathrm{H}), \\ j' = j'_m + (M - 1)\;(\mathrm{H}_m - \mathrm{H}) \\ j''' = j'''_m + \frac{A'''M}{A''' + B'''}\,(\mathrm{H}_m - \mathrm{H}), \\ j'' = j''_m + \frac{A''M}{A'' + B''}\,(\mathrm{H}_m - \mathrm{H}), \end{array}\right.$$

welche mit den, für einen Schwimmer mit zwei Abtheilungen gefundenen Ausdrücken (h') übereinstimmen. Endlich hat man in dem gegenwärtigen Falle für die Bedingung des hydrostatischen Gleichgewichtes (§. 332):

$$P_0 = P + \Pi B' E' + \Pi B'' E'' + \Pi''' B''' E''';$$

folglich wegen:

$$P_0 = \Pi B y_0, \quad y_0 = h'_0 + E' + e',$$

die neue Relation:

$$h'_0 = \frac{P}{\Pi B} + \frac{B''}{B}\,E'' + \frac{B''}{B}\,E'' - \left(\frac{B - B'}{B}\right) E'$$

$$= \frac{P}{\Pi B} + \frac{B''}{B}\,E'' + \frac{B'''}{B}\,E''' - \left(\frac{B - B'}{B}\right) E'_m$$

$$- \left(\frac{B - B'}{B}\right)\left(1 - \frac{B'M}{A' + B'}\right)(\mathrm{H}_m - \mathrm{H});$$

wo H beliebig, und $\frac{B-B'}{B}$ ein Bruch ist, welchen man wieder möglichst klein annehmen muß, um den Einfluß des letzten Gliedes möglichst zu vermindern, und h'_0, P, E'', E''' nahezu constant, und von den Veränderungen $H_m - H$ des Schleusengefälles unabhängig zu machen.

Zu dem Zwecke substituirt man in dem obigen Ausdruck von h'_0 den mittlern Werth dieser Veränderungen und nimmt die Größen P, E'_m, E'', E''' ungefähr so an, wie wir weiter oben (§. 332) angegeben haben, d. h. so, daß man für h'_0 den mittlern oder constanten Werth erhält, welchen man zum Grunde legen will.

§. 347. Wegen der vollständigen Analogie, welche sich zwischen dem gegenwärtigen und dem vorhergehenden Falle durch die Symmetrie der einander entsprechenden Formeln genugsam zu erkennen gibt, brauchen wir diese Untersuchung nicht weiter fortzusetzen; denn sie läßt sich leicht auf eine größere Anzahl von Abtheilungen des Schwimmers ausdehnen, wenn solches überhaupt einen practischen Nutzen hätte, und wir wollen deßhalb blos noch die Näherungsformeln mittheilen, welche in dem gegenwärtigen Falle zur Bestimmung der wichtigsten verticalen Dimensionen des Apparates dienen können, wenn man bei der Berechnung desselben die sehr kleinen Größen q, h'_0, h''_0, N, $B-B'$, $B-B''$ rc., vernachlässigt:

Kleinste Höhe der untern Abtheilung des Schwimmers:

$$x' \text{ oder } x_m = \frac{A'}{A'+B}\, y_m = \frac{A'M}{A'+B}\, H_m;$$

kleinste Höhe der mittlern Abtheilung desselben:

$$x''' \text{ oder } x'''_m = \frac{A'''}{A'''+B}\, y_m = \frac{A'''M}{A'''+B}\, H_m;$$

kleinste Höhe seiner obern Abtheilung:

$$x'' \text{ oder } x''_m = \frac{A''}{A''+B}\, y_m = \frac{A''M}{A''+B}\, H_m;$$

kleinste Totalhöhe des Schwimmers, wenn man die Bedingungsgleichung (i') berücksichtigt:

$$x'_m + x'''_m + x''_m = \left(\frac{A'}{A'+B} + \frac{A''}{A''+B} + \frac{A'''}{A'''+B}\right) y_m = \frac{B+A}{A}\, MH_m;$$

kleinste Tiefe des Brunnens unter dem Niveau des Unterwassers:

$$j_m + x'_m = j_m + \frac{A'}{A'+B}\, y_m = j_m + \frac{A'M}{A'+B}\, H_m;$$

kleinste Tiefe des Brunnens unter dem Niveau des Oberwassers:

$$j_m + x_m + H_m = j_m + \left(1 + \frac{A'M}{A' + B}\right) H_m;$$

kleinste Tiefe des Brunnens unter dem Boden der mittlern oder Hauptschleusenkammer A:

$$j_m + y_m + y_0 - \ddot{T}_m = j_m + E'_m + e' + h'_0 - \ddot{T}_m + MH_m;$$

kleinste Tiefe des Sparbeckens:

$$z'''_m = \frac{B}{A'''}\, x'''_m = \frac{B}{A''' + B}\, y_m = \frac{BM}{A''' + B}\, H_m;$$

Höhe seines Niveaus über dem des Unterwassers:

$$x'_m + z'_m = \left(1 + \frac{B}{A'}\right) x'_m = y_m = MH_m.$$

Anwendungen auf verschiedene specielle Fälle.

§. 348. Unter den vielen Anwendungen, welche sich von den vorhergehenden Formeln machen lassen, wählen wir die folgenden, welche besonders dazu geeignet zu sein scheinen, die Vorzüge des Girard'schen Schleusensystems zu zeigen:

1) auf gewöhnliche einfache Schleusen mit sehr großem obern und untern Behälter;
2) auf gekuppelte Schleusen mit zwei gleich großen Kammern und sehr großem obern und untern Behälter;
3) auf gekuppelte Schleusen mit drei gleich großen Kammern und einem Schwimmer;
4) auf gekuppelte Schleusen mit drei Kammern, wovon die beiden äußern gleich groß sind, während die mittlere, worin sich die Schiffe begegnen, die dreifache Größe hat, und
5) auf gekuppelte Schleusen mit drei gleichgroßen Kammern, nebst einem Hülfsbassin.

Wir setzen übrigens voraus, daß in allen diesen verschiedenen Fällen nur ein Schwimmer angewandt wird, um die Schiffe successive, oder gleichzeitig vermittelst 1, 2 oder 3, auf einander folgende Operationen über die verschiedenen Gefälle zu bewegen.

Es ist nicht unsere Absicht, in alle Einzelnheiten der Rechnungen einzugehen, welche die wirkliche Anlage eines Girard'schen Schleusensystems erfordert, sondern wir wollen blos die wichtigsten Dimensionen und Verhältnisse berechnen, wonach man die Anwendbarkeit und die Vortheile dieses neuen Schleusensystems beurtheilen kann. Wir nehmen deßhalb hier im Allgemeinen die Voraussetzungen und Vereinfachungen an, welche den Näherungsformeln in §. 347 zu Grunde liegen, und auch auf den Fall eines Schwimmers mit zwei Abtheilungen anwendbar sind, wenn man alles, was sich auf das Hülfsbassin und die mittlere Abtheilung des Schwimmers bezieht, hinweg läßt, und außerdem $M=1$ setzt (§. 329).

In diesem Falle hat man folglich zur Bestimmung der kleinsten Höhen der Abtheilungen und des ganzen Schwimmers die Formeln:

$$x' = x'_m = \frac{A'}{A'+B} \mathrm{H}_m, \qquad x'' = x''_m = \frac{A''}{A''+B} \mathrm{H}_m,$$

$$x' + x'' = \frac{A+B}{A} \mathrm{H}_m;$$

während die Amplitude der Bewegung des Schwimmers und die Partialgefälle, welche veränderlich oder constant sind, durch die Näherungsformeln:

$$y_1 = \mathrm{H}, \quad H' = \frac{B}{A'+B} \mathrm{H}, \quad H = \frac{B}{A} \mathrm{H}, \quad H'' = \frac{B}{A''+B} \mathrm{H},$$

$$c' = \frac{B}{A'+B} C, \quad c = \frac{B}{A} C, \quad c'' = \frac{B}{A''+B} C;$$

gegeben werden, und die Tiefe des Brunnens unter dem Boden der resp. Schleusenkammern oder Behälter durch die Näherungsformeln:

$$\dot{Z} \text{ oder } Z' = \frac{A'}{A'+B} \mathrm{H}_m - T_1,$$

$$z = z' + c' = \frac{A'}{A'+B} \mathrm{H}_m + \frac{B}{A'+B} C - T_1, \text{ rc.},$$

woraus sich alsdann leicht die Näherungswerthe für die Längen der verticalen Heberschenkel ergeben.

Um endlich in denselben Voraussetzungen die bewegenden Druckhöhen und die Heberdurchmesser als Functionen der Geschwindigkeit V_1 des Schwimmers und des Wasserverlustes q bei einer doppelten Durchschleusung zu bestimmen, muß man zuvor die Größen k, k_1, i, Q'_1, Q''_1 und B, vermittelst der betreffenden Formeln in §§. 319, 320, 324 und 333 berechnen, indem man darin $B'' = B' = B$, $\delta = 0$ setzt und damit die Gleichungen (u), (y) verbindet.

Was die Werthe der Constanten a', a'', b', b'' anlangt, welche in den Formeln (l) und (m), (o) und (p) für die bewegenden Druckhöhen und die Heberdurchmesser vorkommen; so werden wir bei den folgenden Anwendungen im Allgemeinen setzen:

$$L'' = L', L'' = L', \frac{D''}{D''} = \frac{D'}{D'} = \frac{1}{2}, \frac{S''}{S} = \frac{S'}{S'} = \frac{1}{4},$$

$$r'' = r' = 1^m, 5, \; c'' = c' = 4^m, 712,$$

$$(0{,}0039 + 0{,}0186 r') \frac{c'}{r'^2} = 0{,}0666, \; \frac{1}{\mu''} = \frac{1}{\mu'} = 1, \; \frac{1}{m''} = \frac{1}{m'} = \frac{3}{2},$$

woraus folgt:

$$a' = 0{,}00068\,\frac{L'}{D'} + 0{,}000085\,\frac{L'}{D'},$$

$$b' = 0{,}02736\,\frac{L'}{D'} + 0{,}000855\,\frac{L'}{D'} + 1{,}0822,$$

$$a'' = 0{,}00068\,\frac{L''}{D''} + 0{,}000085\,\frac{L''}{D''},$$

$$b'' = 0{,}02736\,\frac{L''}{D''} + 0{,}000855\,\frac{L''}{D''} + 1{,}0822,$$

wenn die Contractionen an den Enden der Heber auf die weiter oben angegebene Weise verhütet werden.

Wenn dieses nicht der Fall wäre, so könnten sich die Größen μ', μ'' nach §. 320 auf 0,5 reduciren, indem $m' = 0{,}6$ würde, und folglich b', b'' die folgenden Werthe hätten:

$$b' = 0{,}02736\,\frac{L'}{D'} + 0{,}000855\,\frac{L'}{D'} + 2{,}0944,$$

$$b'' = 0{,}02736\,\frac{L''}{D''} + 0{,}000855\,\frac{L''}{D''} + 2{,}0944,$$

welche weit größer sind, als die vorhergehenden, und eine Vergrößerung der Heberdurchmesser D' D'' zur Folge hätten, weil diese Durchmesser vermöge der Näherungsformeln (p) nahezu, wie die Quadratwurzeln aus b' und b'' zunehmen, da die Coefficienten a', a'' verhältnißmäßig sehr klein sind. Denn selbst wenn man L' und L' gleich 50^m annähme, würde das Verhältniß von a' zu b', oder von a'' zu b'' höchstens 0,0154 betragen, so daß man sich ohne merklichen Fehler bei den gewöhnlichen Anwendungen der Formeln (p) bedienen kann, wenn man es der größern Genauigkeit wegen nicht vorzieht, statt der Formeln (o) die folgenden:

$$\tfrac{1}{2} D' = \sqrt{\frac{Q'_1}{2\pi g h'_1}}\;\sqrt{a' + \sqrt{2gh'_1 b'}},$$

$$\tfrac{1}{2} D'' = \sqrt{\frac{Q''_1}{2\pi g h''_1}}\;\sqrt{a'' + \sqrt{2gh''_1 b''}},$$

zu nehmen, welche sich leichter numerisch berechnen lassen und eine hier genügende Genauigkeit geben.

Aehnliche Betrachtungen zeigen, daß man die Veränderlichkeit der Heberlängen L' L'' unbeachtet lassen kann, welche von dem Ineinanderschieben herrührt, wodurch ein der veränderlichen Amplitude y proportionales, positives, oder negatives Glied entsteht, welches sich auch unter den ungünstigsten Umständen nicht über $\frac{1}{300}$ des Werthes von b' oder b'' erhebt, weßhalb wir näherungsweise L' und L'' ihrem größten

Werthe gleich setzen, welcher der höchsten Lage des Schwimmers entspricht.

Ferner wollen wir zur Vereinfachung der Rechnungen auch annehmen, daß das Niveau in dem obern und untern Behälter nahezu constant bleibt, was freilich nur dann der Fall ist, wenn die Querschnitte derselben sehr groß sind, so daß man ohne merklichen Fehler in den Formeln $A' = \infty$ oder $A' = A'' = \infty$ setzen kann.

Nachdem diese Bemerkungen vorausgeschickt sind, wollen wir jetzt zu den wirklichen numerischen Anwendungen übergehen, indem wir bemerken, daß die gemachten Voraussetzungen und Vereinfachungen der Rechnungen dem in §. 333 angedeuteten Gange ganz entsprechen, wodurch man gewissermaßen die ersten Näherungswerthe erhält, welche man nothwendig kennen muß, um zu definitiven Werthen zu gelangen, welche dem Systeme zu Grunde gelegt werden müssen.

Einfache Schleuse mit einem Schwimmer von zwei Abtheilungen.

§. 349. Für diesen Fall hat man nach dem Vorhergehenden $A' = A'' = \infty$, $B'' = B' = B$, ꝛc. und folglich, vermöge der Gleichungen (i), (j), (k), (r), (t) und (y):

$$B = A, \quad Q'_1 = Q''_1 = BV_1 = AV_1, \quad k = k_1 = 1,$$

$$i = \tfrac{1}{2}, \quad h'_1 = h''_0 = \frac{q}{2A} - h'_0, \quad h''_1 = h'_0;$$

sowie vermöge der Formeln in §. 348:

$$y_1 = H, \quad x' = x'' = H_m, \quad x' + x'' = 2H_m, \quad h' = h'' = o,$$
$$h = H, \quad z' \text{ oder } z = H_m - T_i, \text{ ꝛc.}.$$

Diese Resultate sind größtentheils unmittelbar einleuchtend, und den Regeln entsprechend, welche Girard für die Construction seines letzten Schleusensystemes angegeben hatte.

Setzt man mit Girard $h'_0 = h''_0 = 0^m{,}05$, $A = 200$ Quadratmeter, und die gleichförmige Geschwindigkeit des Schwimmers $V_1 = 0^m{,}01$ in der Secunde, so daß der Schwimmer eine Höhe von 4^m in $400''$ oder weniger als $7'$ durchläuft; so erhält man:

$$Q'_1 = Q''_1 = o^m{,}01A = 2^{m.c.}, \quad q = o^m{,}2A = 40^{m.c.}, \quad h'_1 = h''_1 = 0^m{,}05.$$

Die bei einer doppelten Durchschleusung verbrauchte Quantität Wasser hat also eine Höhe von $0^m{,}2$ und eine Grundfläche, welche der der Schleusenkammer gleich ist, und diese Höhe reducirt sich folglich für ein Schiff in dem günstigsten Falle, wo auf ein stromaufwärts gehendes Schiff unmittelbar ein stromabwärts fahrendes folgt, auf $0^m{,}1$. Folglich beträgt bei dem Girard'schen Schleusensysteme der Wasserverlust nur $\frac{1}{20}$ von dem, welcher bei einem gewöhnlichen Schleusensysteme und einem Gefälle von 4^m unter denselben Umständen stattfinden würde. Betrüge das Schleusengefälle unter 2^m, so würde der erste Verlust höchstens $\frac{1}{10}$ von dem im zweiten Falle betragen.

Wenn wir ferner annehmen, daß die Contractionen an den Enden der Heber beseitigt sind, und setzen näherungsweise $L' = L'' = 22^m$, $L' = L'' = 12^m$, welches Schleusengefällen von 4^m entspricht; so haben wir:

$$a'' = a' = \frac{0,01596}{D}, \quad b'' = b' = \frac{0,612}{D'} + 1,0822.$$

Wenn wir in den Näherungsformeln (p) in §. 323 zunächst $b' = b'' = 1,0822$ setzen, und außerdem:

$g = 9^m,81,\ \pi = 3,1416,\ h''_1$ oder $h'_1 = o^m,05,\ \ Q''_1$ oder $Q'_1 = 2^{\square m.}$,

so ergibt sich $D' = D'' = 1^m,63$ für den gemeinschaftlichen Werth der Heberdurchmesser, woraus folgt:

$$a' = 0,0098, \quad b' = 1,0822 + 0,3755 = 1,458;$$

und wenn man diese Zahlen in die genauere Formeln in §. 348 substituirt; so erhält man $D' = D'' = 1^m,766$.

Substituirt man endlich nochmals in dieselben Formeln, so findet man:

$$a' = 0,00904, \quad b' = 1,430, \quad \text{und } D' = D'' = 1^m,760,$$

welches Resultat hinreichend genau ist.

Man könnte diese Werthe der Heberdurchmesser, wenn man sie zu groß fände, leicht vermindern, indem man die Geschwindigkeit V_1 des Schwimmers verminderte, oder den Wasserverlust vergrößerte, wenn es die Umstände gestatten. Setzte man z. B. $V_1 = 0^m,005$, so fände man, wenn man die obigen Rechnungen wiederholte, $D' = D'' = 1^m,27$, indem der Wasserverlust $q = 0^m,2\,A$, sowie die bewegenden Druckhöhen $h'_1 = h''_1 = 0^m,05$ ungeändert bleiben. Wenn man dagegen diesen Wasserverlust und diese Druckhöhen doppelt so groß nimmt und $V_1 = 0^m,01$ läßt; so findet man $D' = D'' = 1^m,47$.

Diese Verminderung der Heberdurchmesser wird hier durch einen größern Wasserverlust erhalten, welcher bei einem Schleusengefälle von 4^m nur $\frac{1}{10}$ des Wasserverlustes bei gewöhnlichen einfachen Schleusen beträgt; aber bei einem Gefälle von 2^m etwa $\frac{1}{5}$ des letzten Verlustes betragen würde, so daß in gewissen Fällen das Ersparniß an Wasser und Zeit die größern Kosten des Girard'schen Apparates nicht compensiren könnte. Wenn dagegen $V_1 = 0^m,005$ wäre, so würden die Heberdurchmesser merklich kleiner; aber die Bewegung des Schwimmers würde für eine Ausdehnung oder ein Gefälle von 4^m zu langsam erfolgen, obgleich die zum Durchschleusen erforderliche Zeit nur wenig beträchtlicher wäre, als bei einem gewöhnlichen Schleusensysteme mit demselben Gefälle. Ganz anders würde sich dagegen die Sache bei einem Schleusengefälle von 2^m verhalten, wo die Durchschleusung nur $7'$ dauern würde, wenn man von der im Anfange und am Ende der Bewegung des Schwimmers stattfindenden Verzögerung der Geschwindigkeit abstrahirt, die hier durch die Schnelligkeit compensirt wird, mit welcher man die Heberklappen öffnen kann.

Die kleinen Gefälle sind also hinsichtlich der Verkleinerung der Heberdurchmesser vermittelst einer Verminderung der Geschwindigkeit am vortheilhaftesten; aber weniger vortheilhaft in Beziehung auf Wasserersparniß. Wenn man übrigens die freien Enden der Heber aus dünnem Kupferblech und den übrigen Theil derselben aus Beton verfertigen läßt, so können die Heberdurchmesser sehr wohl $1^m,76$, und auch noch mehr betragen, wodurch der Wasserverlust beträchtlich vermindert wird, ohne daß man die Dauer der Durchschleusung verhältnißmäßig vergrößert, wie man aus der Formel (v) sieht, welche sich, wenn man die Glieder mit a', a'' hinwegläßt, und $A'' = A' = \infty$, $k = 1, B = A$ setzt, auf folgende reducirt:

$$\frac{q}{A} = \frac{32 b' A^2}{g \pi^2 D'^2} \left(\frac{V_1}{D'}\right)^2 = 0{,}3306 b' \frac{A^2}{D'^2} \left(\frac{V_1}{D'}\right)^2.$$

Wenn die Contractionen an den Mündungen der Heber nicht beseitigt wären, so hätte man:

$$b'' = b' = 2{,}0944 + \frac{0{,}612}{D'}$$

und in den obigen Voraussetzungen $D' = 2^m,12$, $D' = 1^m,42$, $D' = 1^m,66$ statt $D' = 1^m,76$, $D' = 1^m,27$, $D' = 1^m,47$, woraus man sieht, wie vortheilhaft es ist, wenn die Contractionen verhütet werden, besonders wenn die Heberdurchmesser und die Geschwindigkeit V_1 des Schwimmers in den Gleichungen (l) und (v) zum voraus gegeben sind, und wenn man bemerkt, daß die bewegenden Druckhöhen h'_1, h''_1, sowie der Wasserverlust q nahezu immer den Größen b', b'' proportional zunehmen, weil die Glieder mit a' und a'' nur einen sehr geringen Einfluß haben.

Aus der vorhergehenden Untersuchung, welche wir nicht weiter ausdehnen, sondern in den folgenden Beispielen noch abkürzen wollen, sieht man zur Genüge, daß das Girard'sche Schleusensystem selbst in dem Falle einfacher Schleusen, welchen wir vorhin betrachtet haben, wesentliche Vorzüge darbietet, namentlich, wenn es sich um Wasserersparniß und Beschleunigung der Schifffahrt handelt, selbst wenn die Kosten und die Schwierigkeiten der Ausführung größer wären, als bei den gewöhnlichen Schleusenanlagen.

Doppelte oder gekuppelte Schleusen.

§. 350. Da in diesem Falle die Schleusenkammern gleich und die obern und untern Behälter sehr groß, oder gleichsam unendlich dagegen sind, so wird der Schwimmer in die untere Schleusenkammer gebracht, damit die entsprechende untere Abtheilung desselben mehr belastet und seine Stabilität vergrößert wird. Auch hat man hier wie in §§. 348 $B'' = B' = B$, $\delta = 0$, ꝛc., sowie:

$$A'' = \infty, \quad A'' = A, \quad B = \tfrac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)\, A = 0{,}618\, A;$$

und mithin nach den Formeln in §§. 348 und 349.

$$Q'_1 = BV_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\,AV_1 = 0{,}618 AV_1,$$
$$Q''_1 = \tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5})\,AV_1 = 0{,}382\,AV_1,$$
$$k = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = 0{,}618,\ k_1 = \tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5}) = 0{,}382$$
$$k + k_1 = 1,\ i = \frac{k_1}{k+k_1} = \tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5}) = 0{,}382;$$

und $x' = H_m$, $x'' = 0{,}618 H_m$, $\mathrm{H}' = o$, $\mathrm{H} = 0{,}618 H$, $\mathrm{H}'' = 0{,}382 H$,
z' oder $z = H_m - T_i$, $c' = o$, $c = 0{,}618 C$, $c'' = 0{,}382 C$, rc.,

wo die Amplitude y_1 der Bewegung des Schwimmers wieder $= H$ ist.

Da in dem gegenwärtigen Falle die Wassermengen Q'_1, Q''_1, welche die Heber während der gleichförmigen Bewegung in der Secunde liefern, nothwendig ungleich sind, so müssen auch die bewegenden Druckhöhen h'_1, h''_1, sowie die Heberdurchmesser D', D'' ungleich sein, indem der größte Durchmesser nach den Formeln in §. 323 dem größten Werthe des Verhältnisses $\frac{Q^2}{h}$ entspricht.

Die Gleichungen (y) geben im Allgemeinen in dem gegenwärtigen Falle für die gegenseitige Beziehung zwischen den anfänglichen und den Enddruckhöhen:

$$h'_1 = 0{,}618\,\frac{q}{A} - h'_o,\quad h''_1 = 0{,}309\,\frac{q}{A} + 1{,}618 h'_o,$$
$$h''_0 = 1{,}309\,\frac{q}{A} - 1{,}618 h'_o,$$

und man kann nach den Angaben in §. 334 den Werth von h'_o suchen, welcher die Heberdurchmesser D', D'' nahezu einander gleich macht, ungeachtet des beträchtlichen Unterschiedes, welcher jetzt zwischen den Werthen von Q'_1 und Q''_1 stattfindet.

Rechnet man nach der allgemeinen Formel in §. 334, oder setzt man sofort:

$$\left(\frac{Q'_1}{Q''_1}\right)^2 = \frac{h'_1}{h''_1} \text{ oder } \frac{h'_1}{h''_1} = \frac{0{,}618\,\frac{q}{A} - h'_o}{0{,}309\,\frac{q}{A} + 1{,}618\,h'_o}$$
$$= \left(\frac{0{,}618}{0{,}382}\right)^2 = 2{,}618,$$

so findet man:

$$h'_o = -0{,}0365\,\frac{q}{A},\quad h'_1 = 0{,}655\,\frac{q}{A},$$
$$h''_1 = 0{,}250\,\frac{q}{A},\quad h''_o = 1{,}368\,\frac{q}{A}.$$

Obgleich der Werth von h'_0 hier **negativ** ist, so gibt derselbe wegen seiner Kleinheit doch eine in der Praxis zulässige Auflösung der Aufgabe; nur ist der Gleichung für das hydrostatische Gleichgewicht (i'), wie man später sehen wird, schwer zu genügen; denn sie drückt blos aus, daß im Anfange des Niedersteigens des Schwimmers das Niveau in dem untern Behälter A' einige Millimeter **unter** dem in der untern Abtheilung des Schwimmers und nicht **über** demselben liegen muß. Man muß aber annehmen, daß die veränderliche Druckhöhe h'_0 vermöge der Bewegung des Apparates, die durch das unter der anfänglichen Druckhöhe h''_0 in die obere Abtheilung strömende Wasser bewirkt wird, schnell gegen ihre positive Grenze h'_1 convergirt, welche in jedem Falle durch die obigen Gleichungen bestimmt wird.

Setzt man:

$$L' = L'' = 22^m, \; L' = L'' = 14^m$$

so erhält man:

$$a'' = a' = \frac{0{,}01615}{D'}, \quad b'' = b' = \frac{0{,}6138}{D'} + 1{,}0822,$$

und wenn man außerdem $q = 0^m{,}1A$, $V_1 = 0^m{,}01$, $A = 200$ Quadratmeter setzt; so ergibt sich nach dem weiter oben angegebenen Verfahren sehr nahe $D' = D'' = 1^m{,}32$.

Substituirt man diesen Werth, sowie die Werthe:

$$Q'_1 = 0{,}618AV_1 = 1^{\square m}{,}236, \quad Q''_1 = 0{,}382AV_1 = 0^{\square m}{,}764, \text{ ꝛc.}$$

in die Ausdrücke (l), so erhält man für die bewegenden Druckhöhen die genaueren Werthe:

$$h'_1 = 0^m{,}0655, \quad h''_1 = 0^m{,}0253,$$
$$\text{und } h'_0 = -0^m{,}0041, \quad h''_0 = 0^m{,}1370,$$

welche sehr wenig von denen verschieden sind, die sich aus der Bedingung der **Gleichheit** der Heberdurchmesser $D' = D''$ ergeben.

Da diese Durchmesser nach §§. 323 u. 348 nahezu in dem Verhältnisse $\sqrt[4]{\frac{Q^2}{h}}$ oder $\sqrt[4]{\frac{V}{h}}$ zunehmen, so sieht man, daß wenn V_1 doppelt so groß oder $= 0^m{,}02$ genommen wird, indem alles übrige ungeändert bleibt, nahezu $D' = D' = 1{,}414 \times 1^m{,}32 = 1^m{,}87$ ist, was genügt, um die Vortheile des Apparates in dem gegenwärtigen Falle zu zeigen, weil z. B. bei einem Schleusengefälle von 5^m die Bewegung des Schwimmers bei so geringen Druckhöhen und einem so kleinen Wasserverluste in 250'' oder etwas mehr als 4' bewerkstelligt werden kann.

Aber diese Vortheile, sowie der, der Verminderung der Höhe:

$$x' + x'' = 1{,}618\,\mathrm{H}_m$$

und des horizontalen Querschnittes B des Schwimmers, werden hier wieder durch die Vergrößerung der Tiefe z oder $z' = \mathrm{H}_m - T_i$ des Bodens des Brunnens unter dem der untern Schleusenkammer A, welche für $\mathrm{H}_m = 5^m$, und $T_i = 1^m,5$ wenigstens $= 3^m,5$ ist, compensirt. Ein solcher Nachtheil ließe sich nur dadurch beseitigen, daß man auf die Bedingung der Stabilität des Kastens verzichtete, und gewissermaßen das Problem umkehrte, d. h. den Brunnen mit der obern Schleusenkammer in Verbindung brächte, und folglich in den Gleichungen $A' = A$, $A'' = \infty$ setzte, was wieder $B = 0{,}618\,A$, aber blos $z' = 0{,}618\,\mathrm{H}_m - T_i$ gäbe, und außerdem $X' = 0{,}618\,\mathrm{H}_m$, $x'' = \mathrm{H}_m$. Der Kasten wäre alsdann oben stärker belastet, als unten, und müßte folglich zwischen sehr starken verticalen Leitungen sich bewegen.

Auch wollen wir noch bemerken, daß, wenn die Bedingung der Gleichheit der Heberdurchmesser aufgegeben wird, statt derselben eine andere Bedingung erfüllt werden kann, wodurch die Handhabung des Apparates oder die Regulirung der Niveaus erleichtert, und der gegenwärtige Fall dem vorhergehenden sehr nahe gebracht werden kann. Denn wenn man vermittelst der obigen allgemeinen Ausdrücke der bewegenden Druckhöhen, der für die einfache Schleuse stattfindenden besonderen Bedingung $h'_1 = h'_0$ zu genügen sucht; so erhält man gleichzeitig:

$$h'_1 = h'_0 = 0{,}309\,\frac{q}{A}, \quad h''_1 = h''_0 = 0{,}809\,\frac{q}{A}.$$

Alsdann verhalten sich die Heberdurchmesser D', D'' nahezu wie 1,63 zu 1 und wenn man z. B. $A = 200$ Quadratmeter, $q = 0^m,1\,A$, $V_1 = 0^m,01$ nimmt; so findet man die Werthe $D' = 1^m,60$, $D'' = 1^m,00$, welche noch zulässig sind; aber es nicht mehr bleiben, wenigstens für den nach dem Unterwasser gehenden Heber, wenn man bei demselben Wasserverluste q die Geschwindigkeit V_1 verdoppeln oder die Dauer der Bewegung des Schwimmers auf die Hälfte reduciren wollte. Denn man hätte alsdann näherungsweise $D' = 2^m,26$, und $D'' = 1^m,40$, woraus der Vortheil gleicher Heberdurchmesser erhellet, abgesehen von ökonomischen und andern Vortheilen.

Gekuppelte Schleusen mit drei gleichgroßen Kammern.

§. 351. Da diese Schleusenkammern während der ganzen Bewegung des Schwimmers von dem obern und untern Behälter völlig isolirt sind, so kommt ihre Größe in den Fundamentalgleichungen des Systems nicht mehr vor, und sie haben nur insofern einen Einfluß, als sich ihre Niveaus in dem Zeitraume zwischen zwei auf einander folgenden Operationen wegen fremder Ursachen merklich geändert haben. Wie dem auch sei, diese Gleichungen, werden hier:

$$A'' = A' = A, \ B = (\sqrt{2} - 1)\,A = 0{,}414\,A,$$

$$k = k_1 = 1, \ i = \tfrac{1}{2}\,(\sqrt{2} - 1) = 0{,}207,$$

woraus sich unmittelbar ergibt:

$$Q''_1 = Q'_1 = (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})\ AV_1 = 0{,}293 AV_1,$$
$$x' = x'' = 0{,}707\mathrm{H}^m, \quad y_1 = \mathrm{H},$$
$$H' = H'' = 0{,}293\mathrm{H}, \quad H = 0{,}414\mathrm{H},$$
$$c' = c'' = 0{,}293C, \quad c = 0{,}414C,$$
$$z' = 0{,}707\mathrm{H}_m - T_{i}, \quad z = z' + c', \text{ etc.}$$

Ebenso erhält man für die Bedingungen, in Beziehung auf die Regulirung der Niveaus in den verschiedenen Kammern oder Behältern:

$$h'_1 = 1{,}707\ \frac{q}{A} - h'_0, \quad h''_1 = h'_0, \quad h''_0 = h_1.$$

Aus diesen Relationen sieht man sofort, daß das gegenwärtige System hinsichtlich des Wasserverlustes und der Verminderung der horizontalen Querschnitte des Kastens noch vortheilhafter ist, als das vorhergehende, und man kann zur Vereinfachung der Constructionen auch hier die Bedingung machen, daß die Heber gleiche Durchmesser bekommen, was wenigstens näherungsweise gibt:

$$h''_0 = h'_0 = h''_1 = h'_1 = 0{,}854\ \frac{q}{A}.$$

Setzt man z. B. hier:

$$L' = L'' = 32^m, \quad L' = L'' = 16^m,$$

was einem Gefälle von 8^m entspricht; so hat man im Allgemeinen:

$$a'' = a' = \frac{0{,}0231}{D'}, \quad b'' = b' = 1{,}0822 + \frac{0{,}8892}{D'}$$

und wenn man, wie im vorhergehenden Falle $q = 0^m{,}1A$, $A = 200$ Quadratmeter, und zur Abkürzung der Dauer der Bewegung $V_1 = 0^m{,}02$ setzt; so kommt:

$$h''_0 = h'_0 = h''_1 = h'_1 = 0^m{,}0854, \quad Q'_1 = Q''_1 = 1^{\square m}{,}172,$$
$$D'' = D' = 1^m{,}25.$$

Da die Amplitude der Bewegung des Schwimmers nahezu dem ganzen Schleusengefälle gleich ist, so folgt aus der Annahme $V_1 = 0^m{,}02$, daß die Dauer der Bewegung des Kastens für ein Gefälle von 8^m, etwas mehr als 400″ oder 7′ beträgt. Aber da eine dreifache Operation erfordert wird, um die Schiffe durch alle drei Schleusenkammern zu schaffen, so beträgt die ganze Dauer einer Durchschleusung 1200″, welche allerdings wenig von der bei gewöhnlichen Schleusen verschieden ist, aber noch vermindert werden kann, wenn man den gemeinschaftlichen Durchmesser der Heber entsprechend größer macht, oder den Wasserverlust, welcher hier kaum $\frac{1}{25}$ von dem bei gewöhnlichen gekuppelten Schleusen stattfindenden Verluste beträgt, etwas vergrößert.

Nimmt man:

$$q = 0^m,2A, \; V_1 = 0^m,03,$$

so findet man:

$$h''_0 = h'_0 = h''_1 = h'_1 = 0^m,171, \; Q'_1 = Q''_1 = 1^{\square m},758, \; D'' = D' = 1^m,28,$$

und alsdann beträgt die ganze Dauer der Durchschleusung ungefähr $\frac{2}{3}$. $1200'' = 800'' = 14'$.

Andererseits sieht man aus den obigen Näherungsformeln, daß die Tiefe z' des Brunnens unter dem Boden der untern Schleusenkammer sich hier auf $0,707\ \mathrm{H}_m - T_i = 4^m,16$ für $\mathrm{H}_m = 8$ und $T_i = 1^m,5$ reducirt, welches Resultat nur sehr wenig größer ist, als das im vorhergehenden Falle erhaltene.

Gekuppelte Schleusen mit drei Kammern, wovon die beiden äußern gleich groß sind, während die mittlere, worin sich die Schiffe begegnen, die dreifache Größe hat.

§. 352. In diesem Falle hat man die Fundamentalgleichungen:

$$A = 3A'' = 3A', \quad B = (\sqrt{7} - 2)\ A' = 0,646\ A',$$

$$k = k_1 = 1, \quad i = \tfrac{1}{6}\ (\sqrt{7} - 2) = 0,323;$$

woraus sich weiter ergibt:

$$Q''_1 = Q'_1 = \tfrac{1}{6}\ (5 - \sqrt{7})\ A'V_1 = 0,392 A'V_1,$$

$$x' = x'' = \tfrac{1}{6}\ (\sqrt{7} + 1) = 0,608 \mathrm{H}_m,$$

$$H' = H'' = \tfrac{1}{6}\ (5 - \sqrt{7})\ \mathrm{H} = 0,392\ \mathrm{H},$$

$$H = \tfrac{1}{3}\ (\sqrt{7} - 2)\ \mathrm{H} = 0,215 \mathrm{H};$$

$$y_1 = \mathrm{H}, \quad c' = c'' = 0,392 C, \quad c = 0,215 C,$$

$$z' = 0,608\ \mathrm{H}_m - T_i. \quad z = z' + c' \text{ ꝛc.}$$

und die Gleichungen (y) werden hier vermöge der Werthe von B, A, k, k_1 und i:

$$h''_0 = h'_0 = h''_1 = h'_1 = \tfrac{1}{12}\ (\sqrt{7} + 5)\ \frac{q}{A'} = 0,637\ \frac{q}{A'}.$$

Setzt man $A' = 200$ Quadratmeter, $L' = L'' = 32^m$, $L' = L'' = 16^m$, $q = 0^m,2A'$, $V_1 = 0^m,02$, so daß sich der Schwimmer in weniger als $7'$ von einer Höhe $y_1 = \mathrm{H}_m = 8^m$ bewegen kann; so findet man:

$$h''_0 = h'_0 = h'_1 = h''_1 = 0^m,127, \quad Q'_1 = Q''_1 = 1^{\square m},569,$$

$$D' = D'' = 1^m,33;$$

Diese Werthe sind sehr wohl zulässig, und zeigen, daß man die Dauer der dreifachen Bewegung des Kastens auf $\frac{2}{3} \cdot 1200''$ oder ungefähr auf 14' reduciren kann, wenn man die Geschwindigkeit $V_1 = 0^m,03$ nimmt, welche $D' = D'' = 1^m,63$ gibt.

Die Höhe $x' = x'' = 0{,}608 \mathrm{H}_m$ der Abtheilungen des Kastens und die Tiefe z' des Brunnens unter dem Boden der untern Schleusenkammer sind also etwas kleiner, als in dem Falle gleichgroßer Schleusenkammern; allein diese Vortheile werden durch die Vergrößerung des Heberdurchmessers und besonders des horizontalen Querschnittes B des Kastens gewissermaßen compensirt.

Gekuppelte Schleusen mit drei gleichgroßen Kammern und einem Hülfs- oder Sparbecken.

§. 353. Diese Einrichtung ließe sich auf jede der vorhergehenden anwenden, und würde eine große Anzahl verschiedener Combinationen darbieten; allein wir wollen nur den Fall betrachten, wo die Querschnitte der drei Schleusenkammern und des Sparbeckens einander gleich sind, so daß $A' = A'' = A''' = A$ ist. Setzt man außerdem wieder $B' = B'' = B''' = B$, $\delta = 0$ 2c., so ergibt sich aus den Gleichungen in §§. 343 und 344:

$$B = (\sqrt{3} - 1)\,A = 0{,}732A, \quad k = k_1 = k' = 1,$$
$$\frac{1}{\varepsilon_1} = 3 + 2\sqrt{3} = 6{,}466;$$

woraus sich die Näherungswerthe:

$$Q'''_1 = Q''_1 = Q'_1 = (1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{3}) = 0{,}423AV_1,$$
$$M = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{3}) = 0{,}634, \quad y_1 = M\mathrm{H} = 0{,}634\mathrm{H};$$

ergeben; dann aus den Formeln in §. 347 und §. 330 deren letzte Glieder vernachlässigt werden:

$$x''' = x'' = x' = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)\mathrm{H}_m = 0{,}366\mathrm{H}_m, \; H' = H'' = 0{,}268\mathrm{H},$$
$$H = 0{,}464\mathrm{H}, \quad z = 0{,}366\mathrm{H}_m - T_i \text{ 2c.}$$

und endlich aus den Formeln in §. 344:

$$h'''_1 = -1{,}289\,\frac{q}{A} + h''_0 + h'_0, \; h''_1 = 1{,}577\,\frac{q}{A} - h''_0,$$
$$h'_1 = 1{,}577\,\frac{q}{A} - h'_0, \; h'''_0 = 1{,}867\,\frac{q}{A} - h''_0 - h'_0.$$

Da diese letzten Gleichungen zwei bewegende Druckhöhen willkürlich lassen, wofern man für j'_m, j''_m, P, E'' 2c. Werthe nimmt, welche den Bedingungsgleichungen in §§. 331, 345 u. 346 Genüge leisten; so kann man auch in diesem allgemeinen Falle die Bedingung festsetzen: daß die Heberdurchmesser einander gleich seien. Setzt man zur Vereinfachung der Rechnungen wieder $L' = L'' = L''' = 32^m$ und $L' = L'' = L''' = 16^m$, wie im vorhergehenden Falle, und wird außerdem angenommen, daß die Contractionen an den verschiedenen Mündungen so viel als möglich beseitigt sind, so daß man hat:

$$a''' = a'' = a' = \frac{0{,}0231}{D'},\ b''' = b'' = b' = 1{,}0822 + \frac{0{,}8892}{D'},$$

so folgt, aus $Q'_1 = Q''_1 = Q'''_1$ und aus der Form der Ausdrücke (c) und (p):

$$h'''_1 = h''_1 = h'_1 \text{ oder } h''_0 = h'_0,\ 2h'_0 - 1{,}289\,\frac{q}{A} = 1{,}577\ \frac{q}{A} - h'_0;$$

woraus sich ergibt:

$$h'''_1 = h''_1 = h'_1 = 0{,}622\,\frac{q}{A},\ h''_0 = h'_0 = 0{,}955\,\frac{q}{A},$$

$$h'''_0 = -\,0{,}0446\,\frac{q}{A}.$$

Nach dem bereits früher Gesagten muß der letzte negative Werth von h'''_0 als eine practisch brauchbare Auflösung betrachtet werden, welche hier in Beziehung auf das anfängliche hydrostatische Gleichgewicht des Schwimmers keine Schwierigkeiten darbietet. Setzt man z. B. $A = 200$ Quadratmeter, $q = 0^m,1A$ und $V_1 = 0^m,02$, so ergibt sich aus den obigen Formeln, sowie aus deren in §§. 323 u. 348 wegen $Q'''_1 = Q''_1 = Q'_1 = 1{,}688$ Quadratmeter:

$$h'''_1 = h''_1 = h'_1 = 0^m{,}0622,\ \ h''_0 = h'_0 = 0^m{,}0955,$$

$$h'''_0 = -0^m{,}0045.$$

$$D''' = D'' = D' = 1^m{,}59.$$

Diese Werthe sind zuläßig, aber der letzte, etwas große, würde sich auf ungefähr $0{,}84 . 1{,}59 = 1^m{,}34$ reduciren, wenn man den Wasserverlust $q = 0^m,2A$ setzte, indem V_1 ungeändert bleibt, und derselbe würde $= 1^m{,}64$, wenn man zugleich $q = 0^m,\ 2A,\ V_1 = 0^m{,}03$ setzte.

Was die verticalen Dimensionen des Apparates anlangt, so ergibt sich aus der Vergleichung der im Anfange dieses §. aufgestellten Formeln mit den analogen im vorhergehenden Falle, daß sie weit kleiner sind.

Vollständiges Zahlenbeispiel.

§. 354. Die vorhergehenden Anwendungen geben nur erste Annäherungswerthe, wonach man blos den relativen Einfluß der verschiedenen Data auf die Hauptdimensionen oder Verhältnisse des Apparates beurtheilen will, und wir wollen deßhalb an einem Beispiele zeigen, wie man die verschiedenen, bisher vernachläßigten Elemente in Rechnung bringen muß, um zu sehen, welche Veränderungen sie in den ersten Näherungswerthen bewirken können. Wir wählen zu dem Zwecke den Fall in §. 351, wo mit Hülfe eines Schwimmers von zwei Abtheilungen die Schiffe durch drei Schleusenkammern von gleichem Querschnitte bewegt werden müssen, indem wir hier die Fundamentaldata beibehalten, aber die Dicke der Wände des Schwimmers, sowie die freien Spielräume in Rechnung bringen, welche bisher vernachlässigt wurden.

Setzt man:

$$A = 200^{\square m.},\quad H_m = 8^m,\quad q = 0^m,2A,\quad V_1 = 0^m,03,$$

so ergibt sich $D' = D'' = 1^m,28$ für den Werth des Heberdurchmessers und $1^m,3$ für den äußern Durchmesser ihrer beweglichen Röhren, woraus näherungsweise für den horizontalen Querschnitt des Kastens und für das Gewicht der größten Wassermenge in der obern Abtheilung desselben resp. folgt:

$$B = 0{,}414A = 82^{\square m.},8,$$

$$\Pi B x''_m \text{ oder } \Pi B x'' = 1000^k.82^{\square m.},8.0{,}707 H_m = 468317^k.$$

Da die Gesammtfläche, welche die Heber und ihre beweglichen Röhren hinwegnehmen, $= \frac{1}{2}\pi\,(1{,}30)^2 = 2^{\square m.},65$ ist, so wird die ganze Grundfläche des als cylinderisch vorausgesetzten Schwimmers näherungsweise $= 82,\,8 + 2{,}65 = 85^{\square m.},45$, ihr Umfang $= 32^m,77$, und ihr Halbmesser $= 5^m,21$; folglich der freie Spielraum in dem Brunnen um den Kasten herum $= 59^{\square m.},90$, wenn die Breite $= 0^m,18$ gesetzt wird. Es ist also hier $\delta = 0{,}069 = 0{,}07$. Da sich ferner die Last von 468,317 Kilgr. auf die Fläche von 82,8 Quadratmeter vertheilt, und die hohlen gußeisernen Stützen in der untern Abtheilung des Schwimmers einen Widerstand von wenigstens 10 Mill. Kilgr. für das Quadratmeter darbieten; so ist die Summe ihrer Querschnitte höchstens gleich 0,0468 Quadratmeter, der Querschnitt der äußern Wand des Kastens von höchstens $0^m,003$ Dicke und einem Umfange von $32^m,77$ höchstens $=$ 0,0983 Quadratmeter, und endlich die Summe der Querschnitte der festen Röhre der obern Abtheilung und der beweglichen Röhre der untern Abtheilung $= \frac{1}{4}\pi\,(1^m,32)^2 + \frac{1}{4}\pi\,(1{,}30)^2 = 2^{\square m.},69$, folglich ein Ueberschuß von $0^{\square m.},04$ über die entsprechende Summe $2^{\square m.},65$, der äußern Zwischenräume. Mithin ist $B - B'$ kleiner als:

$$0^{\square m.},0468 + 0^{\square m.},0983 + 0^{\square m.},04 = 0^{\square m.}185 \text{ oder } 0{,}00224 = \frac{1}{446}\,B.$$

Was den Querschnitt B'' anlangt, so differirt derselbe von B' um die Größe $0^{\square m.},048$ und die Fläche $\frac{1}{4}\pi\,(1{,}30)^2$, welche die bewegliche Röhre in der untern Abtheilung hinwegnimmt ꝛc., wenn in der obern Abtheilung keine leere Röhre zur Compensation angebracht ist, welche übrigens der Mündung des Hebers der untern Abtheilung entsprechen muß.

Man muß folglich in der Fundamentalgleichung (i), setzen:

$$B'' = B' = 0{,}998B, \quad A'' = A' = A, \quad A = A + \delta B = A + 0{,}07B;$$

wodurch man erhält:

$$\frac{2A}{B + 1{,}002A} = \frac{A + 1{,}07B}{A + 0{,}07B};$$

$$\text{folglich } \frac{B}{A} = 0{,}419,$$

$$\text{und } B' = 0{,}418A,$$

statt 0,414 A, wo A für $A = 200^{\square m.}$ gesetzt werden muß, wodurch das Resultat dieser zweiten Annäherung nicht merklich geändert wird.

Die Formeln (j), ((k), (r) und (y) geben folglich:

$$k_1 = k = 1, \quad i = 0{,}204, \quad Q''_1 = Q'_1 = 0{,}295AV_1,$$

$$h''_1 = h'_0, \; h''_0 = h'_1 = 1{,}69\,\frac{q}{A} - h'_0.$$

Setzt man alsdann:

$$A' = 200^{\square m.}, \; V_1 = 0^m{,}03, \; q = 0{,}2A,$$

und $D' = D''$; so erhält man:

$$Q''_1 = Q'_1 = 1^{\square m.}{,}770, \; h''_0 = h''_1 = h'_1 = h'_0 = 0{,}845\,\frac{q}{A} = 0^m{,}169,$$

$$v_1 = 0{,}69\,\frac{q}{A} = 0^m{,}14, \quad v''_1 = v'_1 = \frac{q}{A} = 0^m{,}2.$$

Diese Resultate sind so wenig von den früher erhaltenen verschieden, daß es fast überflüssig ist, einen neuen Werth des Heberdurchmessers zu berechnen.

Wenn man die Werthe von:

$$A = 1{,}07A, \; B, B'' = B', \; q, \; h_0, \text{ rc.},$$

in die Formeln in §. 328 substituirt, so findet man:

$$M = 1{,}003, N = 0^m{,}538, y_1 = 1{,}003\,(\mathrm{H} - 0^m{,}538) = 1{,}003\mathrm{H} - 0^m{,}54,$$

$$H = 0{,}408\mathrm{H} - 0^m{,}08, \quad H'' = H' = 0{,}297\mathrm{H} - 0^m{,}04,$$

$$x''_m = x'_m = 0{,}707\mathrm{H}_m - 0^m{,}38 = 5^m{,}28, \; y_m = 7^m{,}49;$$

und dann vermittelst der Formeln in §§. 331 und 332:

$$x' = 5^m{,}28 + E'_m + j'_m + e'', \quad x'' = 5^m{,}28 + E'' + j''_m,$$

$$j'_m = \mathrm{H}_m - y_m - \text{rc.} = 0^m{,}31 - E'' - e'',$$

$$h'_0 \text{ oder } 0^m{,}169 = \frac{P}{83800} + 0{,}998E'' - e',$$

wenn man in der letzten dieser Gleichungen, welche sich auf das anfängliche Gleichgewicht des Kastens bezieht, die sehr kleinen Glieder mit dem Factor $B - B'$ vernachlässigt.

Nach dem Näherungswerthe $2x'' = 10^m,56$ der Höhe $x' + x''$ des Kastens kann man das Gewicht seiner Bestandtheile ungefähr auf 16,000 Kilgr. schätzen, und um dieses Gewicht für P in die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichtes substituiren zu können, müßte, wenn man $E'' = 0^m,05$ setzt, (§. 332) die reducirte Dicke e' des untern Bodens des Kastens genau $= 0^m,072$ sein, welcher Werth aber nicht zulässig ist, ungeachtet der Verstärkungsstützen dieses Bodens.

Setzt man $e' = 0^m,04$, so ergibt sich unmittelbar aus der fraglichen Gleichung der Werth von $P = 13{,}333$ Kilgr., welcher 2667 Kilgr. kleiner ist, als das wirkliche Gewicht des Kastens $= 16{,}000$ Kilgr., so daß man folglich Gegengewichte anbringen muß. Wenn aber dieser Unterschied dem ganzen Gewichte des Kastens gleich sein müßte, wie es der Fall sein würde, wenn die anfängliche Druckhöhe h'_0 nahezu = Null wäre (§. 350); so könnte man doch der Bedingung des hydrostatischen Gleichgewichtes, vermittelst des Systemes von Gegengewichten noch genügen, wenn man die anfängliche Wasserschicht E'' noch verminderte, und den untern Boden des Kastens ganz mit Verstärkungsrippen belegte, wodurch die Dicke e' desselben bis auf $0^m,08$ oder $0^m,1$ gebracht werden könnte.

Setzt man nun zur vollständigen Berechnung der verticalen Dimensionen des Kastens:

$$E'_m = 0^m,10, \quad E'' = 0^m,05, \quad e'' = e' = 0^m,04, \quad j''_m = 0^m,03,$$

so erhält man:

$$j'_m = 0^m,22, \quad x' = 5^m,64, \quad x'' = 5^m,36, \quad x' + x'' = 11^m,00.$$

Wenn man endlich zur Bestimmung der gegenseitigen Lage der verschiedenen Böden ꝛc., setzt:

$$j_m = 0^m,2, \quad C = 7^m,6, \quad T_i = 1^m,30, \quad \dot{T}^m = \ddot{T}_m = 1^m,70,$$

was der Annahme $\mathrm{H}_m = 8^m$, entspricht, und dann:

$$o'' = i'_m = i_m = 0^m,20, \quad d'_m = 0^m,1, \quad s'' = s' = 0^m,10, \quad e' = 0^m,01,$$

so ergeben sich aus den Formeln in §§. 335, 339 u. 342 die Werthe:

$$c = 3^m,02, \quad c'' = c' = 2^m,21, \quad \dot{Z} \text{ oder } z' = 4^m,47,$$

$$z = 6^m,68, \quad z'' = 9^m,70, \quad \ddot{Z} = 11^m,91,$$

$$\lambda' = 5^m,42, \quad l' = 2^m,62, \quad \varrho' = 2^m,90,$$

$$\lambda' = 4^m,06, \quad l'' = 4^m,16, \quad \varrho'' = 1^m,72,$$

wovon sich die letzten auf die Dimensionen der verticalen Schenkel der Heber und die sie umschließenden Röhren beziehen. Die Werthe von ϱ' und ϱ'' zeigen insbesondere, daß die Spitzen der Heberschenkel hier nicht in die obern erweiterten Mündungen treten können, so daß man folglich den Werth von d'_m und mithin die Länge des festen Theiles des untern Hebers auf Kosten der Länge λ' seiner beweglichen Röhre merklich vergrößern kann.

Zum Schlusse wollen wir noch die Hauptresultate der vorhergehenden Rechnungen in eine Uebersicht zusammen stellen, so daß man mit einem Blicke die relativen Vortheile der verschiedenen bisher untersuchten Anordnungen des Apparates erkennen kann.

Querschnitte der Schleusenkammern oder Behälter.	Dimensionen des Kastens. Querschnitt B.	Dimensionen des Kastens. Höhe $x' + x''$.	Höhe der Abtheilungen desselben.	Partialgefälle.	Tiefe des Brunnens unter dem Niveau des Unterwass.	Gef. Wasserverluft. q.	Geschwindigkeit des Kastens.	Gleiche Durchmesser d. Heb. für A' od. $A = 200$.	Totalgefälle H.	Entsprechende Dauer des Manövers	Ersparniß an Wasser.	Ersparniß an Zeit.
						m	m	m	m			
Fall I. Einfache Schleuse $A' = A'' = \infty$.	1,000 A	2,000 H_m	$x'' = 1{,}000\,H_m$ $x' = 1{,}000\,H_m$	H = 1,000 H	1,000 H_m	0,2 A 0,2 A 0,4 A	0,005 0,010 0,010	1,27 1,76 1,47	2,00 4,00 4,00	400'' 400 400	0,90 0,95 0,90	0,00 0,20 0,20
Fall II. 2 gekuppelte Schleusenkammern, $A' = \infty, A'' = A$.	0,618 A	1,618 H_m	$x'' = 0{,}618\,H_m$ $x' = 1{,}000\,H_m$	H'' = 0,382 H H = 0,618 H	1,000 H_m	0,1 A 0,1 A 0,2 A	0,01 0,02 0,03	1,32 1,87 1,92	5,00 5,00 5,00	1000 500 333	0,96 0,96 0,92	0,00 0,50 0,67
Fall III. 3 gekuppelte Schleusenkammern, $A' = A'' = A$.	0,414 A	1,414 H_m	$x'' = 0{,}707\,H_m$ $x' = 0{,}707\,H_m$	H'' = 0,293 H H = 0,414 H H' = 0,293 H	0,707 H_m	0,1 A 0,2 A 0,2 A	0,02 0,02 0,03	1,25 1,05 1,28	8,00 8,00 8,00	1200 1200 800	0,92 0,85 0,85	0,20 0,20 0,47
Fall IV. 3 gekuppelte Schleusenkammern, $A' = A'' = \frac{1}{3}A$.	0,646 A'	1,216 H_m	$x'' = 0{,}608\,H_m$ $x' = 0{,}608\,H_m$	H'' = 0,392 H H = 0,215 H H' = 0,392 H	0,608 H_m	0,1 A' 0,2 A' 0,2 A'	0,02 0,02 0,03	1,58 1,33 1,63	8,00 8,00 8,00	1200 1200 800	0,94 0,88 0,88	0,20 0,20 0,47
Fall V. 3 gekuplt. Schleusenkammern mit Hülfsbassin, $A' = A'' = A''' = A$	0,732 A	1,098 H_m	$x'' = 0{,}366\,H_m$ $x = 0{,}366\,H_m$ $x' = 0{,}366\,H_m$	H'' = 0,268 H H = 0,464 H H' = 0,268 H	0,366 H_m	0,1 A 0,2 A 0,2 A	0,02 0,02 0,03	1,59 1,34 1,64	10,00 10,00 10,00	950 950 634	0,94 0,88 0,88	0,37 0,37 0,58
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Erklärung der Figuren.

Fig. 74 ist ein Längenprofil durch die gemeinschaftliche Axe dreier gekuppelter Schleusenkammern von beliebigen Dimensionen, und zugleich ist angenommen: daß die Axe des Schwimmers und des Brunnens in dieses Profil fällt, so daß der Schwimmer und sein Brunnen mit der mittlern oder Hauptschleusenkammer in der Figur zusammenfallen. Die tiefste Lage des Schwimmers, wo seine beiden Abtheilungen fast ganz mit Wasser gefüllt sind, ist durch volle und seine höchste Lage, worin er nur noch zwei dünne Wasserschichten enthält, durch punctirte Linien angegeben.

Fig. 75 ist ein Querprofil durch die verticalen Axen des Schwimmers und der Hauptschleusenkammer, indem die höchste Lage des Schwimmers aber durch volle und seine tiefste Lage durch punctirte Linien angegeben ist.

Fig. 76 ist der Grundriß eines Schwimmers mit 2 Abtheilungen neben einer einfachen Schleusenkammer mit einem unbestimmt großen obern und untern Behälter (Canal).

Fig. 77 ist ein verticaler Durchschnitt nach der gebrochenen Linie *KLMNOPQ* des Grundrisses in Fig. 76, wenn sich der Schwimmer nahezu in seiner höchsten Lage befindet.

Fig. 78 und 79 sind verticale Durchschnitte nach der Linie *XY* des Grundrisses in Fig. 76 in der höchsten und tiefsten Lage des Schwimmers.

Fig. 80 ist der Grundriß und gebrochene verticale Durchschnitt des Schwimmers mit zwei Abtheilungen für eine Schleuse mit zwei Kammern.

Fig. 81 ist der Grundriß desselben Schwimmers für drei gekuppelte Schleusenkammern.

Fig. 82 ist von der vorhergehenden nur darin verschieden, daß die mittlere Schleusenkammer so groß ist, daß sich ein auf- und abwärtsfahrendes Schiff darin begegnen können.

Fig. 83 ist der Grundriß und gebrochene verticale Durchschnitt eines Schleusensystemes mit einem Schwimmer von drei Abtheilungen, drei gekuppelten Schleusenkammern und einem Hülfsbassin.

Dieselben Buchstaben bezeichnen in allen Figuren dieselben, oder ähnliche Gegenstände.

(*A*) ist die mittlere oder Hauptschleusenkammer, welche unterwärts mit dem Brunnen des Schwimmers in Verbindung steht.

(*A'*) ist die untere Schleusenkammer oder der untere Behälter, welcher durch die Heber und Canäle mit der untern Abtheilung des Schwimmers in Verbindung steht.

(*A''*) ist die obere Schleusenkammer oder Behälter, welche ebenso mit der obern Abtheilung des Schwimmers communicirt.

(*B*) ist der Schwimmer, (*B'*) die untere und (*B''*) die obere Abtheilung desselben.

C, *C'* sind Vorrichtungen mit Gegengewichten, um den Schwimmer zu heben, oder im Gleichgewichte zu erhalten.

D', *D''* sind Vorrichtungen mit Sperrklinken zum Verschluß der Heber *S'*, *S''*.

F′, *F″* sind bewegliche Röhren, welche zur Herstellung der Communication zwischen den Hebern *S′*, *S″* und den resp. Abtheilungen des Schwimmers in seinen verschiedenen Lagen dienen.

M′ ist eine leere Röhre, durch welche die Luft aus der untern Abtheilung des Schwimmers entweichen kann.

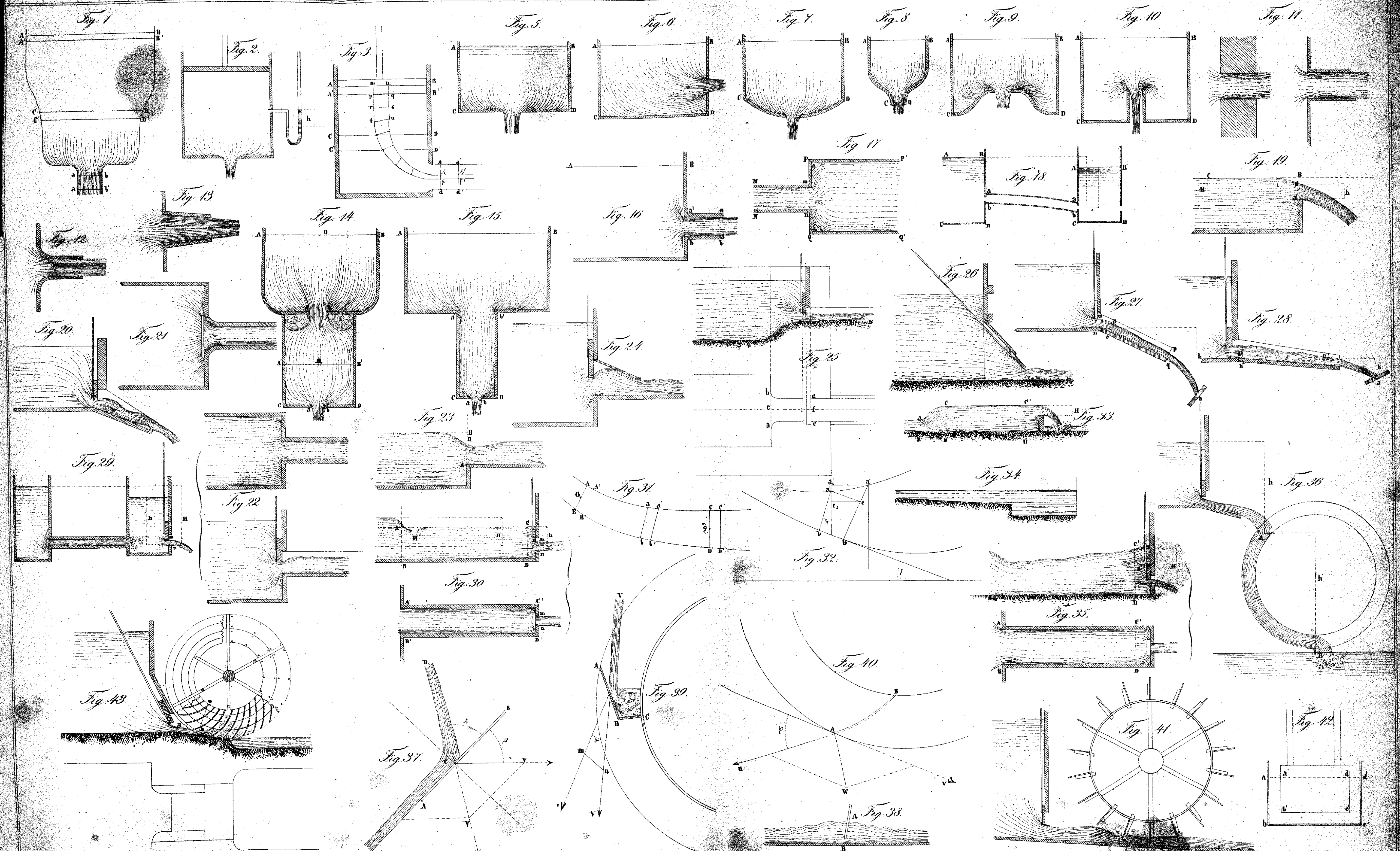
M″ ist eine mit Wasser gefüllte Röhre, welche die Communication zwischen der obern Abtheilung des Schwimmers und dem entsprechenden verticalen Heberarm herstellt.

(*P*), *P* ist der Brunnen für den Schwimmer, welcher unterwärts mit der mittlern Schleusenkammer (*A*) communicirt.

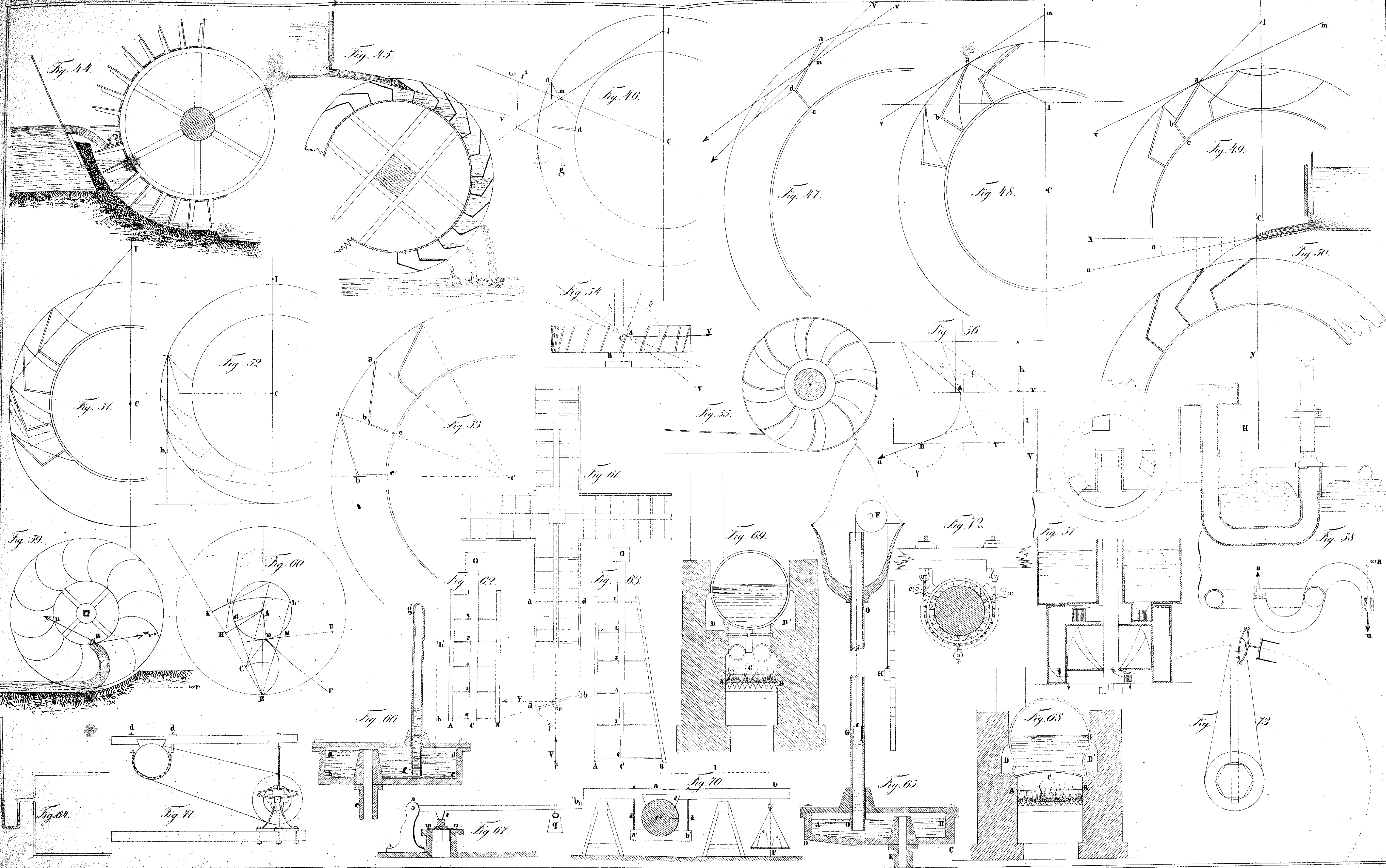
S′, *S″* sind umgekehrte Heber, welche die Communication zwischen den untern und obern Behältern oder Schleusenkammern und den entsprechenden Abtheilungen *B′*, *B″* des Schwimmers herstellen.

S′, *S″* sind die Canäle, welche das Wasser nach den Hebern leiten.

V′, *V″* sind offene cylinderische Ventile, welche zum Oeffnen oder Verschließen der Hebermündungen dienen.



Lith. Anst. v. M. Frommann in Darmstadt.



Lith. Anst. v. M. Frommann in Darmstadt.

Fig. 74.

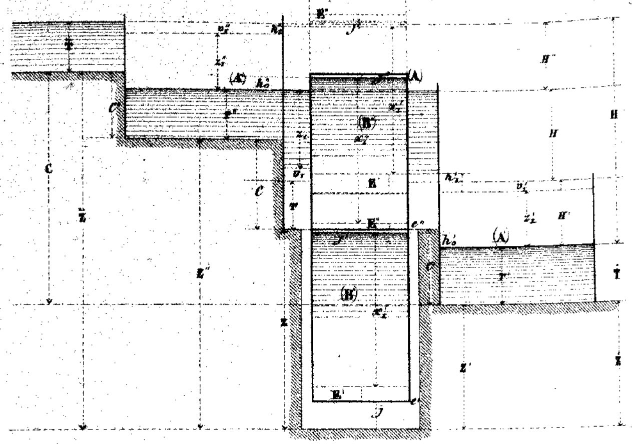


Fig. 75.

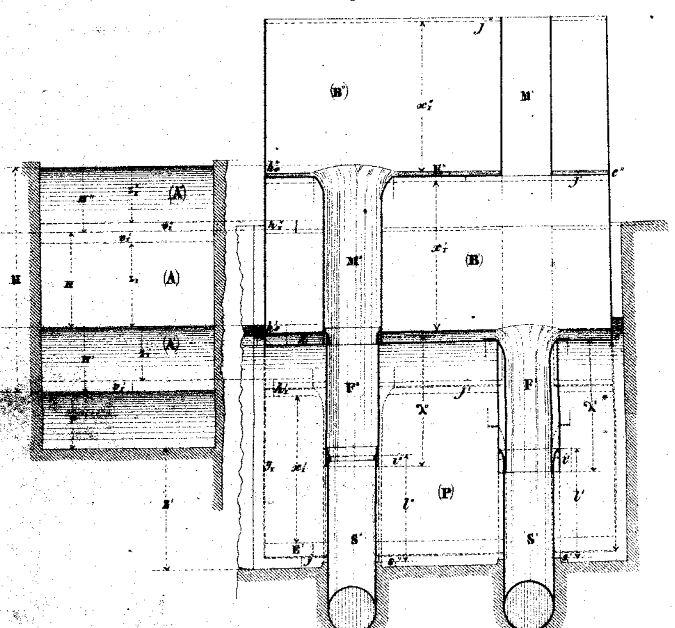


Fig. 77.

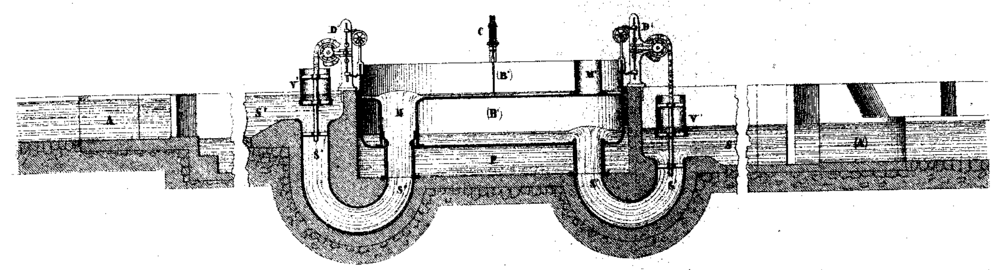


Fig. 76.

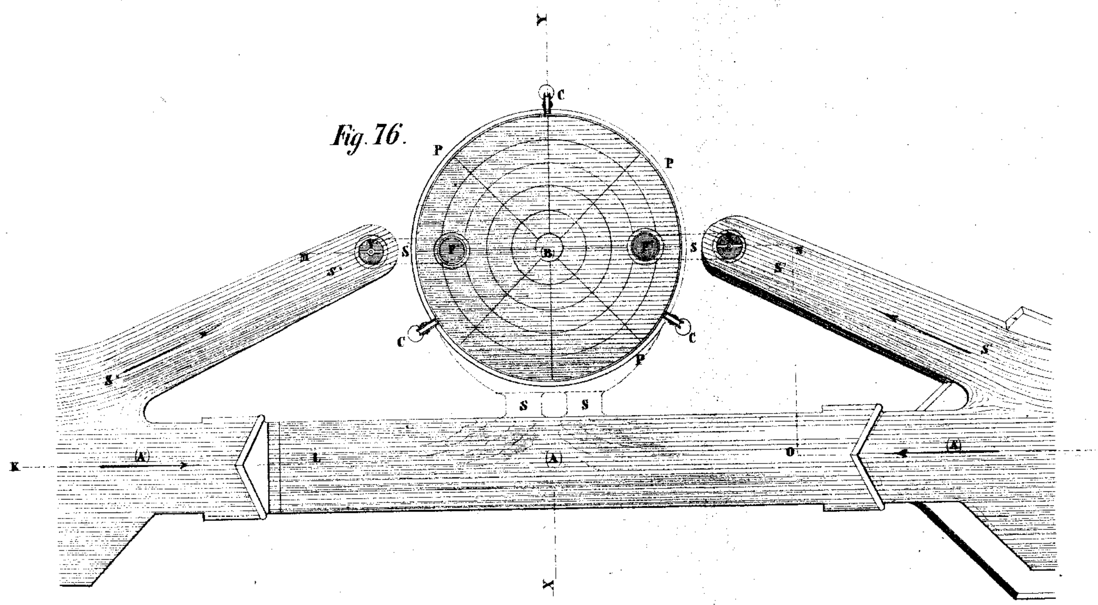


Fig. 78.

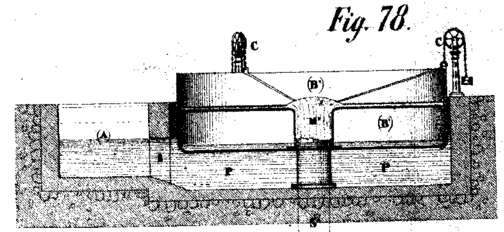


Fig. 79.

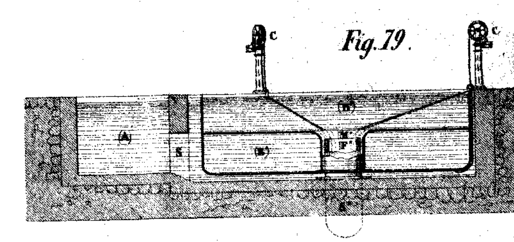


Fig. 80.

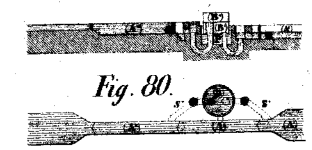
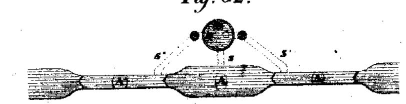


Fig. 82.



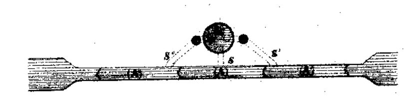


Fig. 81.

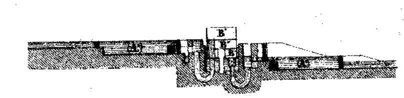
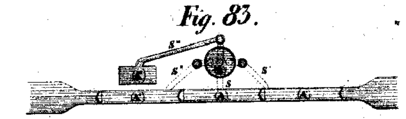
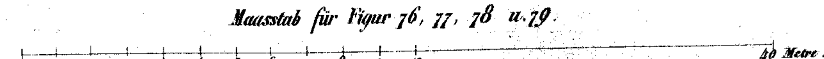


Fig. 83.



Maasstab für Figur 76, 77, 78 u. 79.



Lith. Anst. von M. Frommann in Darmstadt.